高等学校教材

流体力学

（第二版）

张也影



高等教育出版社

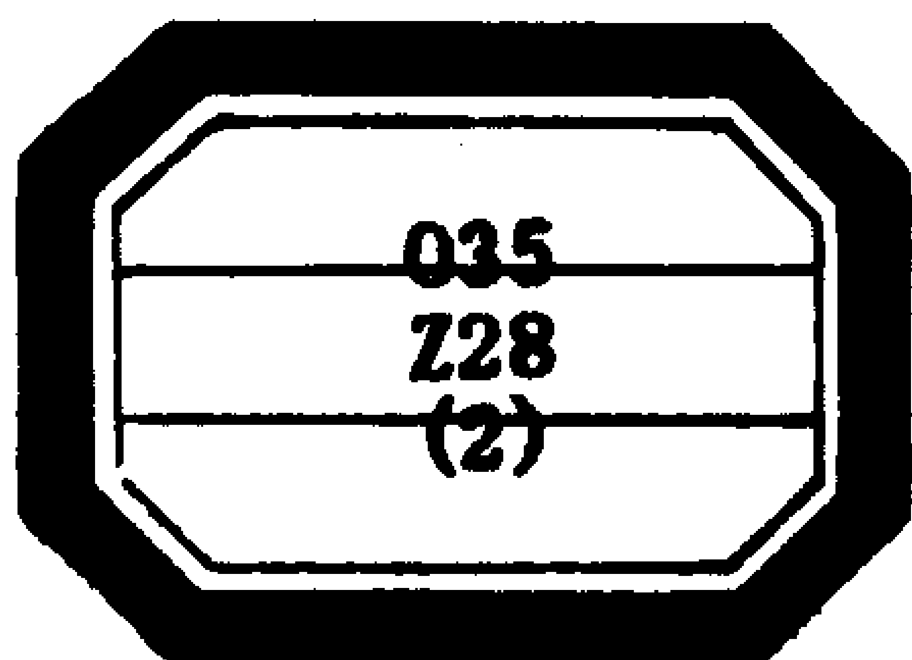
高等学校教材

流体力学

（第二版）

张也影



高等教育出版社

内 容 简 介

本书是1986年出版的张也影编著《流体力学》一书的第二版，原书曾获得国家教委第二届高等学校优秀教材一等奖。

本书第二版在修订中仍然保留原书的主要章节和习题，在内容上作了适当的精简，力求论述上更加精练和准确，同时改正了一些明显的疏漏和错误。书中物理量的单位和符号按照“GB 3100～3102—93　量和单位”作了统一订正。本书符合1995年修订的《工程流体力学课程教学基本要求(少学时)》。书中附有大量习题和例题可供选用。

本书适合本科机械类专业作为教材使用，也可作为广大工程技术人员的自学参考书。

第二版前言

本书自1986年出版至今已经12年了，这期间我国经济建设和高等教育事业都取得了巨大的进步和发展。展望21世纪，培养高素质的科技人才向教育改革提出了更高的要求。作为高等学校教材，需要不断提高质量才能适应形势的发展。

本书第一版经过11次重印，累计发行5万余册，1992年获得国家教委第二届高等学校优秀教材一等奖。作者向长期指导和关怀本书的原国家教委水力学及流体力学课程教学指导小组前辈专家和全国广大同行师友们表示衷心的感谢。本书的成长有赖于你们的帮助，过去如此，今后还是如此。

这次修订工作面临高等学校专业调整、加强基础、拓宽专业面的教育改革形势。原教材是按机械类专业40学时要求编写的，现在普遍减少学时，原书有些内容需要删削。此次作者在书中删除了速度势、流函数及简单势流等概念，并对粘度、静压强单位及压力棱柱概念等作了一些精简。不过从篇幅上来看，压缩得十分有限，这也是作者有意给教师在精选内容方面留一个较为广阔的回旋余地。有些章节适于学生课外阅读，改革教学方法有时也会取得事半功倍的效果。

这次修订按照国家标准统一本书物理量的符号和单位，原书中与"GB 3100～3102—93　量和单位"不符合的均一一予以订正。

本书初版中有许多明显的错误和疏漏，凡是已经发现的均加以改正，但由于工作不够仔细，第二版仍难完全避免差错，希望读者继续给以指正。

值此本书修订之际，作者向山东工业大学孔珑教授深表谢意，他在主审原书和复审修订稿时都提出过许多宝贵意见，他严谨的治学态度和认真负责的工作作风给作者以多方面的教益，对提高本书质量起了重大作用。

作者对给予本书修订工作大力支持和帮助的陈晋南教授表示谢意。

流体力学是古老而又新兴的科学，它的领域无限宽广，愿有志者共勉，为它的发展和应用，贡献出我们的智慧和力量。

张也影
1998 年 11 月
地址：北京理工大学九单元 8 号
邮编：100081
电话：(010)68473858

第一版前言

本书是根据40学时的《工程流体力学教学大纲(草案)》编写的,可作为机械制造类专业工程流体力学课程教材使用,也可供有关工程技术人员作为自学参考书。

全书共分八章。绪论、流体静力学、流体动力学基础、管中流动、孔口出流等五章是机械类各专业的共同必修部分;相似原理和量纲分析、缝隙流动、气体的一元流动及散布于各章中的非定常流动则是供不同专业选修的部分。不带*号的条目是本课程的基本内容。有*号的通常是非基本内容,这部分在教学中可以精简或删削。根据本书在几所院校的试用情况来看,如果某些专业需要,可用50学时左右将本书全部内容讲完。

由于各院校教学、设备、师资和学生等条件的不同,每学时的课程容量不可能没有差异。有经验的教师往往能够根据具体情况确定适宜的教学进度和教学方法,有时可能删减一些繁琐的数学推导,有时可能对教材作某些必要的精简或补充。但是为了便于自学,教材中的公式证明及原理叙述似不宜过简。除却编者文字拙劣之外这也是使本书篇幅略有膨胀的一个原因。这是提请读者谅解的第一点。

其次在习题的设置上也有类似情况,本书编有习题235个,远超出学生应完成的作业数目。这一方面是为了留有较大的选择余地,另一方面也是为了鼓励学生自主地去扩大知识面,提高独立工作能力,部分地弥补不设思考题的缺欠。除教师布置的必做习题外,其余题目均可由学生自己选做,不过对于少数几个需要专业知识才能做的习题则不必勉强。这是提请读者谅解的第二点。

本书是在国家教委水力学课程教学指导小组指导下编写的，编者对夏震寰教授、吴持恭教授及小组全体委员所给予的教诲和鞭策表示衷心的感谢。

本书主审孔珑和李诗久两位教授仔细审阅了原稿，提出许多宝贵意见，帮助编者避免了不少错误。北京工业学院向文娟和张宏德副教授热情指导和组织大百科全书制图班的同学进行全书底图的描绘工作。这些都对本书质量的提高起了重大作用。对此表示感谢。

在本书编写过程中，荣幸地得到了许多院校的帮助和支持，试用本书的兰州铁道学院、成都科技大学、北京农机学院、洛阳工学院等院校的教师热情指正了原稿中的疵误。本院流体力学教研室的全体同志和两个班的同学积极承担原稿的整理工作。在此，编者向为本书作出贡献的一切同志深表谢意。

虽然有这许多优越的客观条件，但毕竟由于编者水平有限，本书的缺点和错误仍难完全避免。热忱期望读者给以批评指正。惠寄地址：北京工业学院流体力学教研室。

张也影

1985 年 7 月

责任编辑　王　晶
封面设计　于文燕
责任绘图　孟庆祥　潘曙光
版式设计　马静如
责任校对　陈　荣
责任印制　宋克学

目　录

第一章　绪　　论

§1-1　工程流体力学的研究对象、任务和方法

在流体力学的发展史上，曾经出现过理论流体力学和工程流体力学这两门性质相近的学科，它们同是研究流体（包括液体和气体）平衡和运动规律及其应用的科学，但在研究内容和方法上却又稍有差异。前者偏重数理分析，是连续介质力学的一个组成部分，属于基础科学范畴；后者着眼于工程应用，是工程力学的一个组成部分，属于应用科学范畴。

从内容上来说，学科之间的分工可能越来越细，但从方法上来说，随着计算机的推广和应用，原来存在于理论流体力学和工程流体力学之间的差异已在逐步消失。现在是综合运用一切理论、实验和计算手段来促进流体力学发展及应用的时期。

在机械类专业教学计划中，工程流体力学是一门技术基础课，它的任务是为学生学习后续课程及从事专业工作奠定初步的流体力学理论基础。

机械制造行业中涉及流体力学知识的技术问题很多。例如：水轮机、燃气轮机、蒸汽轮机、喷气发动机、液体燃料火箭、内燃机等都是以流体能量作为原动力的动力机械；机床、汽车、拖拉机、坦克、飞机、船舶、工程机械、矿山机械等处广泛采用的液压传动、液力传动和气动传动都是以流体作为工作介质的传动机械；水压机、油压机、水泵、油泵、风扇、通风机、压气机等都是以流体为对象的工作机械。流体机械的工作原理、性能、使用和试验都是以流体力

学作为理论基础的。

机械工程中还有许多与流体力学有关的问题，例如测试计量中的测压计、流量计、水力测功计、水力制动器、气动量仪；铸造中的离心浇注、水力清砂、水力震捣；铸造中的锻压设备；焊接中的喷枪气流、金属流动；机床中的冷却通风、润滑密封、减震加载、静压支承、动压支承、射流原件、气动夹具；燃烧室中的燃料雾化、吹氧、燃烧、反应；发动机中的燃料供给系、冷却系、润滑系、增压系；车间中的供气供油、旋风除尘、机械手、自动生产线等等均或多或少与流体力学知识有关。

这许多问题的解决当然需要多方面的基础知识，但显然工程流体力学基础也是必不可少的。

流体力学在其它技术领域中的应用也十分广泛，例如航空航海、天文气象、地球物理、水利水电、热能制冷、土建环保、石油化工、气液输送、燃烧爆炸、冶金采矿、生物海洋、军工核能等等部门都有许多流体力学问题，流体力学是一门既古老又新兴的学科，存在着极为广阔的研究天地。

工程流体力学和其它学科一样大致有如前所述的三种研究方法。一种是理论方法，分析问题的主次因素提出适当的假定，抽象出理论模型(如连续介质、理想流体、不可压缩流体等等)，运用数学工具寻求流体运动的普遍解。一种是实验方法，将实际流动问题概括为相似的实验模型，在实验中观察现象、测定数据并进而按照一定方法推测实际结果。再一种是计算方法，根据理论分析与实验观测拟定计算方案，通过编制程序输入数据用计算机算出数值解。这三种研究方法各有所长，也各有所短。需要相辅相成才有利于推进流体力学的发展。

§1－2　流体质点与连续介质概念

一、流体的物理属性

流体(包括液体和气体)与固体是物质的不同表现形式,它们都有下列三个物质基本属性:

1. 由大量分子组成;
2. 分子不断作随机热运动;
3. 分子与分子之间存在着分子力的作用。

不过这三个物质基本属性表现在气体、液体与固体方面却有量和质的差别。同样体积内的分子数目,气体少于液体,液体又少于固体;同样分子距上的分子力,气体小于液体,液体小于固体。于是气体的分子运动有较大的自由程和随机性,液体则较小,而固体分子却只能围绕自身位置作微小的振动。

这些微观的差异导致宏观表象是:

固体有一定的体积和一定的形状;

液体有一定的体积而无一定的形状;

气体既无一定的体积也无一定的形状。

微观结构、宏观表象归根到底使得流体在力学性能上表现出下述两个特点:

第一点是流体不能承受拉力,因而流体内部永远不存在抵抗拉伸变形的拉应力。

第二点是流体在宏观平衡状态下不能承受剪切力,任何微小的剪切力都会导致流体连续变形、平衡破坏、产生流动。

固体显然没有这两个特点。它能承受拉力、压力和剪切力,内部相应产生拉应力、压应力和切应力以抵抗变形,外力或应力不大到一定数值,固体形状不会被破坏。

流体的这两个特点简称为流体的易流动性,易流动性既是流体命名的由来,也是流体区别于固体的根本标志。

二、流体质点的概念

从微观结构上来看，流体分子自然有一定的形状，因而分子与分子之间必然存在着某些间隙。根据阿伏加德罗(Avogadro)定律推算，在标准状况($t=0$ ℃，$p=101\ 325$ Pa)下，每 1 cm^3 体积中有气体分子 2.7×10^{19} 个，液体分子排列更加紧密，每 1 cm^3 体积中的液体分子数目为 3×10^{24} 个。由此可见分子间的间隙虽然很小，但毕竟是存在的。这是分子物理学研究物质属性及流体物理性质的出发点，否则无从解释物理性质中的许多现象(如体积压缩及质量的离散分布等等)。

但是对于研究宏观规律的流体力学来说，一般不需要探讨分子的微观结构，因而必须对流体的物理实体加以模型化，使之更适于研究大量分子的统计平均特性、更利于找出流体运动或平衡的宏观规律。

流体质点和连续介质的概念就是流体力学学科中必需引用的理论模型。

所谓流体质点就是流体中宏观尺寸非常小而微观尺寸又足够大的任意一个物理实体，流体质点具有下述四层含义：

1. 流体质点的宏观尺寸非常小。甚至可以小到肉眼无法观察、工程仪器无法测量的程度，用数学用语来说就是流体质点所占据的宏观体积极限为零，简记为 $\lim \Delta V\to0$，极限为零并不等于零。

2. 流体质点的微观尺寸足够大。这种宏观为零的尺寸用微观仪器度量必然又很可观，所谓微观尺寸足够大，就是说流体质点的微观体积必然大于流体分子尺寸的数量级，这样在流体质点内任何时刻都包含有足够多的流体分子，个别分子的行为不会影响质点总体的统计平均特性。

3. 流体质点是包含有足够多分子在内的一个物理实体，因而在任何时刻都应该具有一定的宏观物理量。例如：

流体质点具有质量，这质量就是所包含分子质量之和；

流体质点具有密度，这密度就是质点质量除以质点体积；

流体质点具有温度，这温度就是所包含分子热运动动能的统计平均值；

流体质点具有压强，这压强就是所包含分子热运动互相碰撞从而在单位面积上产生的压力的统计平均值。

此外，流体质点也具有流速、动量、动能、内能等等宏观物理量，这些物理量的统计平均概念亦均类似，不一一详述了。

4. 流体质点的形状可以任意划定，因而质点和质点之间可以完全没有空隙，流体所在的空间中，质点紧密毗邻、连绵不断、无所不在。于是也就引出下述连续介质的概念。

三、连续介质的概念

既然假定组成流体的最小物理实体是流体质点而不是流体分子，因而也就等于假定流体是由无穷多个、无穷小的、紧密毗邻、连绵不断的流体质点所组成的一种绝无间隙的连续介质。

通常把流体中任意小的一个微元部分叫作流体微团，当流体微团的体积无限缩小并以某一坐标点为极限时，流体微团就成为处在这个坐标点上的一个流体质点，它在任何瞬时都应该具有一定的物理量，如质量、密度、压强、流速等等。因而在连续介质中，流体质点的一切物理量必然都是坐标与时间(x,y,z,t)变量的单值、连续、可微函数，从而形成各种物理量的标量场和矢量场（也称为流场），这样我们就可以顺利地运用连续函数和场论等数学工具研究流体运动和平衡问题，这就是连续介质假定的重要作用。

§1-3 流体的密度、比体积和相对密度

这是代表流体质量性质的几个基本概念，它们互有区别却又互有联系。如图1-1，在流体中任取一个流体微团A，其微元体积为ΔV，微元质量为Δm。当微元无限小而趋近$P(x,y,z)$点成为一个质点时，定义：

表 1-1 $p = 101\ 325$ Pa 下

液 体	温度 t/°C	相对密度 d	密度 ρ/(kg/m³)	比体积 v/(m³/kg)	压缩率 κ_T(Pa⁻¹)
蒸馏水	4	1	1 000	1×10^{-3}	0.485×10^{-9}
苯	20	0.895	895	1.12×10^{-3}	0.97×10^{-9}
四氯化碳	20	1.588	1 588	0.63×10^{-3}	0.91×10^{-9}
原油	20	0.856	856	1.17×10^{-3}	—
汽油	20	0.678	678	1.47×10^{-3}	—
甘油	20	1.258	1 258	0.79×10^{-3}	0.23×10^{-9}
煤油	20	0.808	808	1.24×10^{-3}	—
汞	20	13.59	13 590	0.074×10^{-3}	0.038×10^{-9}
润滑油	20	0.918	918	1.09×10^{-3}	—
水	20	0.998	998	1.002×10^{-3}	0.46×10^{-9}
海水	20	1.025	1 025	0.976×10^{-3}	0.43×10^{-9}
酒精	20	0.789	789	1.27×10^{-3}	1.1×10^{-9}
辛烷 C_8H_{18}	20	0.702	702	1.42×10^{-3}	1.15×10^{-9}
松节油	20	0.862	862	1.16×10^{-3}	0.88×10^{-9}
蓖麻油	20	0.960	960	1.04×10^{-3}	0.53×10^{-9}
亚麻仁油	20	0.942	942	1.06×10^{-3}	0.57×10^{-9}
液氢	−257	0.072	72	13.9×10^{-3}	—
液氧	−195	1.206	1 206	0.83×10^{-3}	—

常见液体的物理性质

体积模量 $K/(MPa)$	动力粘度 μ / (Pa·s)	运动粘度 $\nu/(m^2/s)$	汽化压强 p_v/ (Pa 绝对)	表面张力 σ / (N/m)
2.06	1.52×10^{-3}	1.52×10^{-6}	870	0.075
1.03	0.65×10^{-3}	0.73×10^{-6}	10 000	0.029
1.10	0.97×10^{-3}	0.61×10^{-6}	12 100	0.027
—	7.2×10^{-3}	8.4×10^{-6}	—	0.03
—	0.29×10^{-3}	0.43×10^{-6}	55 000	—
4.35	1490×10^{-3}	1184×10^{-6}	0.014	0.063
—	1.92×10^{-3}	2.4×10^{-6}	3 200	0.025
26.2	1.63×10^{-3}	0.12×10^{-5}	0.17	0.51
—	440×10^{-3}	479×10^{-6}	—	—
2.18	1.00×10^{-3}	1.00×10^{-6}	2 340	0.073
2.336	1.08×10^{-3}	1.05×10^{-6}	2 300	0.074
0.8958	1.19×10^{-3}	1.5×10^{-6}	5 900	0.022
0.8666	0.547×10^{-3}	0.78×10^{-6}	14 000	0.022
1.137	1.49×10^{-3}	1.73×10^{-6}	5 100	0.027
1.876	0.961×10^{-3}	1.00×10^{-6}	—	—
1.762	0.455×10^{-3}	0.48×10^{-6}	—	—
—	0.021×10^{-3}	0.29×10^{-6}	21 400	0.025
—	82×10^{-3}	68×10^{-6}	21 400	0.015

一点上流体密度为

$$\rho=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta V}=\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V} \tag{1-1}$$

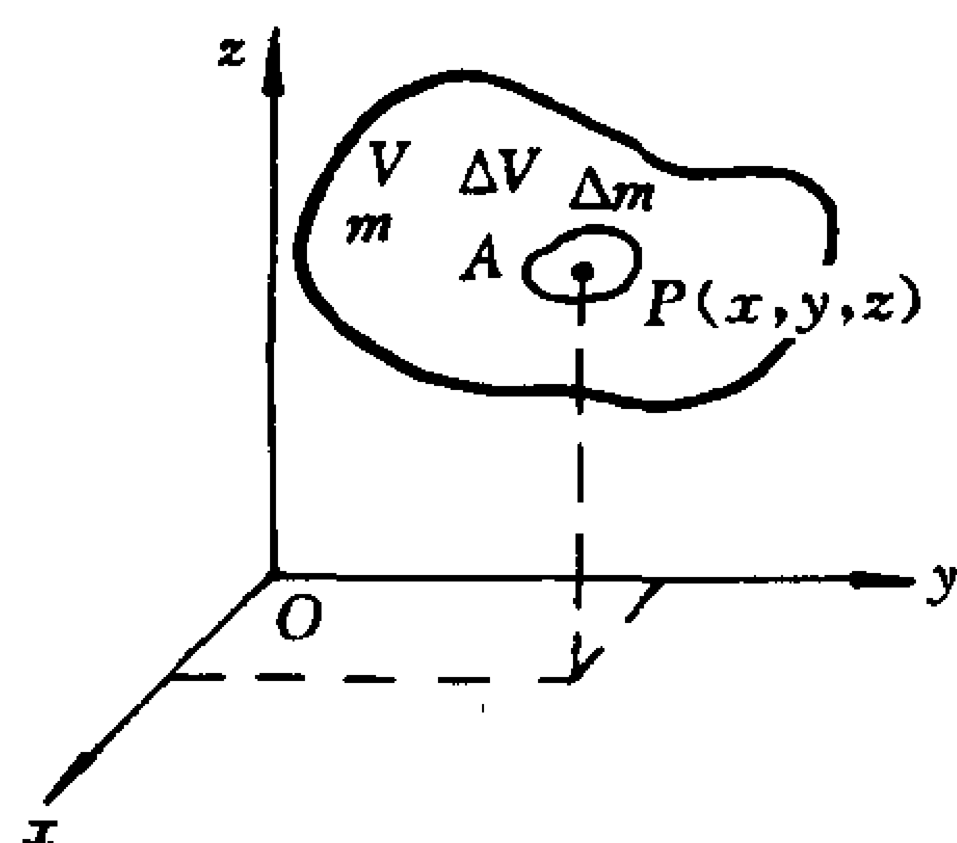


图 1-1 流体微团

一点上的流体比体积为

$$v=\lim_{\Delta m\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta m}=\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}m} \tag{1-2}$$

不同点上的 ρ,v 均随各点的温度、压强状况而定。

如果流体是均质的,则

流体密度

$$\rho=\frac{m}{V}\ \mathrm{kg/m^3} \tag{1-3}$$

流体比体积

$$v=\frac{V}{m}\ \mathrm{m^3/kg} \tag{1-4}$$

由(1-3)和(1-4)式可知: $\rho=\dfrac{1}{v}$ (1-5)

均质流体指在空间上质量分布是均匀的,但流体密度和比体积仍然是可以随温度和压强而变化的。

此外,物理上还有一个相对密度的概念(这里指定参考物质为水),它是物体质量与同样体积 4 ℃蒸馏水质量之比,这是一个无量纲数。如果用下角标 w 代表 4 ℃蒸馏水的相应物理量,则流体相对密度为

$$d=\frac{m}{m_w}=\frac{\rho}{\rho_w}=\frac{v_w}{v} \tag{1-6}$$

4 ℃蒸馏水的相对密度当然是 1,则

$$\left.\begin{array}{ll}4\ ℃\text{蒸馏水的密度} & \rho_w=1\ 000\ \mathrm{kg/m^3} \\ 4\ ℃\text{蒸馏水的比体积} & v_w=0.001\ \mathrm{m^3/kg}\end{array}\right\} \tag{1-7}$$

于是根据(1－6)式可知,流体密度、比体积的数值与相对密度的关系为

$$\left.\begin{array}{l}\rho=1\ 000d\ \mathrm{kg/m^3} \\ v=0.001/d\ \mathrm{m^3/kg}\end{array}\right\} \tag{1-8}$$

只要知道流体的相对密度,按(1－8)式即可算出其密度和比体积的数值。

流体的密度、比体积均与流体的压强和温度有关,表 1－1 中列出 $p=101\ 325\mathrm{Pa}$ 下各种常见液体的相对密度、密度、比体积数值,表 1－2 中列出 $p=101\ 325\mathrm{Pa}$ 下水、原油、空气相对密度随温度的变化。表 1－3 中列出 $p=101\ 325\mathrm{Pa}$ 下 20 ℃时常见气体的密度值。表 1－3 中其他栏目将陆续介绍。

表 1－2　$p=101\ 325$ Pa 下水、原油、空气相对密度随温度的变化

温度/℃	0	5	10	15	20
水	0.999 8	1.000 0	0.999 7	0.999 1	0.998 2
原油	0.869 3	0.866 2	0.863 1	0.860 0	0.856 9
空气	1.293×10^{-3}	1.273×10^{-3}	1.248×10^{-3}	1.226×10^{-3}	1.205×10^{-3}
温度/℃	25	30	40	50	60
水	0.997 0	0.995 7	0.992 2	0.988 0	0.983 2
原油	0.853 8	0.850 7	0.844 5	0.838 3	0.832 1
空气	1.185×10^{-3}	1.165×10^{-3}	1.128×10^{-3}	1.098×10^{-3}	1.060×10^{-3}
温度/℃	70	80	90	100	
水	0.977 8	0.971 8	0.965 3	0.958 4	
原油	0.825 9	0.819 6	0.813 6	0.807 4	
空气	1.029×10^{-3}	1.000×10^{-3}	0.973×10^{-3}	0.946×10^{-3}	

§1－4　流体的压缩性和膨胀性

流体相对密度、密度、比体积随温度与压强变化，其原因是由于流体内部分子间存在着间隙。压强增大，分子间距减小，体积压缩；温度升高，分子间距增大，体积膨胀。流体都具有这种可压缩能膨胀的性质，不过气体的压缩性和膨胀性较液体更为显著。

一、气体压缩性和膨胀性的方程表示法

全面反映气体压缩性和膨胀性的关系式就是物理上已经学过的理想气体的状态方程式：

$$pV = mR_g T \tag{1-9}$$

或写成

$$pv = R_g T \tag{1-10}$$

及

$$\frac{p}{\rho} = R_g T \tag{1-11}$$

式中 p 是气体绝对压强，单位符号是 Pa，$1\ \mathrm{Pa} = 1\ \mathrm{N/m^2}$，$1\ \mathrm{bar} = 10^5\ \mathrm{Pa}$。

v 是气体比体积，单位符号是 $\mathrm{m^3/kg}$。

T 是气体的热力学温度，T 的单位符号是 K。

R_g 是因气体种类而异的气体常数，它的单位可由 $\frac{pv}{T}$ 的单位导出，它的数值可根据气体的摩尔质量 M 由下式确定：

$$R_g = \frac{\text{摩尔气体常数}\ R}{\text{气体的摩尔质量}\ M} = \frac{8\ 314}{M}\ \mathrm{J/(kg \cdot K)} \tag{1-12}$$

常用气体的摩尔质量 M 及气体常数 R_g 列于表 1－3 中。

在一般工程条件（压强不大于 20 000 kPa，温度不低于 253 K）下，理想气体状态方程式（1－9）～（1－11）对于常用气体也是准确适用的。

表 1-3 常用气体的物理性质(101 325 Pa、20 ℃)

气 体	空气	二氧化碳 (CO_2)	一氧化碳 (CO)	氦 (He)
摩尔质量 M/g	28.96	44.01	28.01	4.003
气体常数 R_g/[J/(kg·K)]	287	188.9	296.5	2 077
比定压热容 c_p/[J/(kg·K)]	1 005	814.7	1 032	5 192
比定容热容 c_V/[J/(kg·K)]	717.2	621.2	734.7	3 115
绝热指数 γ	1.400	1.304	1.404	1.667
密度 ρ/(kg/m³)	1.205	1.84	1.16	0.166
动力粘度 μ/(Pa·s)	0.18×10^{-4}	0.148×10^{-4}	0.182×10^{-4}	0.197×10^{-4}
运动粘度 ν/(m²/s)	14.9×10^{-6}	8×10^{-6}	15.7×10^{-6}	118×10^{-6}

气 体	氢 (H_2)	沼气 (CH_4)	氮 (N_2)	氧 (O_2)
摩尔质量 M/g	2.016	16.04	28.01	32.00
气体常数 R_g/[J/(kg·K)]	4 124	518.3	296.2	259.8
比定压热容 c_p/[J/(kg·K)]	14 180	2 191	1 032	660 0
比定容热容 c_V/[J/(kg·K)]	10 060	167.2	734.8	471.1
绝热指数 γ	1.410	1.310	1.404	1.401
密度 ρ/(kg/m³)	0.083 9	0.668	1.16	1.33
动力粘度 μ/(Pa·s)	0.09×10^{-4}	0.134×10^{-4}	0.176×10^{-4}	0.2×10^{-4}
运动粘度 ν/(m²/s)	107×10^{-6}	20×10^{-6}	15.2×10^{-6}	15×10^{-6}

二、流体压缩性和膨胀性的系数表示法

压缩性和膨胀性的方程表示法仅用于气体。为了兼顾气体、液体两种情况，同时也为了从数量概念上直观表达流体压缩性和膨胀性的大小，除方程表示法外，还有一种系数表示法。

1. 流体的体[膨]胀系数

如图 1-2 所示，流体在压强 p、温度 T 时的初始体积为 V。当压强不变、温度增加到 $T+\Delta T$ 时，流体体积膨胀到 $V+\Delta V$。体积相对变化量$\frac{\Delta V}{V}$与 ΔT 比值的极限称为流体的体[膨]胀系数，用 α_V 表示，即

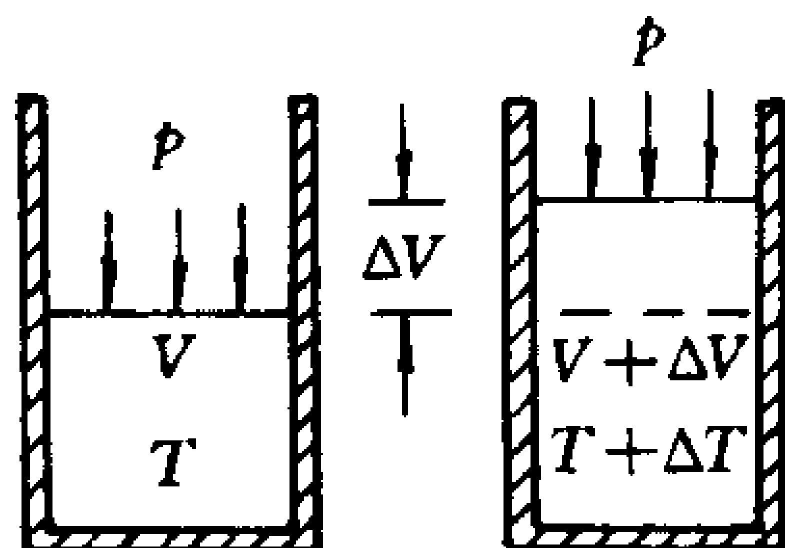


图 1-2　流体在定压下的体积膨胀

$$\alpha_V=\lim_{\Delta T\to 0}\frac{\Delta V/V}{\Delta T}=\lim_{\Delta T\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta T\cdot V}$$
$$=\frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T}=\frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\tag{1-13}$$

α_V 的单位符号是 K^{-1}。

体[膨]胀系数的物理意义是，当压强不变时，每增加单位温度所产生的流体体积相对变化率。

气体体[膨]胀系数可由气体状态方程式(令 $p=C$)求得

$$\alpha_V=\frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T}=\frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\left(\frac{mR_g T}{p}\right)$$
$$=\frac{mR_g}{Vp}=\frac{1}{T}\tag{1-14}$$

α_V 与 T 成反比，如图 1-3，在气体状态方程式的适用范围内温度越低，气体的体[膨]胀系数越大。在 $t=0$ ℃，$T=273$ K 时，$\alpha_V=\frac{1}{273}\ K^{-1}$。$\alpha_V$ 可由实验测定，对一切气体，它都近似地等于 1/273。这就是物理上的盖-吕萨克(Gay-Lussac)定律：当压强不变时，温度每升高 1 摄氏度，一定质量气体的体积，增加它在

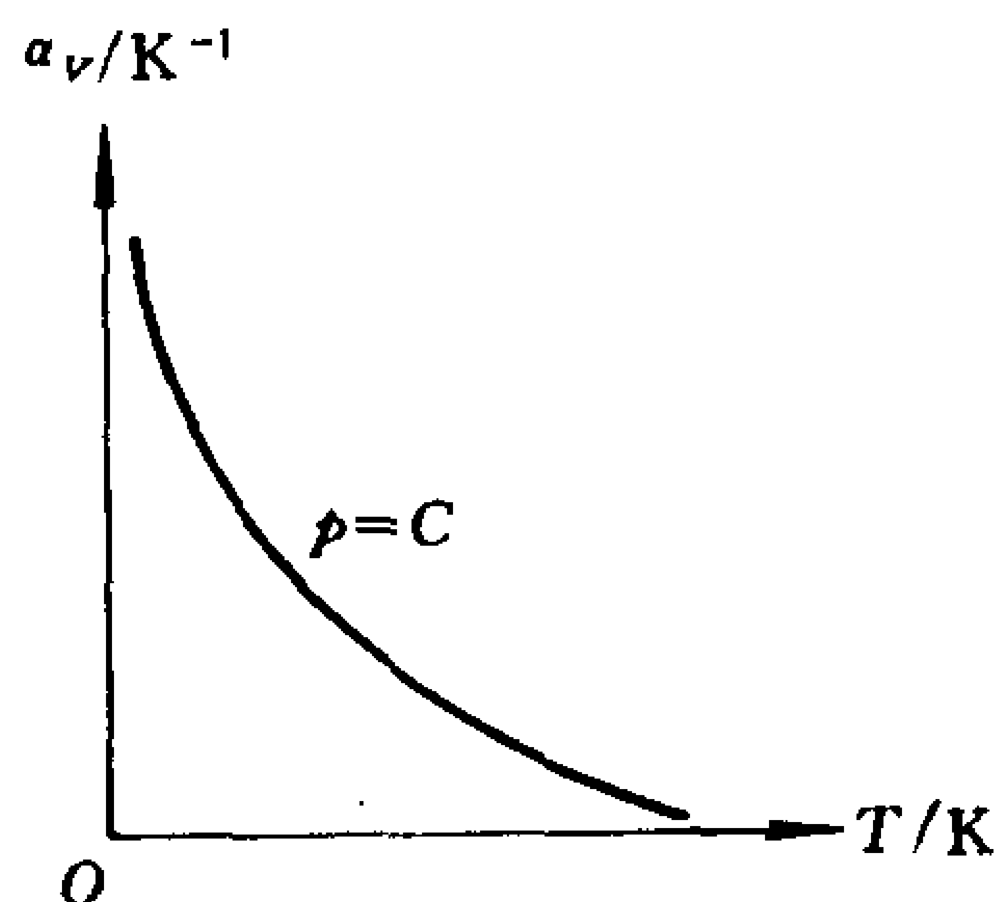


图 1－3　气体体[膨]胀系数曲线

0 ℃时的体积的 1/273。这个定律对理想气体才能严格成立。

水的体[膨]胀系数见表 1－4，常温常压下其数值的数量级为 $\frac{1}{10\ 000}$，液体中溶解有少量气体时，其体[膨]胀系数稍大些。在液压封闭系统中，温差较大时，应注意防止漏油和管道破裂。

表 1－4　水的体[膨]胀系数 α_V（℃$^{-1}$或 K^{-1}）

压强	温　　度　　/(℃或 K)				
MPa	1～10	10～20	45～50	60～70	90～100
0.0981	0.14×10^{-4}	1.50×10^{-4}	4.22×10^{-4}	5.56×10^{-4}	7.19×10^{-4}
9.810	0.43×10^{-4}	1.61×10^{-4}	4.22×10^{-4}	5.48×10^{-4}	7.04×10^{-4}
19.62	0.72×10^{-4}	1.83×10^{-4}	4.26×10^{-4}	5.39×10^{-4}	—
49.05	1.49×10^{-4}	2.36×10^{-4}	4.29×10^{-4}	5.23×10^{-4}	6.61×10^{-4}
88.29	2.29×10^{-4}	2.89×10^{-4}	4.37×10^{-4}	5.14×10^{-4}	6.21×10^{-4}

2．流体的[体积]压缩率

如图 1－4 所示，在温度为 T、压强为 p 时，流体的体积为 V；当温度不变，压强增大到 $p+\Delta p$ 时，流体体积减小到 $V-\Delta V$。体积相对变化量 $-\frac{\Delta V}{V}$ 与 Δp 比值的极限称为流体的等温压缩率，用 κ_T 表示，即

$$\kappa_T = \lim_{\Delta p \to 0} \frac{-\Delta V/V}{\Delta p} = \lim_{\Delta p \to 0}\left(-\frac{1}{V}\frac{\Delta V}{\Delta p}\right)$$

$$= -\frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}p} \qquad (1-15)$$

κ_T 的单位符号是 Pa^{-1}，流体等温压缩率的物理意义是，当温度不变时，每增加单位压强所产生的流体体积相对变化率。

气体的等温压缩率亦可由气体状态方程（令 $T=C$）求得

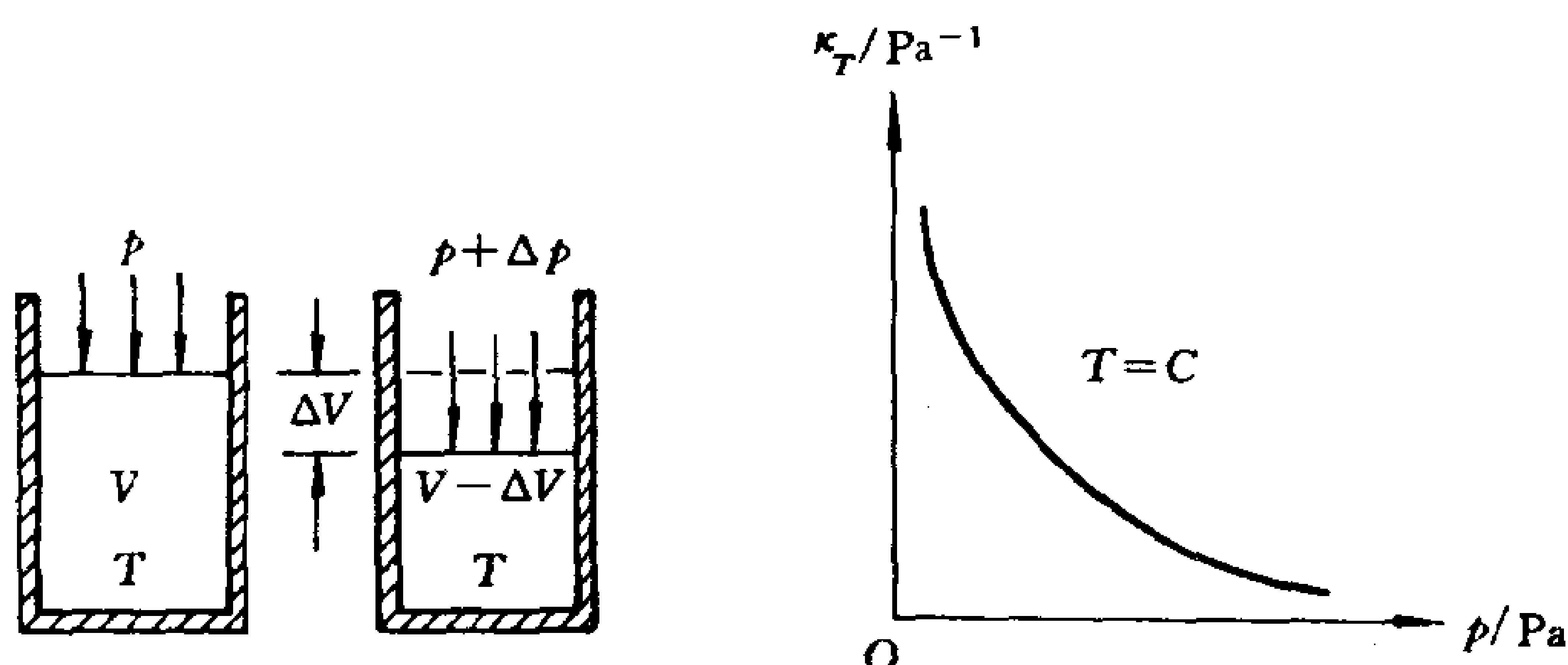


图 1－4　流体在等温下的体积压缩　　　图 1－5　气体压缩率曲线

$$\kappa_T = -\frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\frac{mR_g T}{p}\right)$$

$$= -\frac{mR_g T}{V}\left(-\frac{1}{p^2}\right) = \frac{1}{p} \qquad (1-16)$$

κ_T 与 p 成反比，如图 1－5 所示。在气体状态方程式适用的范围内，压强越高，气体的等温压缩率越小，压缩越困难；反之，压强较低时，气体比较容易压缩。

表 1－5 给出不同温度和压强下水的等温压缩率的实验数据，液体的等温压缩率约为 $\frac{1}{20\,000}(\mathrm{Pa}^{-1})$，这说明液体是不容易压缩的。

表 1-5　水的等温压缩率 κ_T (Pa^{-1})

温度/°C	压强/Pa				
	4.9×10^5	9.8×10^5	19.6×10^5	39.2×10^5	78.5×10^5
0	0.539×10^{-4}	0.537×10^{-4}	0.531×10^{-4}	0.523×10^{-4}	0.515×10^{-4}
5	0.528×10^{-4}	0.523×10^{-4}	0.517×10^{-4}	0.507×10^{-4}	0.492×10^{-4}
10	0.523×10^{-4}	0.517×10^{-4}	0.507×10^{-4}	0.497×10^{-4}	0.481×10^{-4}
15	0.517×10^{-4}	0.510×10^{-4}	0.502×10^{-4}	0.488×10^{-4}	0.470×10^{-4}
20	0.515×10^{-4}	0.505×10^{-4}	0.495×10^{-4}	0.481×10^{-4}	0.460×10^{-4}

3. 流体的体积模量

在工程上也常用 κ_T 的倒数来表示压缩性，κ_T 的倒数用 K 表示，称作流体的体积模量，即

$$K = \frac{1}{\kappa_T} = \lim_{\Delta V \to 0}\left(\frac{\Delta p}{-\Delta V/V}\right) = -V\lim_{\Delta V \to 0}\frac{\Delta p}{\Delta V}$$

$$= -V\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V} \tag{1-17}$$

K 的单位符号是 Pa。K 的物理意义是，当温度不变时，每产生一个单位体积相对变化率所需要的压强变化量。K 值越大（κ_T 越小）表示流体越不容易压缩。

常见液体的压缩率 κ_T 及体积模量 K 值可以从表 1-1 或表 1-5 中查得。

从公式及列举的数表可见 α_V、κ_T、K 的数值是随温度、压强变化的。因此在一定温度、压强下的这三个系数数值应该按微分变化量的办法来计算。可是对于液体来说，这些系数的变化并不大，因此常根据温度、压强的变化范围，选取这些系数的实验平均值，于是这三个系数定义中的微分变化量就可以写成有限增量的形式，即

$$
\left.\begin{aligned}
\alpha_V &= \frac{1}{V}\frac{\Delta V}{\Delta T} = \frac{1}{V}\frac{\Delta V}{\Delta t} \\
\kappa_T &= \frac{1}{V}\frac{\Delta V}{\Delta p} \\
K &= -V\frac{\Delta p}{\Delta V}
\end{aligned}\right\} \tag{1-18}
$$

这种有限增量形式的公式,在物理意义上并无改变,显然有限增量越小,系数的平均值也就越容易准确。

三、不可压缩流体的概念

为了研究问题的方便,规定等温压缩率和体[膨]胀系数完全为零的流体叫作不可压缩流体。这种流体受压体积不减小,受热体积不膨胀,因而其密度、比体积、相对密度均为恒定常数。这样讨论其平衡和运动规律自然简单得多。

绝对不可压缩的流体实际上并不存在,但是在通常条件下,液体以及低速运动的气体的压缩性对其运动和平衡问题并无太大影响,忽略其可压缩性,而直接用不可压缩流体理论分析,所得结果与实际情况有时是非常接近的。

可压缩与不可压缩却又是截然不同的概念。液体平衡和运动的绝大多数问题可以用不可压缩流体理论解决,但液体毕竟还存在着一定的压缩性,当遇到液体压缩性起关键作用的水击现象、液压冲击、水中爆炸波的传播等问题时,就必须按可压缩流体来分析。气体可压缩性比较大,因而气体平衡和运动的大多数问题需要按可压缩流体理论对待,可是在低温、低压、低速条件下,考虑或不考虑气体压缩性,所得结果有时也并无太大出入,因此作为近似分析,采用不可压缩流体理论处理此种问题,既可简化计算又可得到一定准确度的结果。例如对于低速压气机、通风机、内燃机进气系统、低压气体输送、低温烟道等等气流计算问题,有时也可采用不可压缩流体理论分析。此外在机械工程中,有些气体机械的理论与水力机械的理论也存在着一定程度的共同性。实践证明,不可压缩流体模型虽然实际并不存在,但却有很大的理论和实用价值。

［**例题 1－1**］　压强表校正器(图 1－6)中活塞直径 $d=1$ cm，手轮螺距

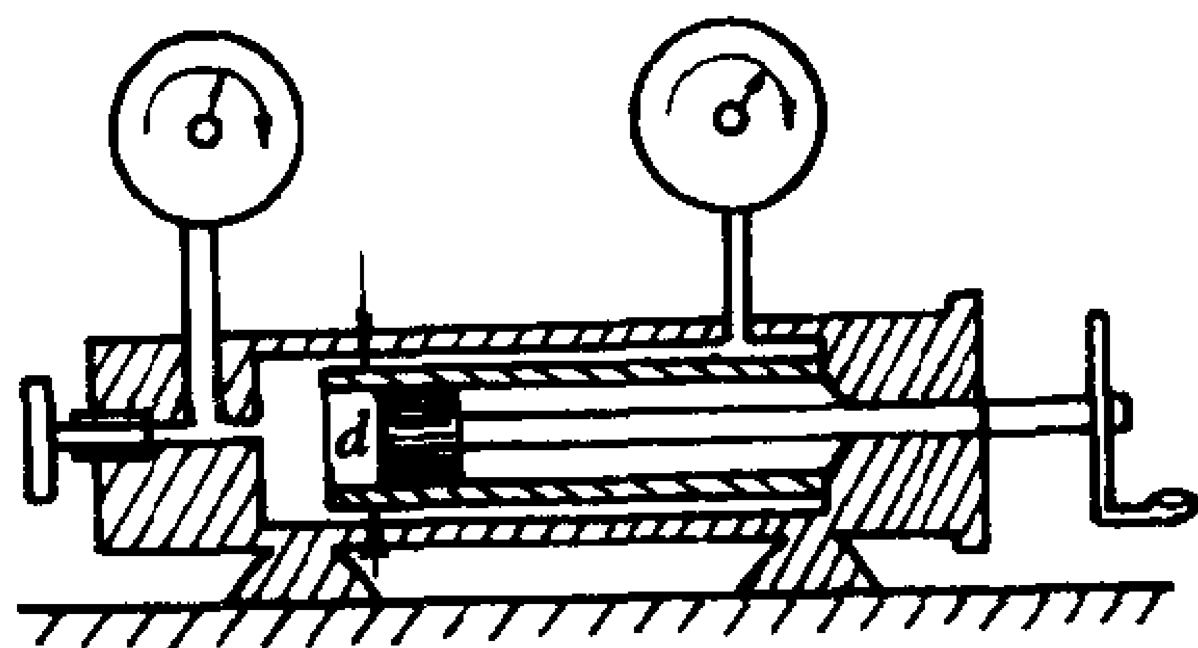


图 1－6　压强表校正器

$t=2$ mm，在 $p_{atm}=101\ 325$ Pa下装入体积 $V=200$ L 的工作油液，为了造成 $200p_{atm}$的计示压强，试求手轮需要转动的圈数 n。

假定油液压缩率的平均值可取为 $\kappa_T=0.466\times10^{-9}$ Pa^{-1}。

［**解**］　根据题意知 $\Delta p=200\times1.013\times10^5=20.26\times10^6$ Pa $=20.26$ MPa，由(1－18)式可得油液需要减小的体积为

$$-\Delta V=\kappa_T V\Delta p$$

另一方面，根据手轮螺距及活塞面积可得油液减小的体积为

$$-\Delta V=\frac{\pi}{4}d^2tn$$

由此可得手轮转动圈数为

$$n=\frac{4\kappa_T V\Delta p}{\pi d^2 t}=\frac{4\times0.466\times10^{-9}\times0.2\times10^{-3}\times20.26\times10^6}{\pi\times10^{-4}\times2\times10^{-3}}=12$$

§1－5　流体的粘性

流体在平衡时不能抵抗剪切力，因而在平衡液体内部不存在切应力，可是在流体运动时情况就完全不同了。

如图 1－7 所示，在互相平行且间隙 δ 很小的两平板之间充满液体，下板固定，上板受 F 力作用并以匀速度 v_0 沿 x 方向运动。由于流体与固体分子间的附着力，紧贴上板附近的一层流体粘附于上板一起以速度 v_0 运动，紧贴下板附近的一层流体粘附于下板而固定不动。在流体内部由于液体分子间的内聚力，上层流

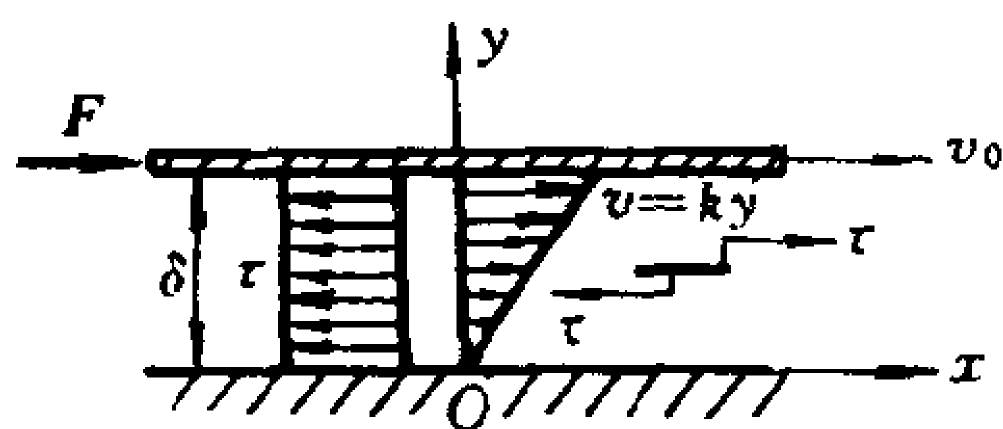


图 1－7 流体的粘性

体必然带动下层流体，而下层流体必然阻滞上层流体，于是在液流横截面上就出现了如图所示的速度分布，当间隙 δ 很小时，速度分布近似直线规律 $v=ky$。可以设想，不同速度的流体层之间互相滑动必然在层与层之间产生内部摩擦力或切应力 τ。这种切应力作为流体内力，总是相等相反地成对出现，并分别作用在紧邻两层流体上。

在液体内部如果取出与 x 轴平行的一个极薄的液层作为分离体，则上面比它运动速度大的液层作用在其上的切应力向右，下面比它运动速度小的液层作用在其上的切应力向左，这是属于流体内部的切应力。如果取液体外边界的上、下平板为分离体，则液体的切应力就会表现为阻止上板运动的摩擦力、或者表现为拖动下面固定平板的摩擦力。反之，如果取整个流体为分离体，则运动平板拖拉顶部液层向右，固定平板阻止底部液层运动。

总之，流体运动时内部产生切应力的这种性质叫作流体的粘性。固体没有这种性质。流体处于平衡状态时，其粘性无从表现，只有当流体运动时，流体的粘性才能显示出来。它不仅影响流体运动的形态和性质，而且也影响流体运动中许多物理量的数值，为了研究流体运动，这里首先介绍粘性的基本规律及粘性的表示方法。

一、牛顿内摩擦定律

牛顿对图 1－7 所示的流动进行实验研究，发现推动上板的外力 F 与上板运动速度 v_0 及摩擦面积 A 成正比，与两板之间的微小距离 δ 成反比，比例常数 μ 与充入两板之间的流体种类及其温度、压强状况有关。但是同固体摩擦的库伦定律不同的是，外力 F

的大小(也就是流体对上板摩擦力 F 的大小)却与上板的正压力没有关系,根据实验可得流体对上板的摩擦力为

$$F = \mu \frac{v_0}{\delta} A \tag{1-19}$$

克服摩擦维持上板以匀速 v_0 运动所需要的摩擦功率为

$$P = F v_0 = \mu \frac{v_0^2}{\delta} A \tag{1-20}$$

流体中的切应力为

$$\tau = \frac{F}{A} = \mu \frac{v_0}{\delta} \tag{1-21}$$

式中 $\frac{v_0}{\delta}$ 代表沿速度的垂直方向每单位长度上的速度变化率,一般称为速度梯度,因此(1-21)式表明流体中的切应力与速度梯度成正比。当两平板间的速度分布 $v = v(y)$ 为直线规律时,液流横截面上各点的速度梯度是一个常数,因而液流横截面上各点的切应力也是一个常数,沿液流截面的切应力分布如图 1-7 所示。图中切应力的方向是按低速液层对高速液层的作用而表示的,如果讨论高速液层对低速液层的切应力,则其箭头方向应该相反。有时

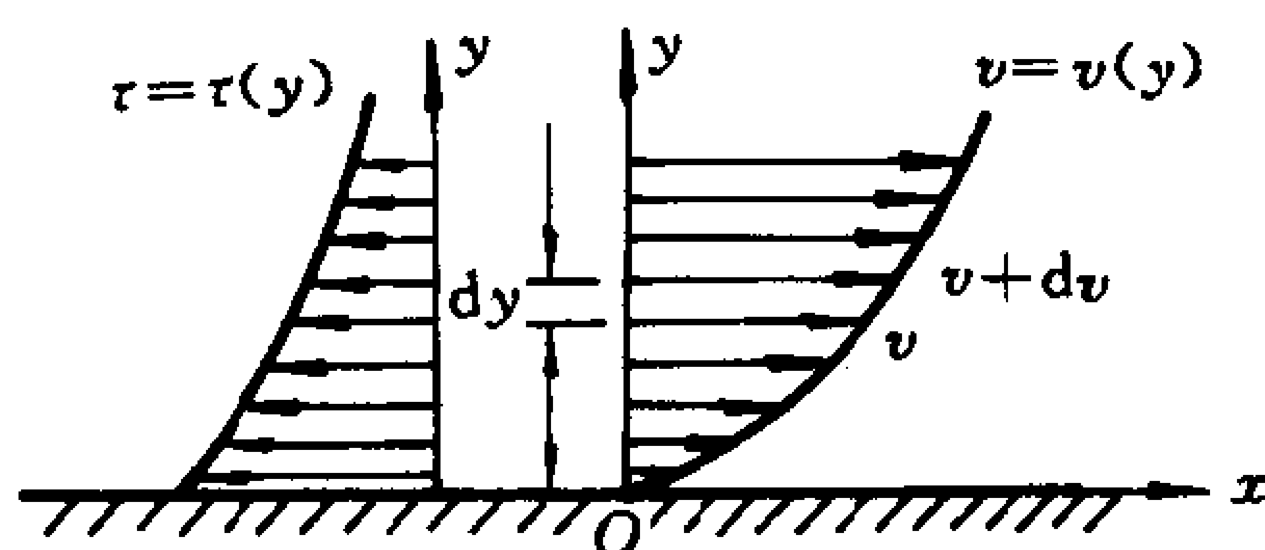


图 1-8　液流截面上速度非线性分布时的切应力

液流截面上速度分布 $v = v(y)$ 不一定是直线规律,如图 1-8 所示,此时液流截面上一点的速度梯度 $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta y} = \frac{dv}{dy}$ 是 y 坐标的函数,因而液流中的切应力也是 y 坐标的函数,其大小为

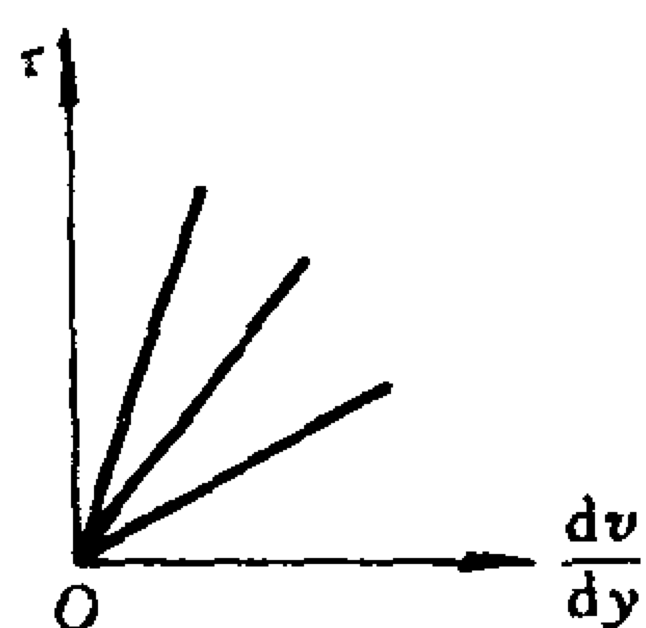
$$\tau = \pm \mu \frac{dv}{dy} \tag{1-22}$$

当$\frac{dv}{dy}>0$时，式中取"+"号；当$\frac{dv}{dy}<0$时，取"-"号，以保持切应力永为正值。

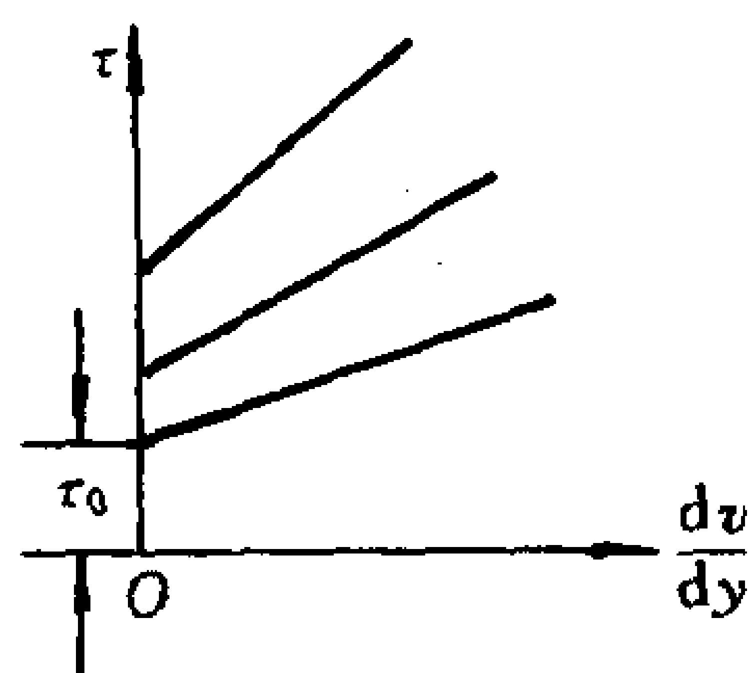
(1-22)式通称为牛顿内摩擦定律，其物理意义仍然是切应力与速度梯度成正比，只不过它更为普遍，而(1-21)式只是它的一个简化特例而已。

牛顿内摩擦定律适用于空气、水、石油等绝大多数机械工业中常用的流体。凡是符合切应力与速度梯度成正比，如图1-9(1)，可以用一条通过原点而非坐标轴的直线所表示的流体叫作牛顿流体。

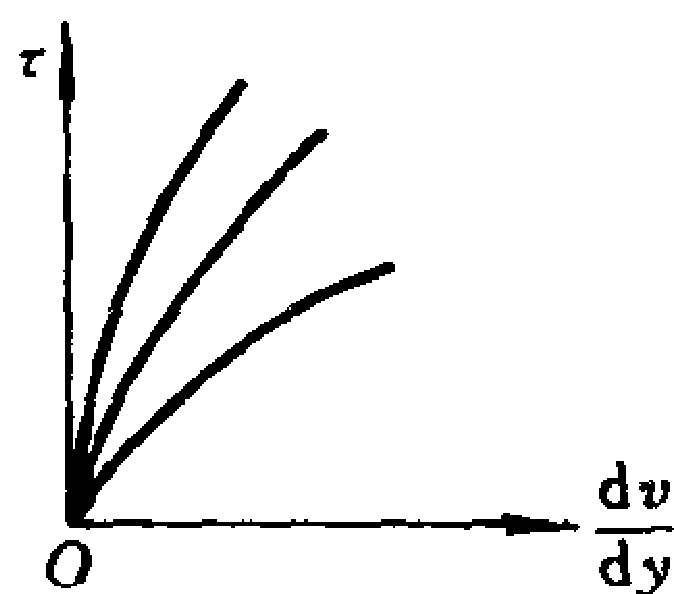
不适合牛顿内摩擦定律的流体叫作非牛顿流体，它们有三种不同类型。



(1)牛顿流体



(2)塑性流体



(3)假塑性流体



(4)胀塑性流体

图1-9 牛顿流体与非牛顿流体

第一种是塑性流体，如凝胶、牙膏等，它们有一个保持不产生剪切变形的初始应力 τ_0，如图 1－9(2)，只有克服这个初始应力后，其切应力才与速度梯度成正比，即

$$\tau=\tau_0+\mu\frac{dv}{dy} \tag{1-23}$$

第二种是假塑性流体，如泥浆、纸浆、高分子溶液等。如图 1－9(3)，当 $\frac{dv}{dy}$ 较小时，τ 对 $\frac{dv}{dy}$ 的变化率较大，近似于塑性流体有初始应力的情况；但当 $\frac{dv}{dy}$ 较大时，τ 对 $\frac{dv}{dy}$ 的变化率又逐渐降低。它们的关系式是

$$\tau=\mu\left(\frac{dv}{dy}\right)^n \quad (n<1) \tag{1-24}$$

第三种是胀塑性流体，如乳化液、油漆、油墨等即是，如图 1－9(4)，当 $\frac{dv}{dy}$ 较小时，τ 对 $\frac{dv}{dy}$ 的变化率较小；当 $\frac{dv}{dy}$ 较大时，τ 对 $\frac{dv}{dy}$ 的变化率逐渐变大。它们的关系是

$$\tau=\mu\left(\frac{dv}{dy}\right)^n \quad (n>1) \tag{1-25}$$

非牛顿流体多数用在化工、轻工、食品等工业方面，而机械工程中所遇到的流体绝大多数都是牛顿流体，故本书仅讨论牛顿流体。

二、流体的粘度

1．粘度的定义及单位

对于牛顿流体，τ 与 $\frac{dv}{dy}$ 成比例，但比例常数 μ 则与流体种类有关。从牛顿内摩擦定律可知：μ 代表单位速度梯度下的切应力，不同常数 μ 代表在单位速度梯度这样一个统一标准之下有不同大小的切应力，因而也就有不同的粘性，反映在图 1－9(1)上就是有不同的直线斜率。反过来说，不同流体，其粘性不同，其比例常数 μ 也就不同，因而称代表粘性大小的比例常数

$$\mu=\frac{\tau}{\mathrm{d}v/\mathrm{d}y} \qquad (1-26)$$

为流体的动力粘度。

在后面许多工程流体力学的理论公式中常常出现 μ 与液体密度 ρ 的比，为简化起见，用 ν 表示，称

$$\nu=\frac{\mu}{\rho} \qquad (1-27)$$

为流体的运动粘度。

这两个名词的来源是由于它们的量纲不同，前者有动力学量纲，而后者只有运动学量纲。根据定义，μ 的量纲是

$$\dim\ \mu=\frac{\dim\ \tau}{\dim\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}}=\frac{\frac{\mathrm{LMT^{-2}}}{\mathrm{L^2}}}{\frac{\mathrm{LT^{-1}}}{\mathrm{L}}}$$

$$=\mathrm{L^{-1}MT^{-1}} \qquad (1-28)$$

而 ν 的量纲是

$$\dim\ \nu=\frac{\dim\ \mu}{\dim\ \rho}=\frac{\mathrm{L^{-1}MT^{-1}}}{\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L^3}}}=\mathrm{L^2T^{-1}} \qquad (1-29)$$

μ 的物理意义是单位速度梯度下的切应力，因而从 μ 的大小可以直接判断流体粘性的大小。

ν 的物理意义是动力粘度与密度之比，如果两种流体密度相差很多，单纯从 ν 的数值上是判断不了它们的粘性大小的。ν 值只适合于判别密度几乎恒定的同一种流体在不同温度压强下粘性的变化情况。

从量纲上可以看出：

动力粘度 μ 的单位是 $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m^2}}\cdot\mathrm{s}=\mathrm{Pa}\cdot\mathrm{s}$

运动粘度 ν 的单位是 $\mathrm{m^2/s}$ 或 $\mathrm{cm^2/s}$，$\mathrm{mm^2/s}$

2. 粘度的测定

流体粘度的测定方法有两种。一种是直接测定法，借助于粘

性流动理论中的某一基本公式,测量该公式中除粘度外的所有参数,从而直接求出粘度。直接测定法的粘度计有转筒式、毛细管

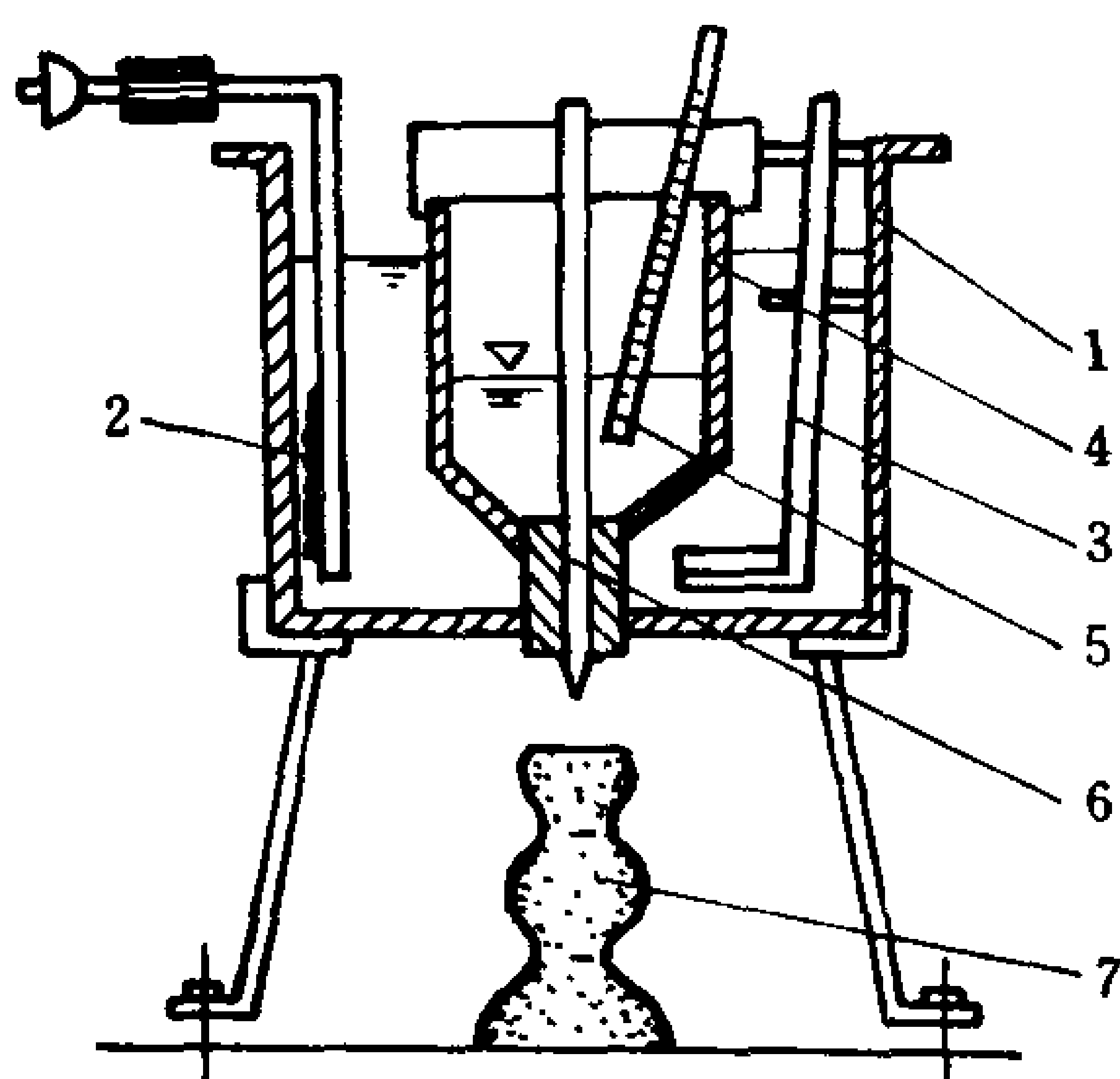


图 1－10　恩氏粘度计

式、落球式等,这种粘度计的测试手段比较复杂,使用不太方便。另外一种是间接测定法,在这种方法中首先利用仪器测定经过某一标准孔口流出一定量流体所需的时间(因为粘度大的流得慢,粘度小的流得快),然后再利用仪器所特有的经验公式间接地算出流体的粘度。这种方法所用的仪器简单、操作方便,故多为工业界所采用。我国石油与机械工业常用的恩氏粘度计如图 1－10 所示。容器 1 中盛足够量的水,借恒温加热器 2 及搅拌器 3 使容器 4 中的待测液体稳定在某一待测温度下,其温度 t ℃用温度计 5 读出。拔开柱塞 6,让事先装入的定量待测液体自直径为 2.8 mm 的标准白金孔口流入量杯 7 中,测出待测流体在 t ℃下流出 200 cm^3 所需的时间为 T_1 s,再将待测液体换成20 ℃的蒸馏水,测出流出 200 cm^3 所需的时间为 $T_2 = 51$ s,于是比值

$$\frac{T_1}{T_2} = r \tag{1-30}$$

称为待测流体在 t ℃时的恩氏度,单位符号为°E。然后利用恩氏粘度计的经验公式

$$\nu = \left(7.31r - \frac{6.31}{r}\right) \times 10^{-6}\ \mathrm{m^2/s} \tag{1-31}$$

$$= \left(7.31r - \frac{6.31}{r}\right) \times 10^{-2}\ \mathrm{cm^2/s} \tag{1-32}$$

$$= 7.31r - \frac{6.31}{r}\ \mathrm{mm^2/s} \tag{1-33}$$

即可由 r 求出流体在 t ℃时的运动粘度 ν。

再根据 $\mu = \rho\nu$ 及 $\rho = 1\,000d\ \mathrm{kg/m^3}$ 即可求出流体的动力粘度为

$$\mu = \left(7.31r - \frac{6.31}{r}\right) \times 10^{-3} d\ \mathrm{Pa \cdot s} \tag{1-34}$$

3. 粘度的变化规律

流体粘度随温度和压强而变化，由于分子结构及分子运动机理的不同，液体和气体的粘度变化规律是迥然不同的。

液体粘度的大小取决于分子间距和分子引力，当温度升高或压强降低时，液体膨胀、分子间距增大、分子引力减小，故粘度降低。反之温度降低或压强升高时，液体粘度增大。这种粘度变化规律可用指数形式表达：

$$\mu = \mu_0 e^{\alpha p - \lambda(t - t_0)} \tag{1-35}$$

式中 μ_0 是温度为 t_0（可取 $t_0 = 0$，15 或 20 ℃等已知常温）、计示压强为零时的液体动力粘度；

μ 是温度为 t ℃、计示压强为 p 时的液体动力粘度；

α 是压强升高时反映液体粘度增长快慢程度的一个指数，一般称为液体的粘压指数；

λ 是温度升高时反映液体粘度降低快慢程度的一个指数，一般称为液体的粘温指数。

单独考虑压强或温度的影响时，可将(1－35)式分解为

$$\mu = \mu_0 e^{\alpha p} \tag{1-36}$$

和

$$\mu = \mu_0 e^{-\lambda(t - t_0)} \tag{1-37}$$

通常情况下，水的粘压指数约为 $\alpha=0.0007$，液压油的粘压指数 $\alpha=0.002\sim0.003$；液体的粘温指数约为 $\lambda=0.035\sim0.052$。由此可见液体粘度受压强的影响不很显著，低于 10^7 Pa 的情况下，常常忽略此种影响。液体粘度受温度的影响是非常明显的，如图 1-11 至图 1-13 所示，液体温度稍有升高，则各种液体的动力粘度和运动粘度均有明显下降。这种现象是影响非等温流动（例如液压传动及远程石油输送等）性能的一个重要因素。

气体与液体的粘度变化规律不同。因为气体分子间距比较大而且分子运动比较剧烈，影响气体粘度大小的主要因素不是分子引力而是分子热运动所产生的动量交换。按照分子运动论，气体动力粘度的统计平均值为

$$\mu=\frac{1}{3}\rho v l \tag{1-38}$$

式中分子密度 ρ 与温度成反比、与压强成正比。

分子运动平均速度 v 及分子平均自由程 l 均与温度成正比、与压强成反比。所以当温度升高时，气体动力粘度与运动粘度增大，而当压强提高时，气体动力粘度与运动粘度减小。气体与液体的粘度变化规律完全相反，这是因为二者内部分子运动机理不同的缘故。

在表 1-6 中给出常压下不同温度时的水、空气的粘度数值。

三、理想流体的概念

理想流体是流体力学中的一个重要假设模型。假定不存在粘性，即其粘度 $\mu=\nu=0$ 的流体为理想流体或无粘性流体。这种流体在运动时不仅内部不存在摩擦力而且在它与固体接触的边界上也不存在摩擦力。理想流体虽然事实上并不存在，但这种理论模型却有重大的理论和实际价值。因为有些问题（例如边界层以外的流动区域）粘性并不起重大作用，忽略粘性可以容易地分析其力学关系，所得结果与实际并无太大出入。有些问题虽然流体粘性不可忽视，但作为由浅入深的一种手段，我们也可以先讨论理想流

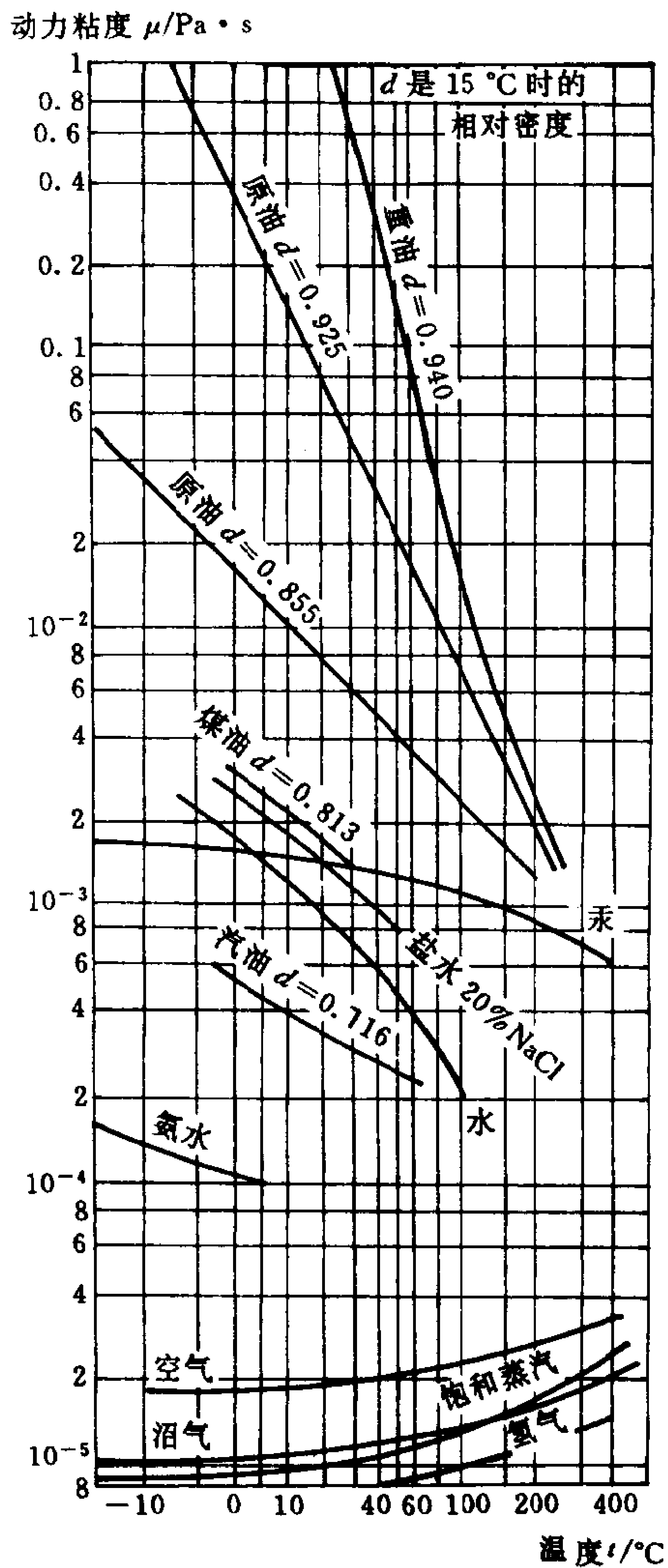


图 1－11　流体的动力粘度曲线

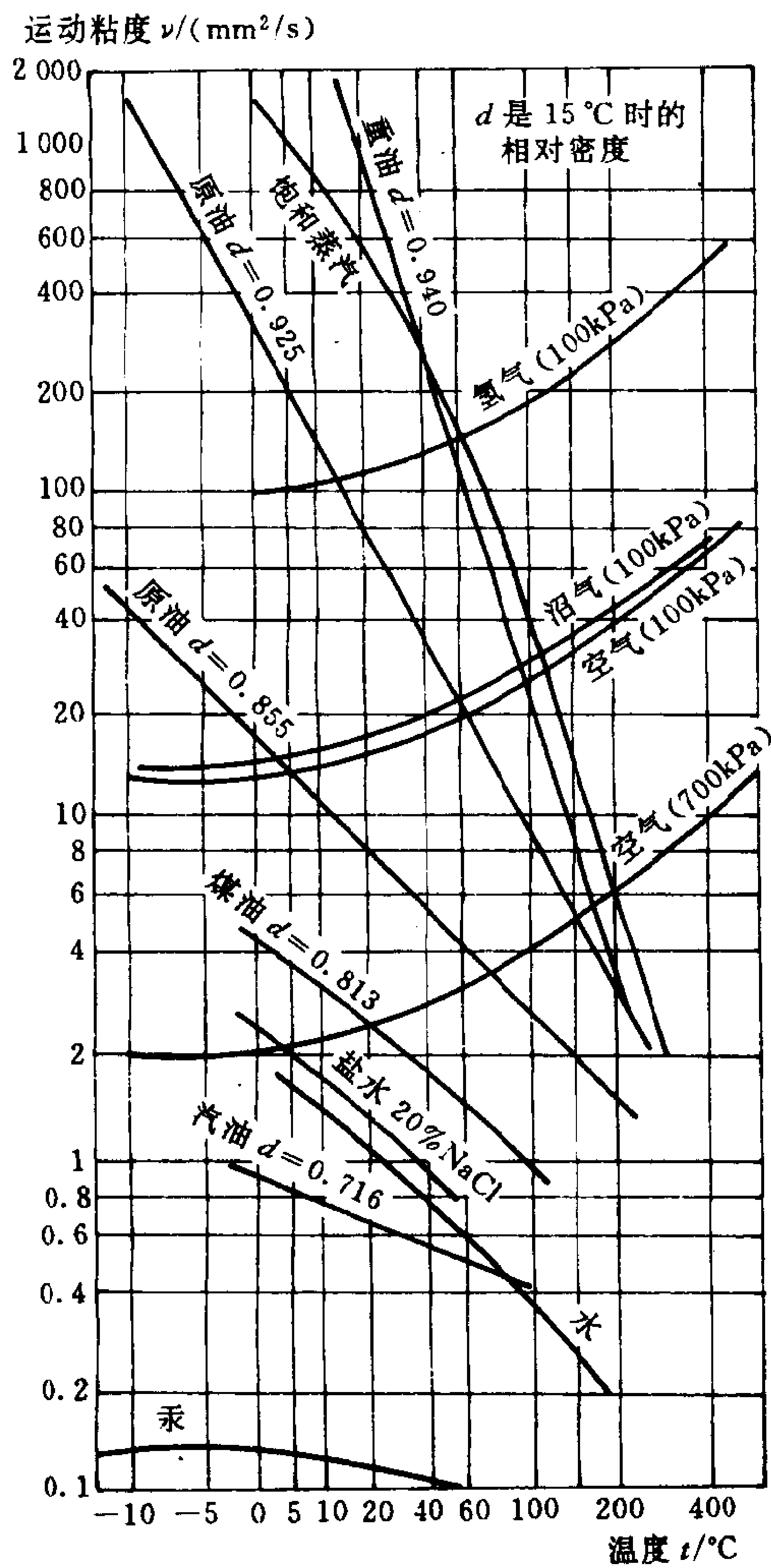


图 1-12　流体的运动粘度曲线

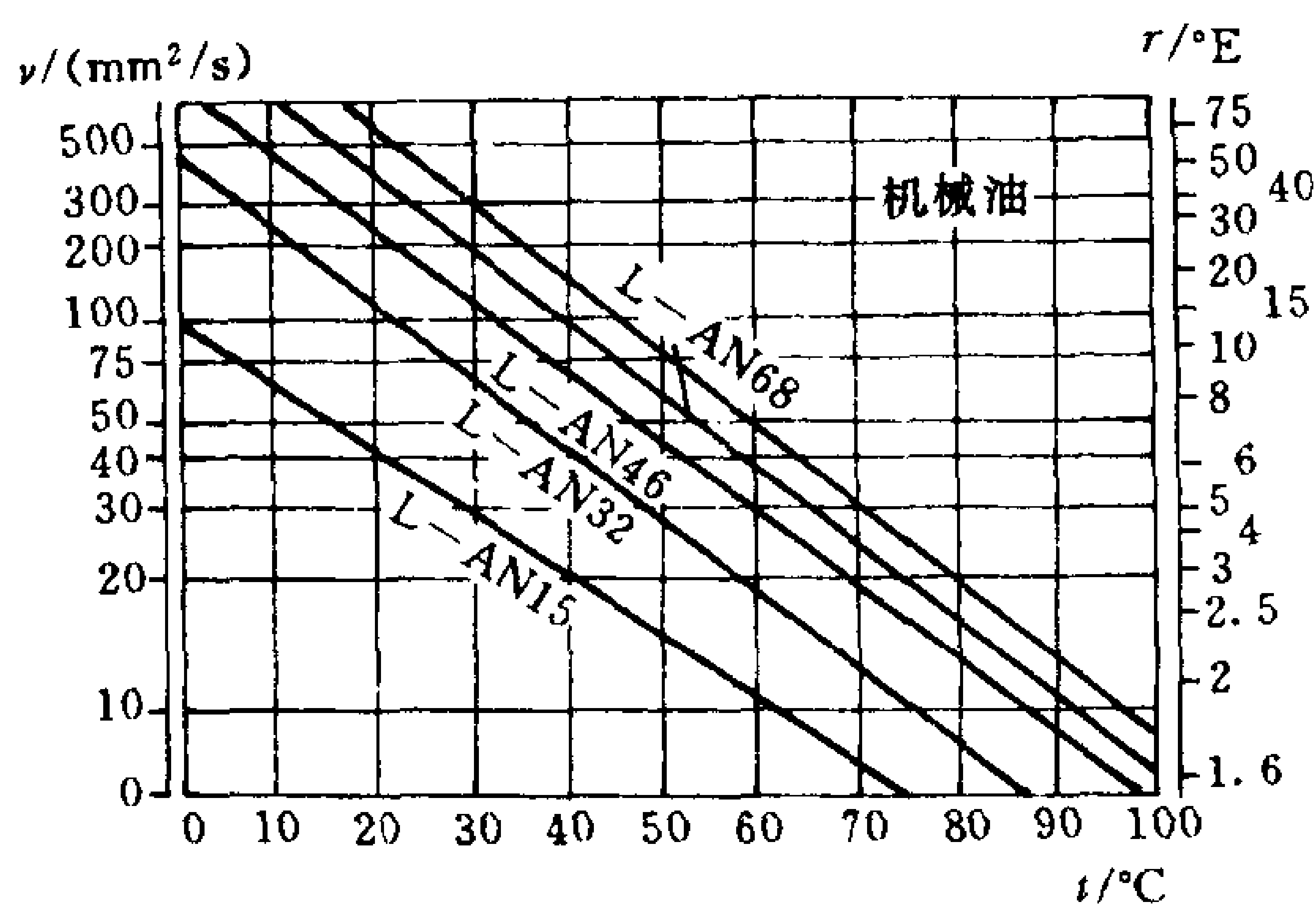


图 1-13　几种机械油的粘度曲线

表 1-6　水与空气的粘度数值

温　度	水		空　气	
t / °C	μ / Pa·s	ν / (m²/s)	μ / Pa·s	ν / (m²/s)
0	1.792×10^{-3}	1.792×10^{-6}	0.0172×10^{-3}	13.7×10^{-6}
10	1.308×10^{-3}	1.308×10^{-6}	0.0178×10^{-3}	14.7×10^{-6}
20	1.005×10^{-3}	1.007×10^{-6}	0.0183×10^{-3}	15.7×10^{-6}
30	0.801×10^{-3}	0.804×10^{-6}	0.0187×10^{-3}	16.6×10^{-6}
40	0.656×10^{-3}	0.661×10^{-6}	0.0192×10^{-3}	17.6×10^{-6}
50	0.549×10^{-3}	0.556×10^{-6}	0.0196×10^{-3}	18.6×10^{-6}
60	0.469×10^{-3}	0.477×10^{-6}	0.0201×10^{-3}	19.6×10^{-6}
70	0.406×10^{-3}	0.415×10^{-6}	0.0204×10^{-3}	20.6×10^{-6}
80	0.357×10^{-3}	0.367×10^{-6}	0.0210×10^{-3}	21.7×10^{-6}
90	0.317×10^{-3}	0.328×10^{-6}	0.0216×10^{-3}	22.9×10^{-6}
100	0.284×10^{-3}	0.296×10^{-6}	0.0218×10^{-3}	23.6×10^{-6}

体的运动规律，然后再考虑有粘性影响时的修正方法，这样问题就容易解决。因为粘性影响非常复杂，研究流体运动，如果将实际因素通盘考虑在内，则问题有时难以解决。理想流体的运动则简单

得多,所得结果虽然与实际有很大差别,但作为定性分析仍然有可供参考之处。

理想流体运动学和动力学立论严谨,范围广泛,这些理论对于分析实际问题都有重大作用,不可因为没有理想流体而忽视理想流体理论的重要性,这种思想对于学过理论力学熟知刚体概念的同学来说是不难理解的。理想流体也是类似于刚体这样一种科学抽象的概念。

四、应用举例

利用牛顿内摩擦定律计算流体的粘性摩擦力,一般需要知道液流的速度分布规律,不过对机械工程中常见的缝隙流动来说,即使暂时不知道准确速度分布规律,只要缝隙尺寸较小,不论任何曲线总可以近似地看成是直线,于是可以用平均的速度梯度近似地代表液流与固体接触表面处的速度梯度。这样计算的切应力与表面摩擦力虽然不完全准确,但是因为缝隙尺寸相对较小,一般也不会产生太大的误差。在通常工程所允许的精度范围内,用这种近似计算也是很可靠的。只有精度要求较高时,才需要寻求其准确解(以后在第七章中再详细介绍)。

下面先分别讨论三种缝隙流动的解法,然后再通过实例进行计算。

1. 同心环形缝隙中的直线运动

如图 1－14,直径为 d、长度为 l 的柱塞在缸筒中以匀速 v_0 作直线运动,由于粘性,带动同心环形缝隙中的动力粘度为 μ 的液体也作直线运动。假定缝隙 $\delta \ll d$,则缝隙中液流的速度分布规律 $v=v(r)$ 近似为直线关系,于是

速度梯度为 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}=-\dfrac{v_0}{\delta}$

切应力为 $\tau=\mu\dfrac{v_0}{\delta}$

摩擦面积为 $A=\pi l d$

流体对柱塞的摩擦力为

$$F=\tau A=\frac{\pi\mu v_0 ld}{\delta} \tag{1-39}$$

柱塞克服摩擦所需要的功率为

$$P=Fv_0=\frac{\pi\mu {v_0}^2 ld}{\delta} \tag{1-40}$$

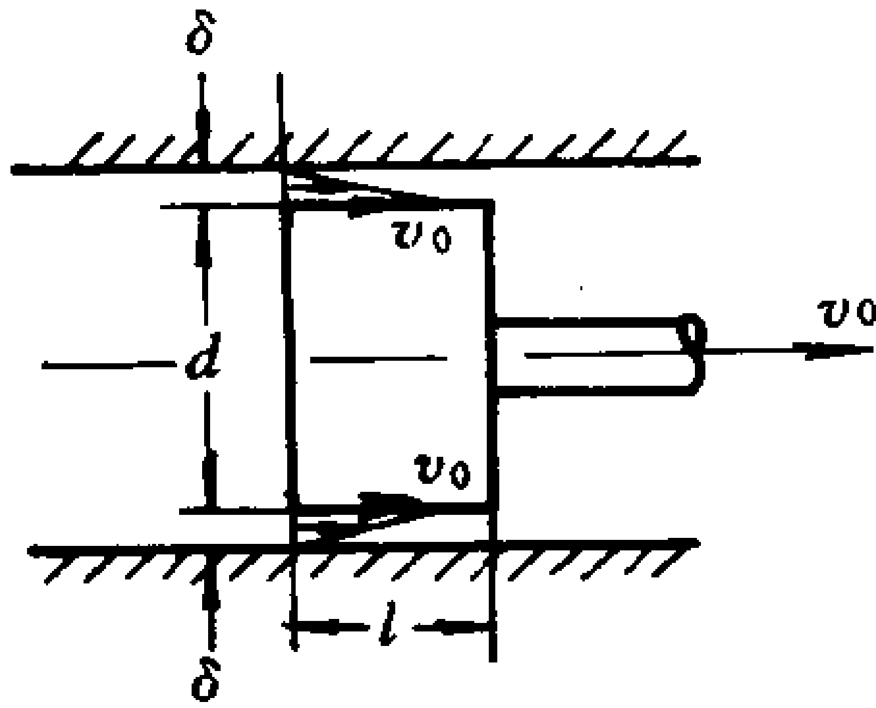


图 1-14 同心环形缝隙中的直线运动

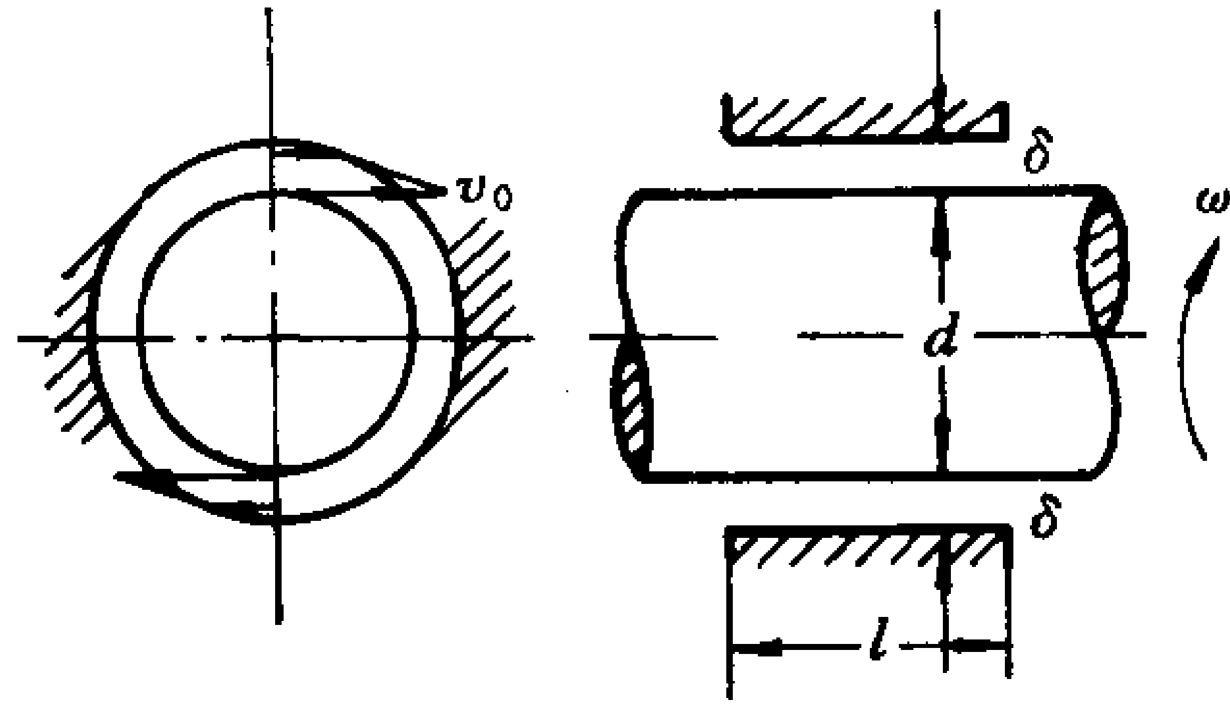


图 1-15 同心环形缝隙中的回转运动

2. 同心环形缝隙中的回转运动

如图 1-15，直径为 d 的轴在与其接触长度为 l 的轴承内以转速 n r/min 或角速度 $\omega=\frac{\pi n}{30}$ rad/s 作回转运动，带动同心环形缝隙中的液流也作回转运动。同心缝隙 $\delta \ll d$，速度分布 $v=v(r)$ 假定近似为直线规律。

因为轴表面处的直线速度为 $v_0=\omega\frac{d}{2}$，故在轴的表面处

速度梯度为 $\frac{dv}{dr}=-\frac{v_0}{\delta}=-\frac{\omega d}{2\delta}$

切应力为 $\tau=\frac{\mu\omega d}{2\delta}$

摩擦表面为 $A=\pi ld$

流体作用在轴表面上的摩擦力为

$$F=\tau A=\frac{\pi\mu ld^2\omega}{2\delta} \tag{1-41}$$

流体作用在轴上的摩擦力矩为

$$T = F\frac{d}{2} = \frac{\pi\mu l d^3\omega}{4\delta} \tag{1-42}$$

轴克服摩擦所需的功率为

$$P = T\omega = Fv_0 = \frac{\pi\mu l d^3\omega^2}{4\delta} \tag{1-43}$$

3. 圆盘缝隙中的回转运动

如图1－16，直径为 d 的上圆盘(或轴的端面)以转速 n 或角速度 $\omega = \frac{\pi n}{30}$ 回转，带动充于上下两平行圆盘缝隙 δ 之间各层液体

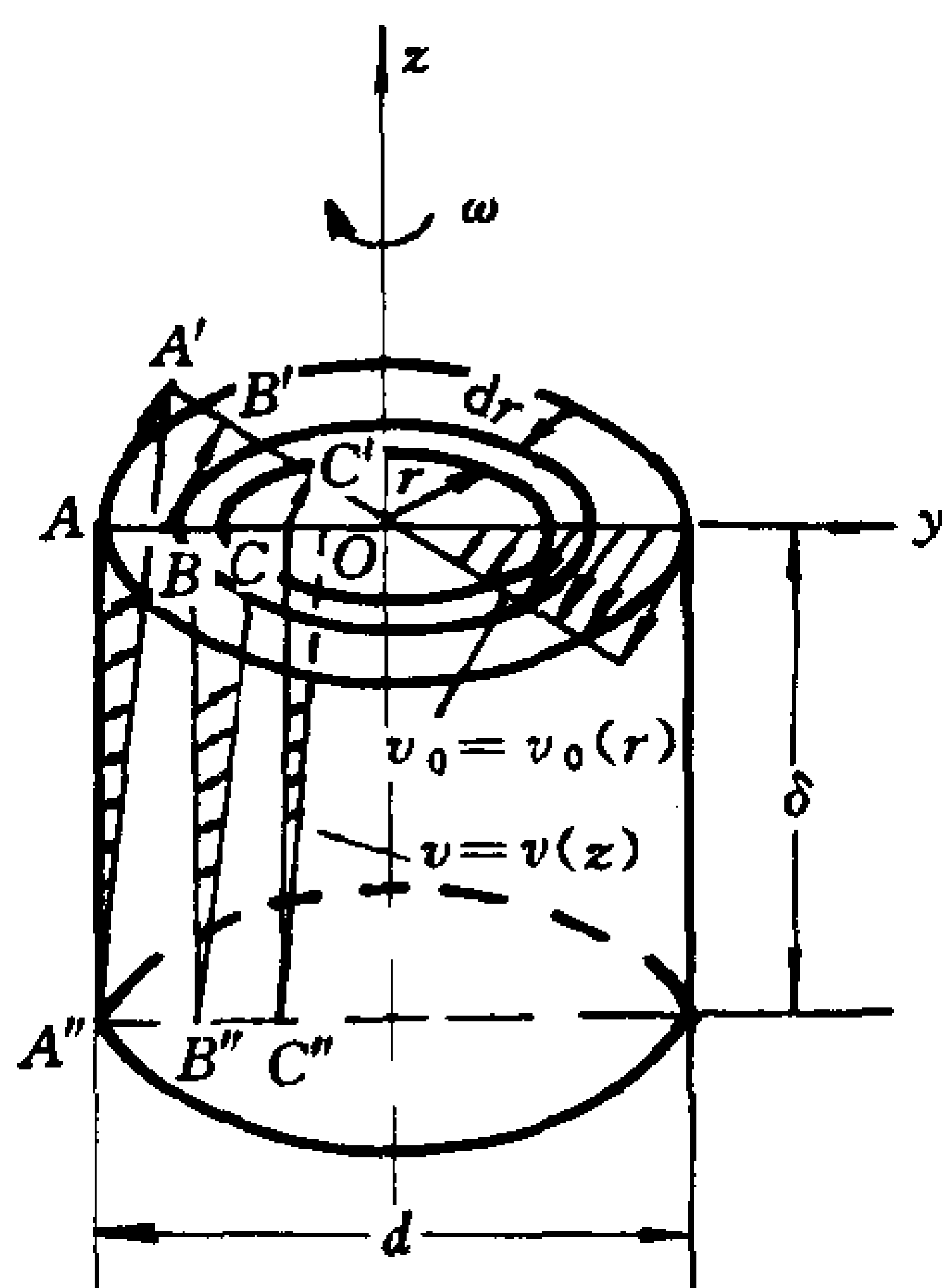


图1－16　圆盘缝隙中的回转运动

也作平面回转运动。下圆盘(或端面轴承)固定，与其接触的液层速度全为零，与上圆盘接触的液层随盘一起同步回转。

因为上圆盘的圆周速度 $v_0 = \omega r$，所以不同半径 r 处的 A、B、C 各点的圆周速度分别用同一平面上的矢量 $\overrightarrow{AA'}$、$\overrightarrow{BB'}$、$\overrightarrow{CC'}$ 表示，上圆盘表面处的这一层液流又逐渐带动缝隙中下面各层液流，沿缝隙高度方向，下面液层的速度越来越小，直到下盘表面处速度为零。因为缝隙很小，$\delta \ll d$，各层液流的速度分布 $v = v(z)$ 可近似假定为直线规律，缝隙中各层液流的速度分布如图中的 $AA'A''$、$BB'B''$、$CC'C''$ 所示。

设任意点 B 的半径为 r,沿缝隙高度 $BB''(=\delta)$观察,可知速度梯度为

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}=\frac{v_0}{\delta}=\frac{\omega r}{\delta}$$

上盘下表面处的切应力为

$$\tau=\frac{\mu\omega r}{\delta}$$

在上盘下表面 B 点邻域取宽度为 $\mathrm{d}r$ 的圆环形状的微元表面,则

微元摩擦面积为

$$\mathrm{d}A=2\pi r\mathrm{d}r$$

液体对微元表面的摩擦力为

$$\mathrm{d}F=\tau\mathrm{d}A=\frac{2\pi\mu\omega}{\delta}r^2\mathrm{d}r$$

液体对微元表面的摩擦力矩为

$$\mathrm{d}T=\mathrm{d}F\cdot r=\frac{2\pi\mu\omega}{\delta}r^3\mathrm{d}r$$

液体对上圆盘的总摩擦力矩

$$T=\int_0^{\frac{d}{2}}\frac{2\pi\mu\omega}{\delta}r^3\mathrm{d}r=\frac{\pi\mu d^4\omega}{32\delta} \tag{1-44}$$

上盘克服摩擦所需要的功率为

$$P=T\omega=\frac{\pi\mu d^4\omega^2}{32\delta} \tag{1-45}$$

缝隙流动在机械中的应用很广泛,除了上面谈到的柱塞在油缸中的运动、同心滑动轴承、端面轴承之外,在各种形式的阻尼器、减震器中,在液体摩擦盘、测功计中,在转筒式粘度计等仪器设备中都有这种缝隙流动问题,这里只列举了其摩擦力、力矩、功率的计算公式,缝隙流动的其他方面的问题将在第七章中全面介绍。

[**例题 1-2**]　如图 1-17,长 $l=10$ cm、直径 $d=8$ cm 的柱塞在缸筒中作往复运动,在柱塞与缸筒的同心环形间隙 $\delta=0.5$ mm 中充满动力粘度

$\mu=0.09$ Pa·s 的油液。柱塞位移的简谐运动规律为

$$x = a\sin(\omega t)$$

柱塞最大行程 $a=20$ cm,柱塞往复频率 n 为每分钟 360 次。忽略柱塞惯性力,试求柱塞克服液体摩擦所需要的平均功率。

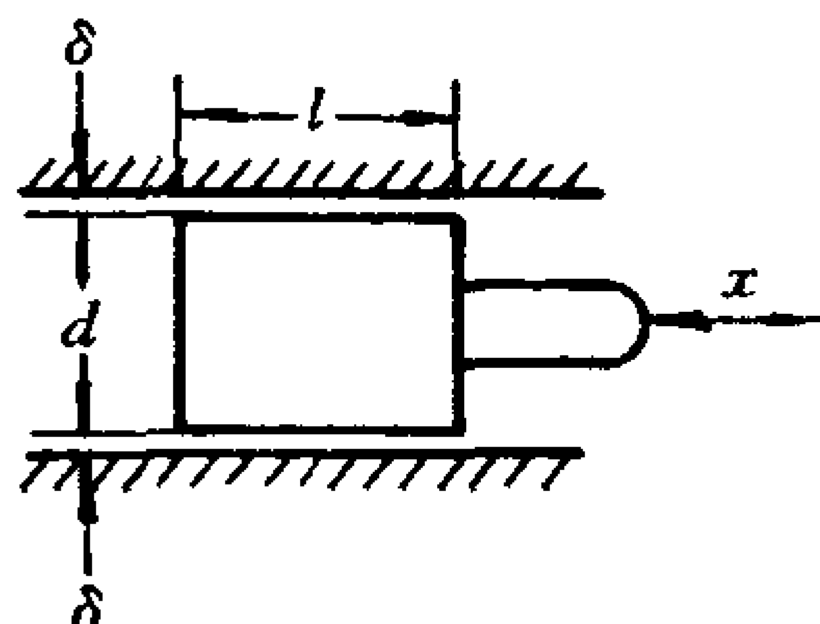


图 1-17　柱塞的往复运动

[解]　这是一个同心环形缝隙中的直线运动问题,与前面不同的是柱塞运动速度

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=a\omega\cos(\omega t)$$

不是常量而是一个周期性的变量,变量 $\omega t=\theta$ 的周期为 2π,根据题给的直线往复频率 n 可求出简谐运动的圆频率为

$$\omega=\frac{2\pi n}{60}=\frac{\pi n}{30}=12\pi \text{ rad/s}$$

用瞬时速度 v 可求出下面三个瞬时值的表达式

柱塞表面上的切应力

$$\tau=\mu\frac{v}{\delta}=\frac{\mu a\omega}{\delta}\cos(\omega t)$$

柱塞表面上的摩擦力

$$F=\tau\pi ld=\frac{\pi ld\mu a\omega}{\delta}\cos(\omega t)$$

柱塞的摩擦功率

$$P_{\mathrm{f}}=Fv=\frac{\pi ld\mu a^2\omega^2}{\delta}\cos^2(\omega t)$$

要想求柱塞克服摩擦所需要的平均功率 P,则应对瞬时功率 P_{f} 积分求和并除以周期。由于 $\omega t=\theta$,于是

$$P=\frac{\int_0^{2\pi}P_{\mathrm{f}}\mathrm{d}\theta}{2\pi}=\frac{\pi ld\mu a^2\omega^2}{2\pi\delta}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\pi ld\mu a^2\omega^2}{2\delta}$$

$$=\frac{\pi\times0.1\times0.08\times0.09\times0.2^{2}\times144\times\pi^{2}}{2\times0.000\,5}=129\ \mathrm{W}$$

[**例题 1-3**] 图 1-18 为转筒式粘度计示意图，在两个同心圆筒之间充满待测液体，外筒匀速旋转，带动缝隙中的液体，并给内筒一个摩擦力矩。为保持内筒不动，通过连接在内筒外表面上的钢丝滑轮砝码组施加一个平衡力矩。

已知内筒外直径 $d=70$ mm，外筒内直径 $D=72$ mm，同心环形缝隙与端面缝隙尺寸相等，内筒在液体中的深度 $l=15$ cm，外筒转速 $n=36$ r/min。对

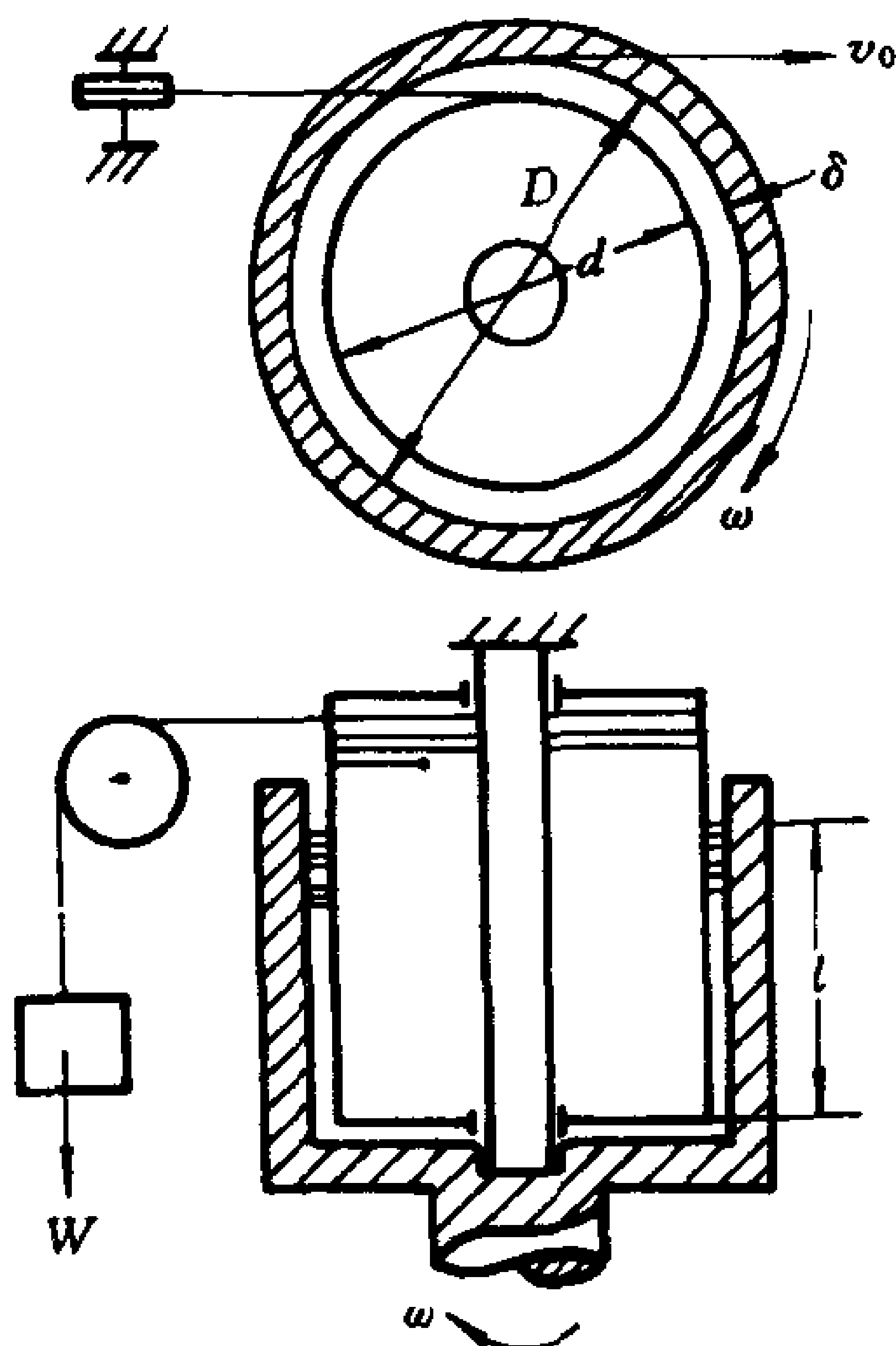


图 1-18 转筒式粘度计

三种液体（重油、原油、轻油）分别测得其平衡砝码重力为 $W=1$ N，0.1 N 及 0.01 N。试求这三种液体的动力粘度。

[**解**] 这是包括同心环形缝隙及圆盘缝隙在内的一个回转运动的问题。

缝隙 $\delta=\frac{D-d}{2}=1\ \mathrm{mm}\ll d$。

环形缝隙是外筒旋转、内筒固定，因而在外筒处液体圆周速度 $v_0=\omega\frac{D}{2}$，内筒处液体圆周速度为零。

环形缝隙中的速度梯度

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}=\frac{v_0}{\delta}=\frac{D\omega}{2\delta}$$

液体中的切应力

$$\tau=\mu\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}=\frac{\mu D\omega}{2\delta}$$

液体作用在内筒表面上的摩擦力

$$F=\tau\pi dl=\frac{\pi\mu Ddl\omega}{2\delta}$$

液体作用在内筒圆周表面上的摩擦力矩

$$T_1=\frac{\pi\mu Dd^2 l\omega}{4\delta}$$

端面缝隙与前面圆盘缝隙的情况基本相同,因而由(1－44)式可得液体作用在内筒端面上的摩擦力矩为

$$T_2=\frac{\pi\mu d^4\omega}{32\delta}$$

砝码对内筒的平衡力矩为 $T=W\dfrac{d}{2}$

根据内筒的力矩平衡条件 $T=T_1+T_2$ 可得

$$W\frac{d}{2}=\frac{\pi\mu Dd^2 l\omega}{4\delta}+\frac{\pi\mu d^4\omega}{32\delta}$$

由此解出

$$\mu=\frac{16\delta W}{\pi d\omega(8Dl+d^2)}=CW$$

式中 $C=\dfrac{16\delta}{\pi d\omega(8Dl+d^2)}$称为仪器常数,用已知数据:$\delta=0.001$ m,$d=0.07$ m,$D=0.072$ m,$l=0.15$ m 及 $\omega=\dfrac{\pi n}{30}=3.77$ rad/s 代入可得 $C=0.21\mathrm{s/m^2}$。则

$$\mu=0.21W$$

分别以 $W=1$ N、0.1 N、0.01 N 代入即得

$$\left.\begin{array}{lll}\text{重油的动力粘度} & \mu=0.21 & \mathrm{Pa\cdot s}\\ \text{原油的动力粘度} & \mu=0.021 & \mathrm{Pa\cdot s}\\ \text{轻油的动力粘度} & \mu=0.0021 & \mathrm{Pa\cdot s}\end{array}\right\}$$

* §1-6　液体的表面张力与汽化压强

一、液体表面张力概念

按分子引力理论,分子间的引力与其距离平方成反比,超过一定距离 R(约为 10^{-7} mm),引力甚小,可略去不计,以 R 为半径的空间球域叫作分子作用球。

液体内部每个分子(如图 1-19 中的 a、b)受分子作用球内同种分子的作用完全处于平衡状态;但在与空气相接触的液体表面部分,在液面下距离小于 R 的薄层内的分子(如 c、d),其分子作用球内有液体和空气两种分子,液体分子力大于气体分子力,故处在此层内的分子会受到一个不平衡的分子合力 $\boldsymbol{F}_N$。此力垂直于液面而指向液体内部,在这个不平衡的分子合力作用下,薄层内的

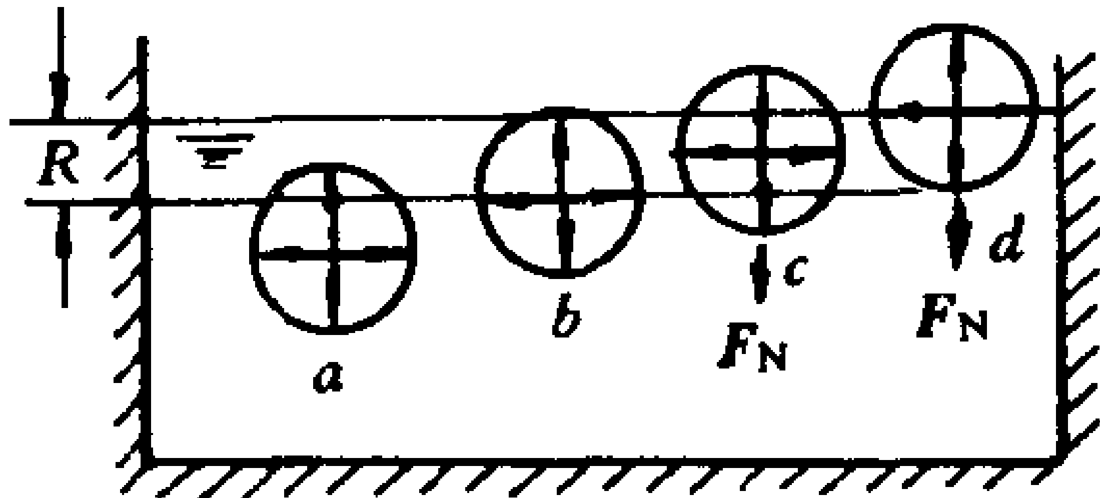


图 1-19　液体的分子作用球

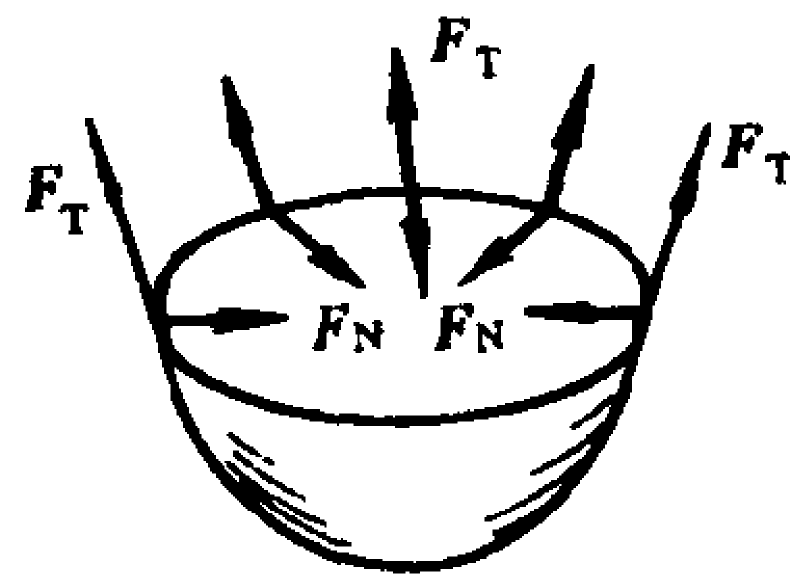


图 1-20　液体的表面张力

分子都力图向液体内部收缩。假如没有容器的限制,忽略重力的影响,微小液滴都会收缩成最小表面积的球形,表面上的薄层犹如蒙在液滴上的弹性薄膜一样,紧紧向球心收拢,使得球中液体的分子运动不容易越出其表面界限。

如果将液滴剖开,取下部球台为分离体,如图 1-20,由于球表面向球心收拢,故在球台剖面周线上必有张力 $\boldsymbol{F}_T$ 存在,它连续均匀分布在周线上,方向与液体的球形表面相切。这种力叫作液体的表面张力。表面张力的起因是液体表面层中存在着不平衡的分子合力 $\boldsymbol{F}_N$,但表面张力 $\boldsymbol{F}_T$ 并不就是这个分子合力 $\boldsymbol{F}_N$,它们是

互相垂直的，F_N 指向液球中心，F_T 分布在液球切开的周线上，并且与液球表面相切。

单位长度上的表面张力一般用 σ 表示，它表示表面周线单位长度上的表面张力值，σ 的单位是 N/m。如果分布有表面张力的周线长为 l，则表面张力 $F_T=\sigma l$。常见液体的表面张力 σ 可以从表 1－1 中查到。

二、毛细管现象

表面张力不仅表现在液体与空气接触表面处，而且也表现在液体与固体接触的自由液面处。如图 1－21(1)表示水与玻璃接触的情况，O 点的分子作用球内有玻璃、水和空气的分子，玻璃对 O 点的分子引力（也叫附着力）n_1 大于水对 O 点的分子引力（也

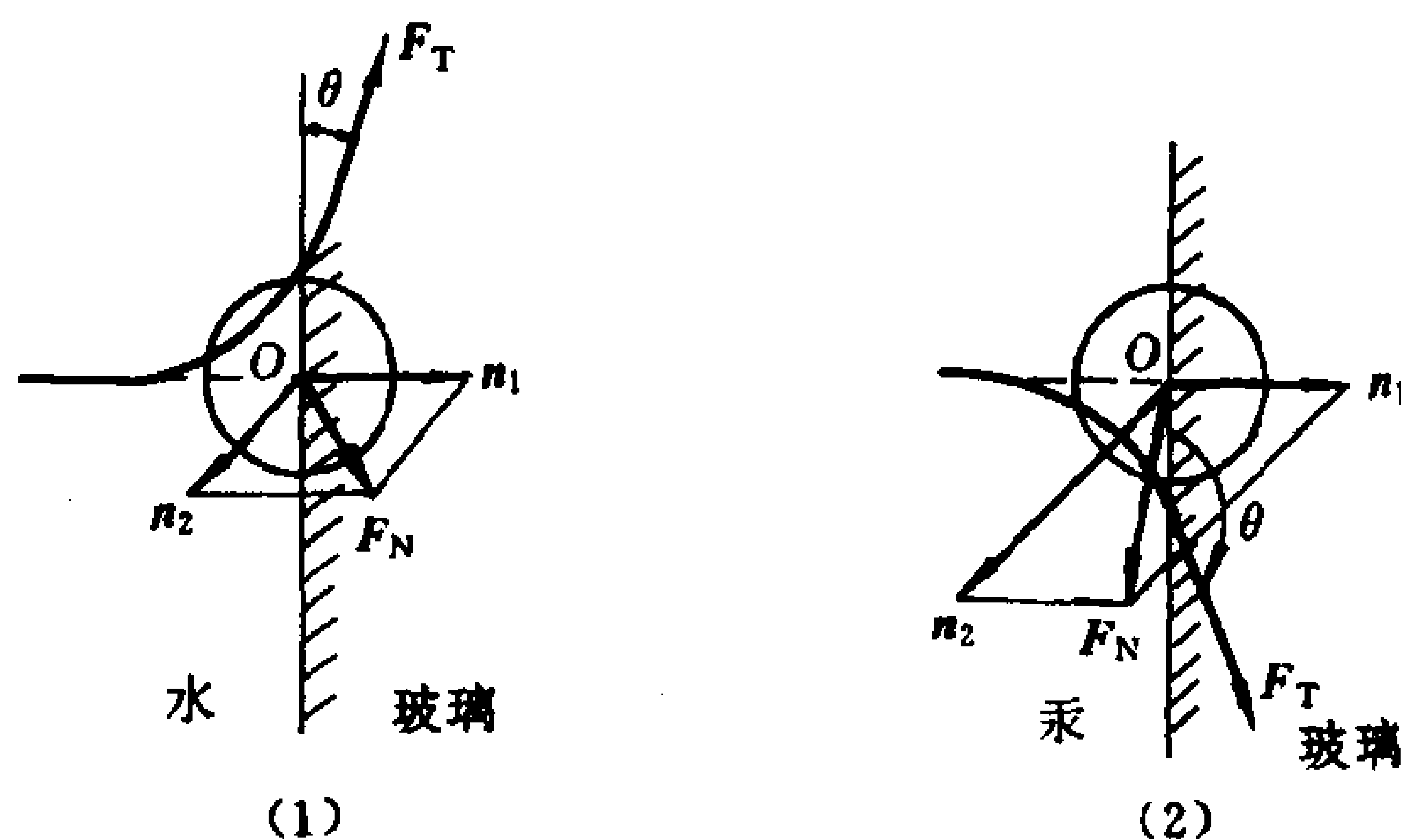


图 1－21　液体与固体接触处的分子力与表面张力

叫内聚力）n_2，空气分子引力甚小，可忽略。于是分子作用球内对 O 点的不平衡分子合力 F_N 必然朝右下方，指向玻璃内部，液面与 F_N 的方向垂直，因而必然向上凹。周线上的表面张力 F_T 与弯液面相切，指向右上方，F_T 与管壁的夹角 θ 称为接触角，此时 $\theta<\frac{\pi}{2}$，这种情况也叫作流体湿润管壁。

图 1－21(2)表示汞与玻璃接触的情况，因为汞对 O 点的内聚力 n_2 大于玻璃对 O 点的附着力 n_1，不平衡的分子合力 F_N 朝

左下方指向汞内部，液面与 $\boldsymbol{F}_N$ 垂直而向下凹，表面张力 $\boldsymbol{F}_T$ 指向右下方，$\boldsymbol{F}_T$ 与管壁的接触角 $\theta>\frac{\pi}{2}$，这种情况也叫作液体不湿润管壁。

表面张力的数值并不大，对一般的工程流体力学问题无甚影响，但是当内径较小的管子插在液体中时，由于表面张力会使管中的液体自动上升或下降一个高度，这种所谓的毛细管现象，是使用液位计、单管式测压计等常用仪器时所必须注意的。

如图 1－22 所示，细玻璃管插入水中时，由于表面张力向上，能自动将管中液柱提升一个高度 h；细玻璃管插入汞中时，表面张力向下，能将管中液柱拉下一个高度 h。这样在用玻璃管作为仪器时就会产生误差，为了消除这种误差，有必要计算一下毛细管现象中的上升或下降高度。

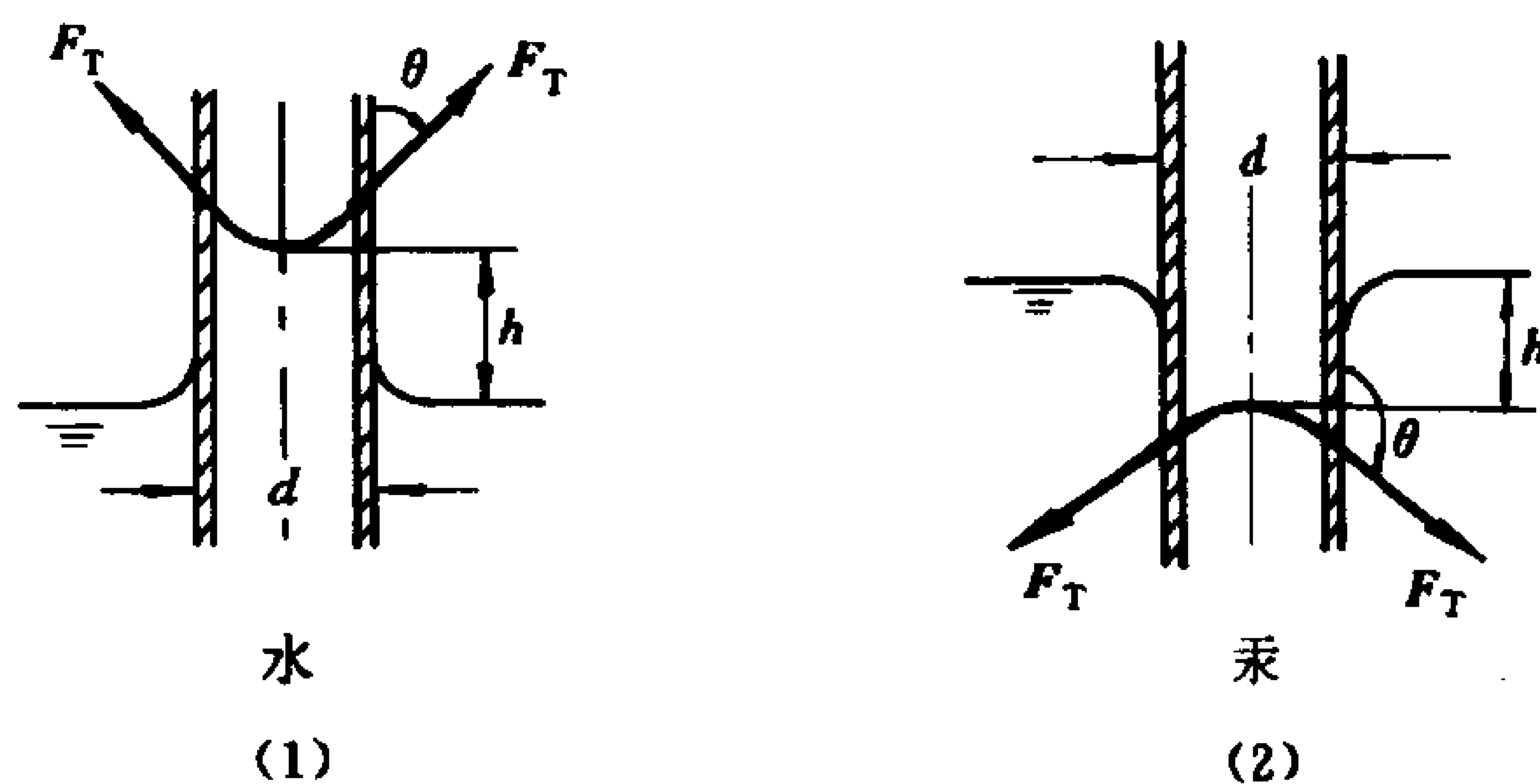


图 1－22　毛细管现象

以图 1－22(1)为例，当表面张力与上升液柱重力相等时，液柱自然平衡。此时有

$$\pi d\sigma\cos\theta=\rho g\frac{\pi}{4}d^2h$$

$$h=\frac{4\sigma\cos\theta}{\rho g d} \tag{1-46}$$

根据实验，20 ℃时，水与玻璃的接触角 $\theta=0°$，汞与玻璃的接触角 $\theta=140°$，再由表 1－1 查出 20 ℃时水的表面张力 $\sigma=0.073$ N/m，水的

密度为 $\rho=1\ 000\ \mathrm{kg/m^3}$，汞的表面张力 $\sigma=0.51\ \mathrm{N/m}$，汞的密度 $\rho=13\ 600\ \mathrm{kg/m^3}$，分别代入(1-46)式中可得：

水在玻璃管中的上升高度

$$h=\frac{30}{d}\ \mathrm{mm} \tag{1-47}$$

汞在玻璃管中的下降高度

$$h=\frac{10}{d}\ \mathrm{mm} \tag{1-48}$$

式中小管内径 d 均以 mm 计。

由上列公式可见玻璃管内径 d 越小，则毛细管现象引起的误差就越大。

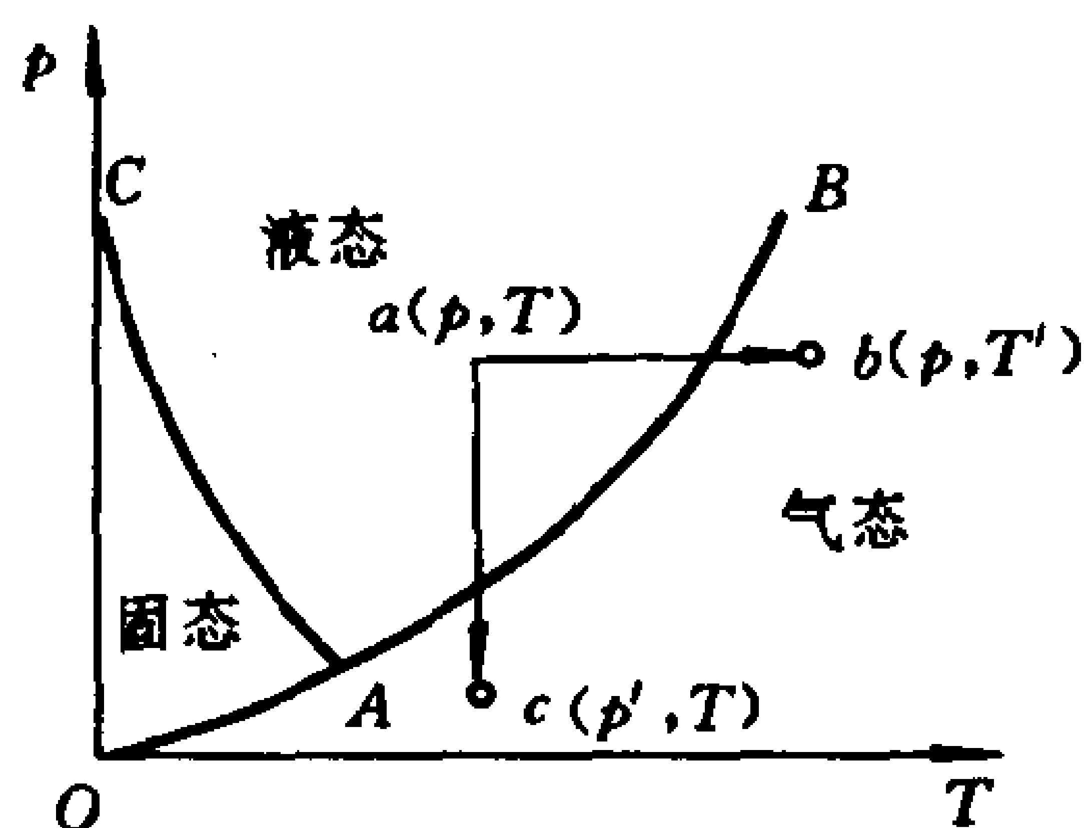


图 1-23　三态界限

三、液体的汽化压强

这是与液体表面张力有关的另一个有实际意义的概念。

固体、液体、气体是物质的三种普通形态，在不同温度、压强之下它们也可以互相转化。图 1-23 是纯净物质的三态界限示意图，一组确定的(p、T)在图中用一点表示，OAB 与 AC 线划分出固、液、气三态范围。如果 p、T 变化，则坐标点发生移动，一旦越过区域界限，则物态即发生转化。

流体力学上最常见的是液态向气态的转化。这种转化有两种途径：当压强 p 不变，而 T 增加到 T' 时，沿 ab 直线方向越过 AB 界限，这种现象叫作沸腾；或者当温度 T 不变，而 p 降低到 p' 时，

沿 ac 直线方向越过 AB 界限，这种现象叫作汽化。

沸腾的物理原因是，温度升高后分子动能加大，克服液体表面张力束缚从而由液体变成气体逸出液体表面。汽化的物理原因是，压强降低后减弱了分子间的引力，减弱了液体的表面张力，即使液体分子动能并未加大也同样可以挣脱表面张力的束缚。这两种途径实质上是殊途同归。

AB 界限上各点的温度和压强用 T_v、p_v 表示。T_v 称为沸点，它随着压强降低而降低；p_v 称为汽化压强，汽化压强也随着温度降低而降低。不同物质由于表面张力不同，因而在同样温度下有不同的汽化压强，表 1－1 中列出常见液体在 20 ℃ 时的汽化压强 p_v 的数值（这里的汽化压强是绝对压强，沸点温度是 t_v 摄氏度）。

水在不同温度的汽化压强 p_v 与不同压强下的沸点温度 t_v 的对应关系列于表 1－7 中。

表 1－7　水的汽化压强（绝对）与沸点温度对应表

温　度 t / ℃	100	80	60	40	20	10	0	沸点温度 t_v/ ℃
汽化压强 p_v/ Pa	101 300	47 400	20 000	7 400	2 340	1 230	615	压强 p / Pa

在汽化器、喷雾器、燃烧室中，液体汽化需要进行得均匀而且充分，应该创造条件促进汽化。但在液体机械的高速低压区域中有时自发产生汽化现象，对机械性能却有很大危害，这时汽化成为一种非常不利的因素。

在液体机械的低压入口处、在液压传动的小孔节流处、在文德利流量计的喉部等等场所自发产生的液体汽化常被称为气穴，气穴发展，往往又产生一种更为有害的气蚀现象，轻则阻塞流道降低机械性能；重则造成振动、噪音，甚至使机件产生机械性或化学性的损坏。这是水泵、油泵、水轮机、船舶、水工结构、液压传动中必须设法避免和消除的有害现象。

习　　题

1-1. 几种流体的相对密度、密度、比体积的已知值如下表所示，试填写表中空白各项数值(取三位有效数字)。

流　　体	相对密度 d	密度 ρ / (kg / m^3)	比体积 v / (m^3/ kg)
20 ℃的润滑油	0.880		
20 ℃的液压油		860	
15 ℃的水	0.999		
15 ℃的空气			0.813
燃气轮机燃气			
柴油机废气			0.557
火箭发动机燃料	1.31		
航空汽油		650	
1 200 ℃的熔化生铁			

1-2. 整桶机油质量 300 kg，油桶直径 0.6m，高 1.2m，试求机器油的密度。

[答：$\rho = 844$ kg/m^3]

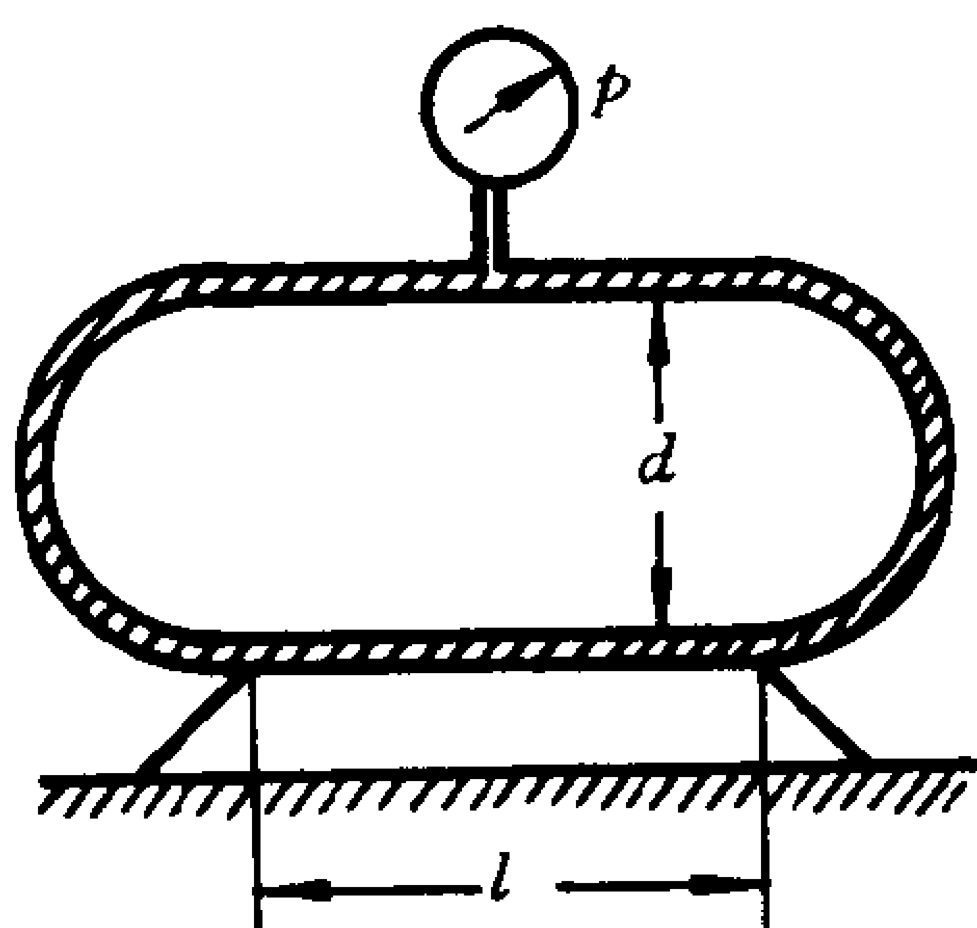
1-3. 动力车间贮气罐中压缩空气的绝对压强 $p = 10.8 \times 10^5$ Pa，温度 $t = 30$ ℃，贮气罐由中间圆筒及两个半球端部组成。

已知 $l = 3$ m，$d = 2$ m，压缩空气的气体常数 $R_g = 287$ J / (kg·K)，试求压缩空气的比体积、密度及罐中压缩空气的质量。

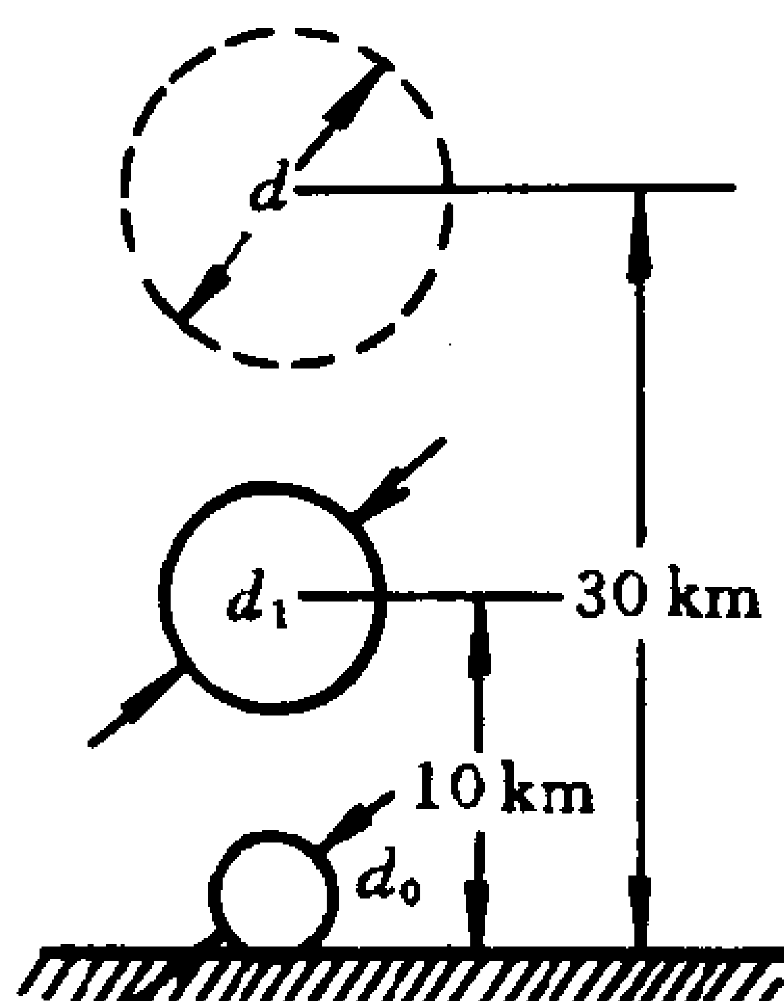
[答：$v = 0.08$ m^3/ kg，$\rho = 12.5$ kg / m^3，m = 170 kg]

1-4. 地面、10 km、30 km 米高空处的绝对压强、温度如下：

高程 / km	绝对压强 / kPa	温度 / ℃
0	$p_0 = 101.3$	$t_0 = 20$
10	$p_1 = 26.5$	$t_1 = -50$
30	$p_3 = 1.1$	$t_3 = -40$



题 1－3 图



题 1－4 图

(1) 为了使充满氢气的探测气球在 10 km 高空处膨胀为直径 $d_1=20$ m 的可观尺寸，试问在地面上应充入多少体积、多少质量的氢气？充入氢气后在地面上气球的直径 d_0 多大？

(2) 忽略气球的荷重，认为只要球内氢气密度小于外界环境中的空气密度，气球便会上升，试检查上述三处是否符合气球上升条件？

(3) 如果气球爆炸的极限直径 $d=50$ m，试问气球能否在 30 km 米的高空处存在？

[答：(1) $V_0=1\ 440\ \text{m}^3$，$m=120.8$ kg，$d_0=14$ m；

(2) 符合；

(3) $d_3=58.6$ m，不存在]

1－5. 在容积为 1.77 m^3 的气瓶中，原来存在有一定量的 CO，其绝对压强为 103.4 kPa，温度为 21 ℃。后来又用气泵输入 1.36 kg 的 CO，测得输入后的温度为 24 ℃，试求输入后的绝对压强是多少？

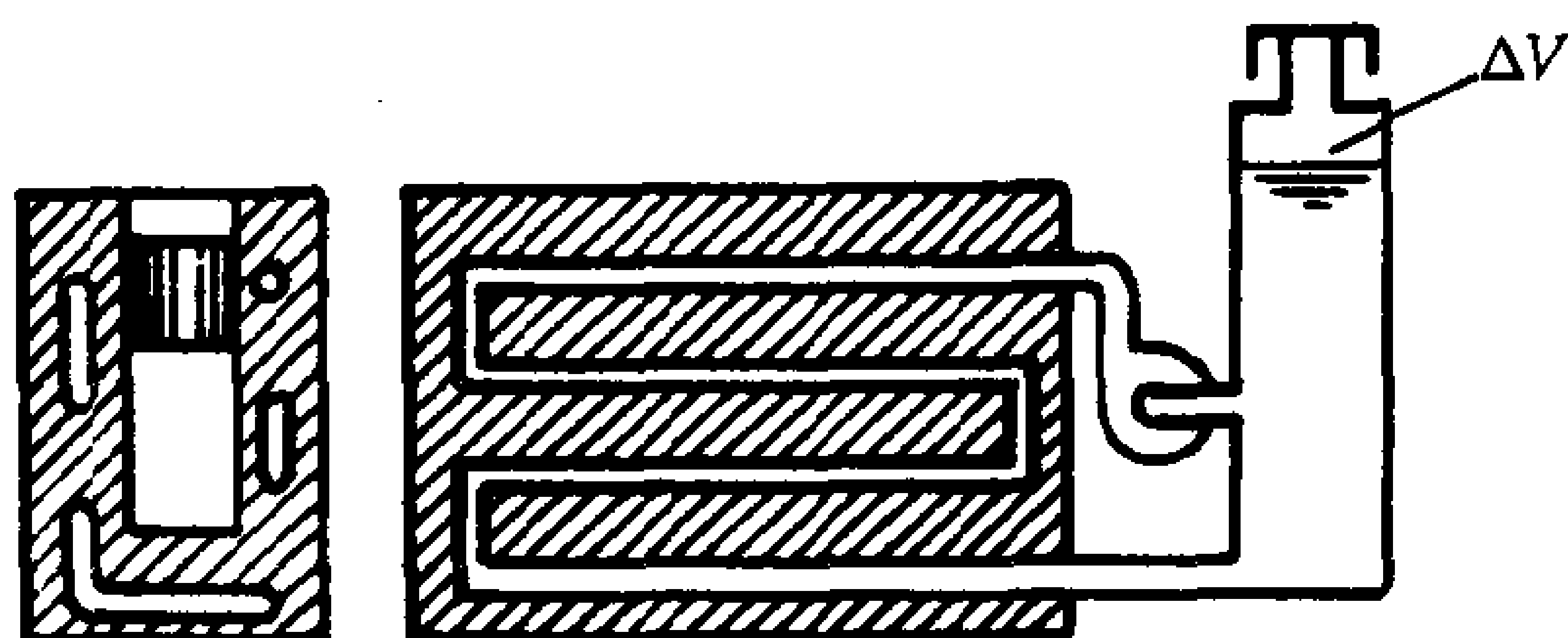
[答：$p_2=172$ kPa]

1－6. 发动机冷却水系统的总容量(包括水箱、水泵、管道、气缸水套等)为 200 L。20 ℃的冷却水经过发动机后变为 80 ℃，假如没有风扇降温，试问水箱上部需要空出多大容积才能保证水不外溢？

已知水的体[膨]胀系数的平均值为

$$\alpha_V=5\times10^{-4}\ ℃^{-1}$$

[答：$\Delta V=5.8$ L]



题 1-6 图

1-7. 试证明流体的体[膨]胀系数、压缩率,体积模量可用比体积 v 或密度 ρ 表达为下列公式

$$\alpha_V=\frac{1}{v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}T}=-\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}T}$$

$$\kappa_T=-\frac{1}{v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}p}=\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}p}$$

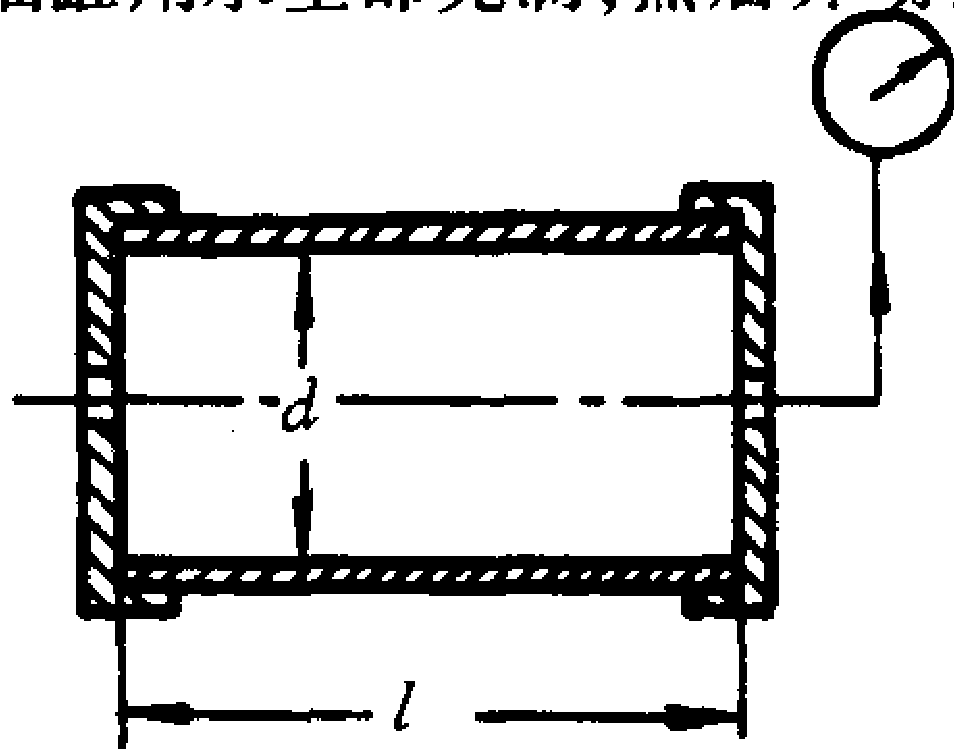
$$K=-v\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}v}=\rho\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}$$

1-8. 试证明气体绝热压缩时,其体积模量 K 等于绝热指数 γ 与绝对压强 p 的乘积。

1-9. 已知 100 kPa 下海平面处的海水密度为 1 025 $\mathrm{kg/m^3}$,海水体积模量的平均值为 234×10^7 Pa,海底绝对压强为 817×10^2 kPa,试求海底处海水的密度。

[答:$\rho=1\ 061\ \mathrm{kg/m^3}$]

1-10. 为了检查液压油缸的密封性,需要进行水压试验,试验前先将 $l=1.5$ m,$d=0.2$ m 的油缸用水全部充满,然后开动试压泵向油缸再供水加



题 1-10 图

压,直到压强增加了 20 MPa,不出故障为止。假定水的压缩率的平均值 $\kappa = 0.5\times10^{-9}\ Pa^{-1}$,忽略油缸变形,试求试验过程中,通过试压泵向液压缸又供应了多少水?

[答:$\Delta V = 0.467\ l$]

1-11. 某油液相对密度为 0.9,不同温度的恩氏度如下表,试求各相应温度下的运动粘度 ν 和动力粘度 μ,并用普通坐标纸绘出 $\nu - t$,$\mu - t$ 曲线。

温度 t / °C	20	30	40	50	60	70	80	90
恩氏度 r / °E	51	24	14	8.1	5.3	3.6	2.7	2.3

1-12. 某油液在 20 °C 时 $r = 3.2$ °E,在 70 °C 时 $r = 1.6$ °E,试求其粘温指数 λ 及其在 50 °C 时的运动粘度 ν。

[答:$\lambda = 0.02\ °C^{-1}$,$\nu = 11.65\ mm^2/s$]

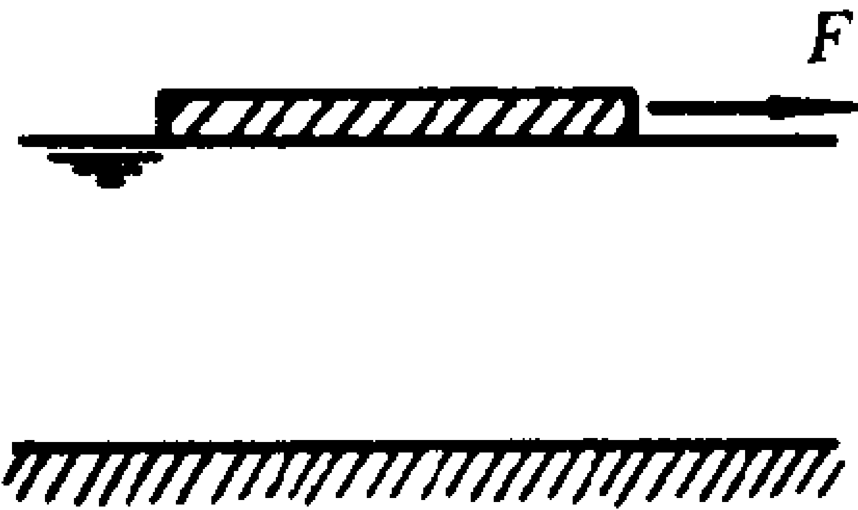
1-13. 底面积为 1.5 m² 的薄板在液面上水平移动速度为 16 m/s,液层厚度为 4 mm,假定垂直于油层的水平速度为直线分布规律。如果

(1) 液体为 20 °C 的水;

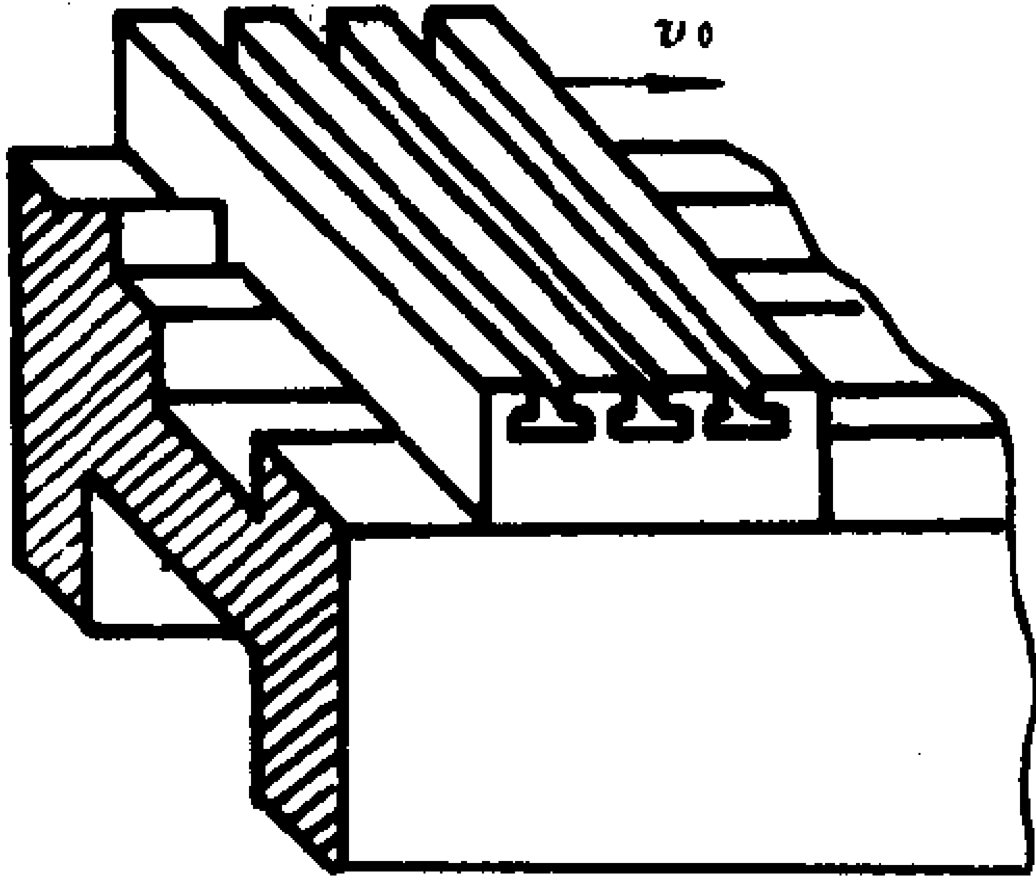
(2) 液体为 20°C、相对密度为 0.921 的原油;

试分别求出移动平板的力多大?

[答:$F_1 = 6\ N$,$F_2 = 420\ N$]



题 1-13 图



题 1-14 图

1-14. 机床工作台质量 204 kg,工作台与机身导轨接触面积为 300 cm²,移动速度为 1.5 m/s,试求在下述两种情况下,移动工作台所需的力与功率

(1) 普通半干摩擦导轨、动摩擦系数 $f=0.12$；

(2) 静压支承导轨，在接触面间建立 0.1 mm 厚的油膜，油的动力粘度为 $\mu=0.12\ \text{Pa·s}$。

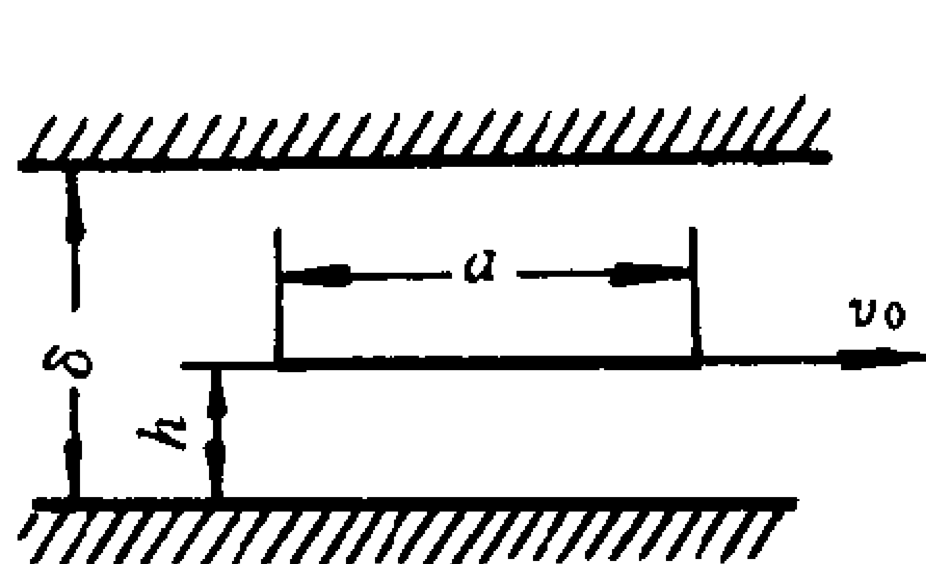
[答：(1) $F=240\ \text{N}, P=360\ \text{W}$；

(2) $F=54\ \text{N}, P=81\ \text{W}$]

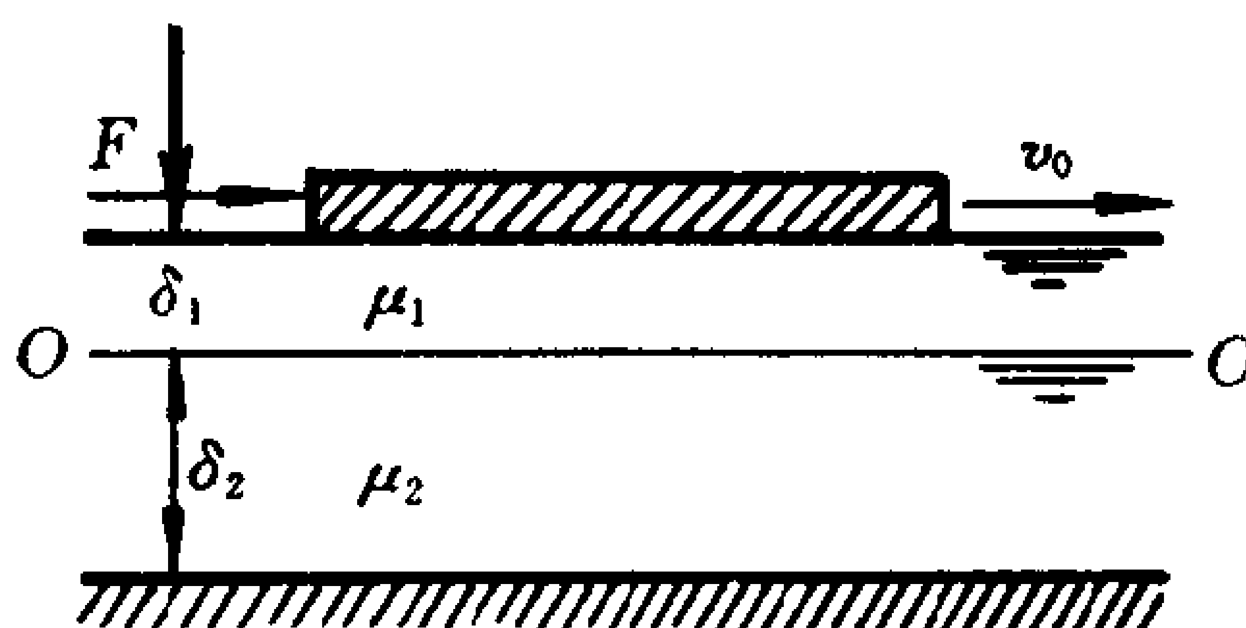
1－15. 在 $\delta=40$ mm 的两平行壁面之间充满动力粘度 $\mu=0.7\ \text{Pa·s}$ 的液体，在液体中有一边长为 $a=60$ mm 的薄板以 $v_0=15$ m/s 的速度沿薄板所在平面内运动，假定沿铅直方向的速度分布是直线规律。

(1) 当 $h=10$ mm 时，求薄板运动的液体阻力。

(2) 如果 h 可变，求 h 为多大时，薄板运动阻力最小？最小阻力为多大？



题 1－15 图



题 1－16 图

[答：(1) $F=5.04$ N；

(2) $h=\dfrac{\delta}{2}, F_{\min}=3.78$ N]

1－16. 两种不相混合的液体有一个水平的交界面 $O-O$，两种液体的动力粘度分别为 $\mu_1=0.14\ \text{Pa·s}, \mu_2=0.24\ \text{Pa·s}$；两液层厚度分别为 $\delta_1=0.8$ mm，$\delta_2=1.2$ mm，假定速度分布为直线规律，试求推动底面积 $A=1\,000\ \text{cm}^3$ 平板在液面上以匀速 $v_0=0.4$ m/s 运动所需的力？

[答：$F=3.73$ N]

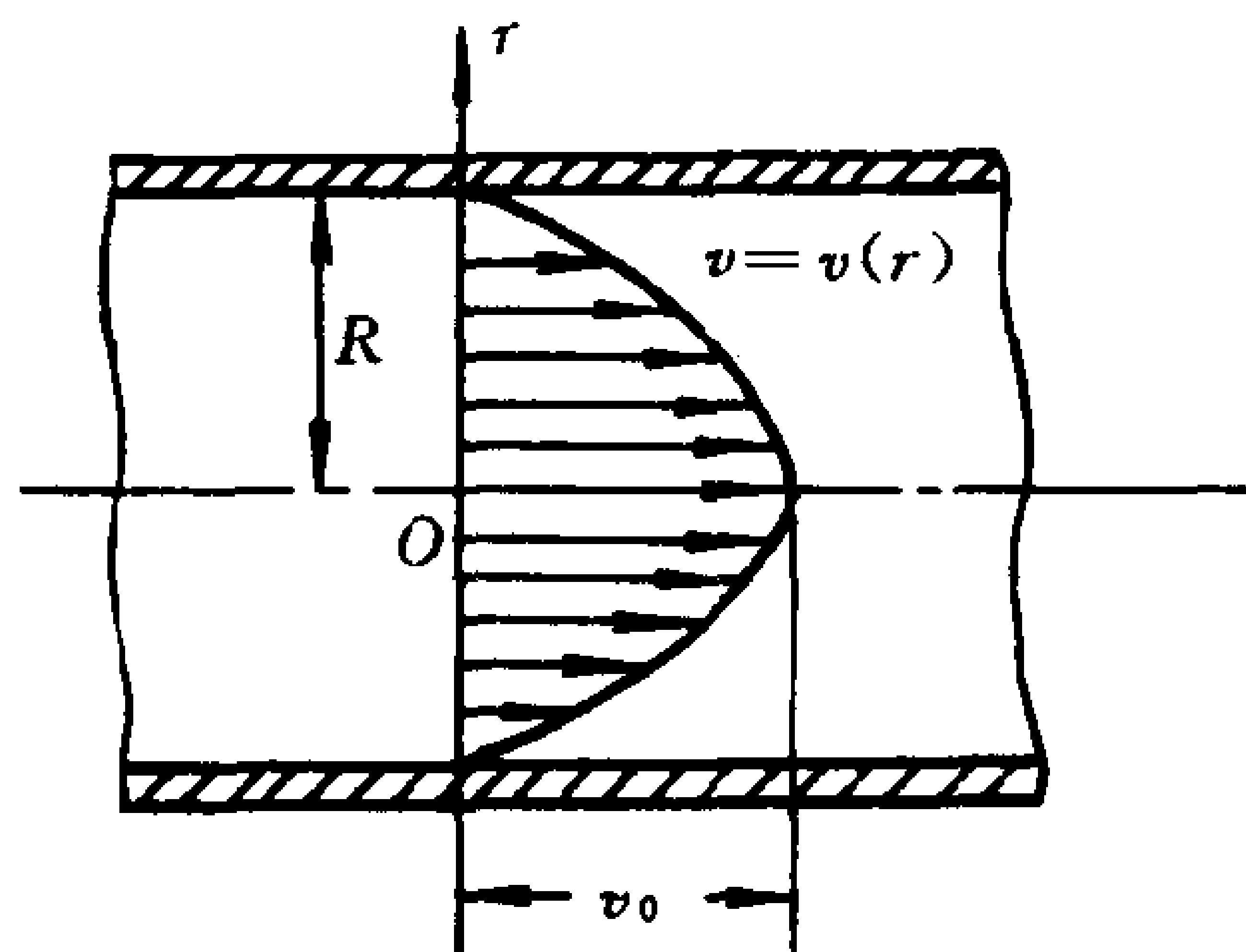
1－17. 已知管内液体质点的轴向速度 v 与质点所在半径 r 成抛物线型分布规律。当 $r=0$ 时，$v=v_0$；当 $r=R$ 时，$v=0$。

(1) 试建立 $v=v(r), \tau=\tau(r)$ 的函数关系式；

(2) 如果 $R=6$ mm，$v_0=3.6$ m/s，$\mu=0.1\ \text{Pa·s}$ 时，试求 $r=0、2、4、6$ mm各处的切应力。

[答:(1) $v=v_0\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)$, $\tau=\frac{2\mu v_0 r}{R^2}$;

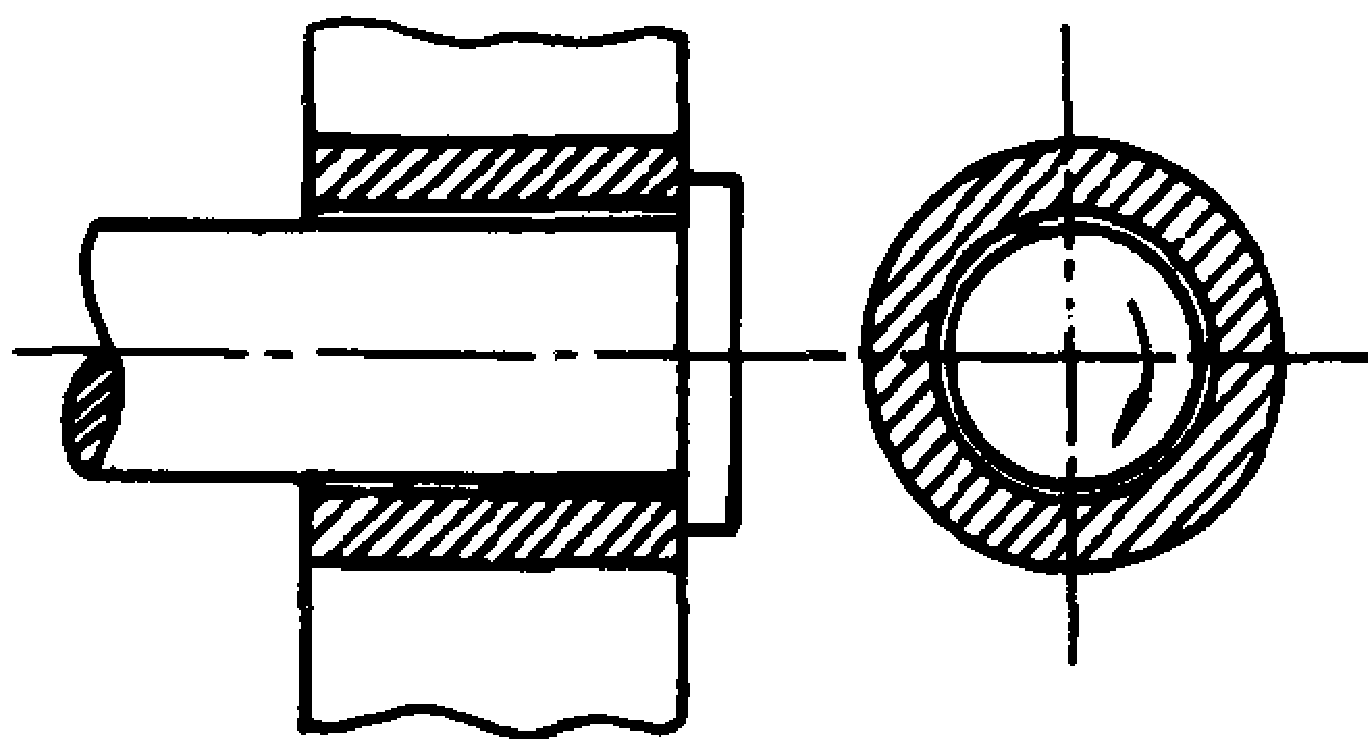
(2) $\tau=0$、40、80、120 Pa]



题 1－17 图

1－18. 直径 76mm 的轴在同心缝隙为 0.03 mm，长度为 150 mm 的轴承中旋转，轴的转速为 226 r/min，测得轴颈上的摩擦力矩为 76 N·m，试确定缝隙中油液的动力粘度。

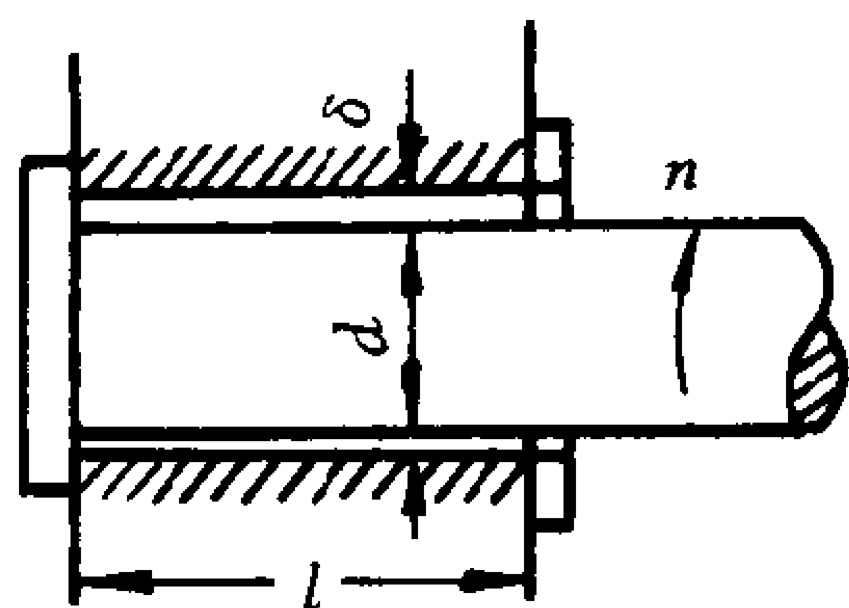
[答：$\mu=1.86$ Pa·s]



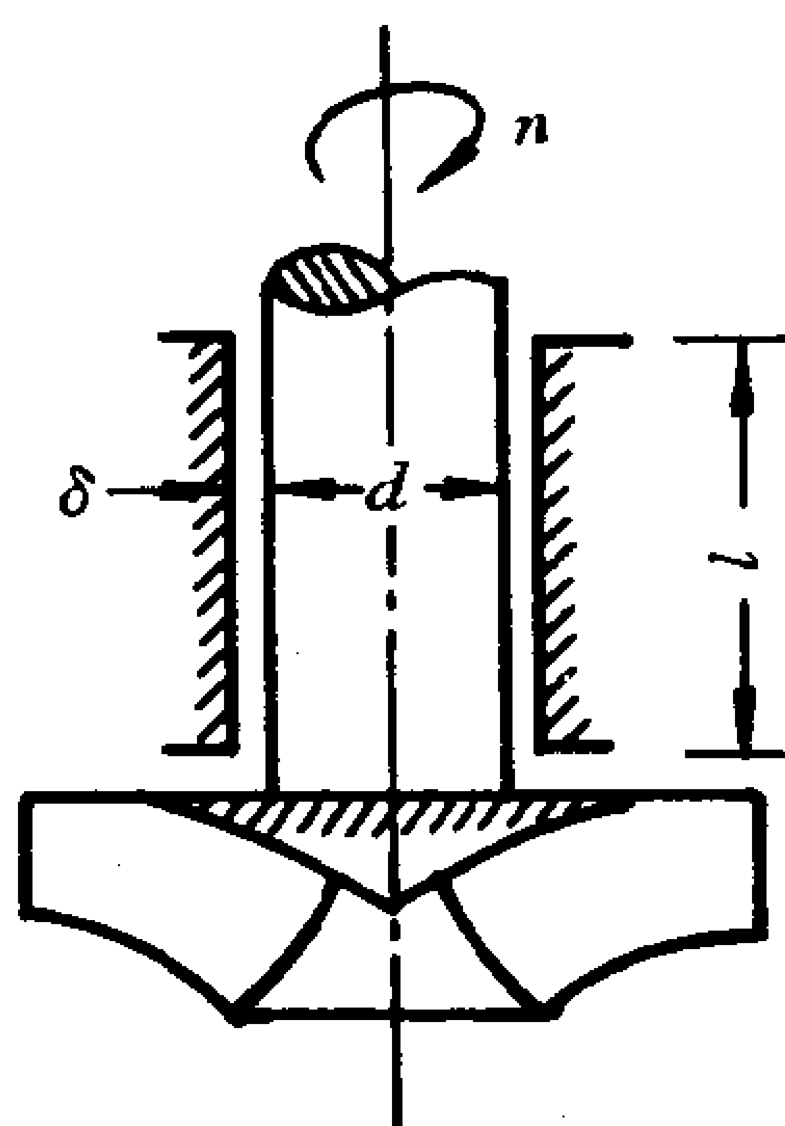
题 1－18 图

1－19. 在直径 $d=64$ mm，长度 $l=100$ mm 的滑动轴承中，充满相对密度 $d=0.85$ 的 15 号机械油。当油温为 20 ℃时测得轴上扭矩 $T=2.5$ N·m，转速 $n=1\ 200$r/min，试求轴承的同心缝隙。

[答：$\delta=0.03$ mm]



题 1－19 图



题 1－20 图

1－20. 水轮机轴径 $d=0.36$ m，轴承长 $l=1$m，同心缝隙 $\delta=0.23$ mm，润滑油动力粘度 $\mu=0.072$ Pa·s，试求水轮机转速 $n=200$ r/min 时，消耗于轴承上的摩擦功率。

[答：$P=5.03$ kW]

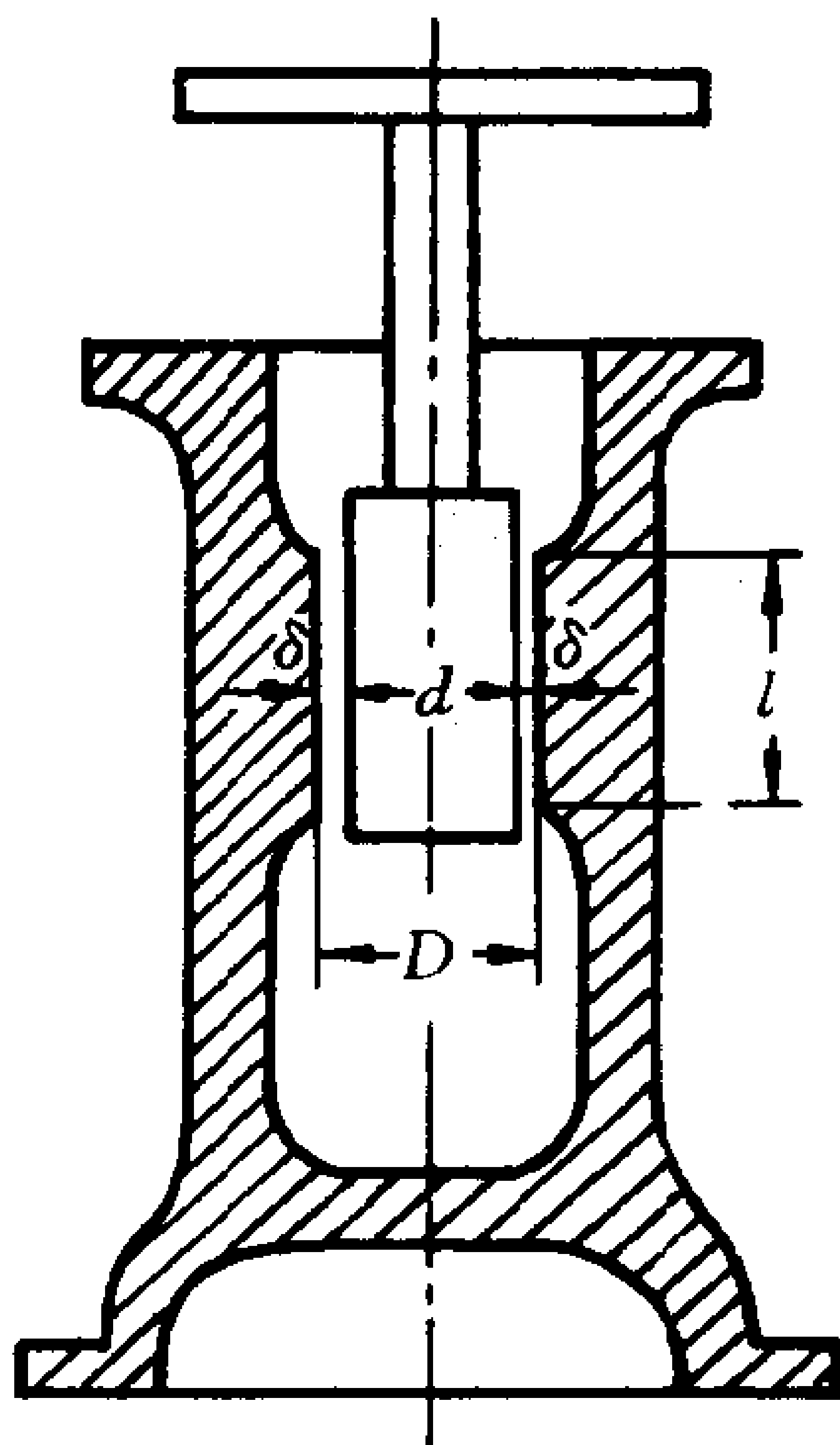
1－21. 油压机活动部件在自重与轴承摩擦力的作用下匀速下落，已知自重 $W=190$ N，$d=152$ mm，$D=152.02$ mm，$l=200$ mm。

(1) 如果用 $\mu=0.62$ Pa·s 的油，试求活动部件的下落速度；

(2) 如果下落速度变为 $v_0=39$ mm/s，试问此时油的动力粘度变为多少？

[答：(1) $v_0=32$ mm/s；

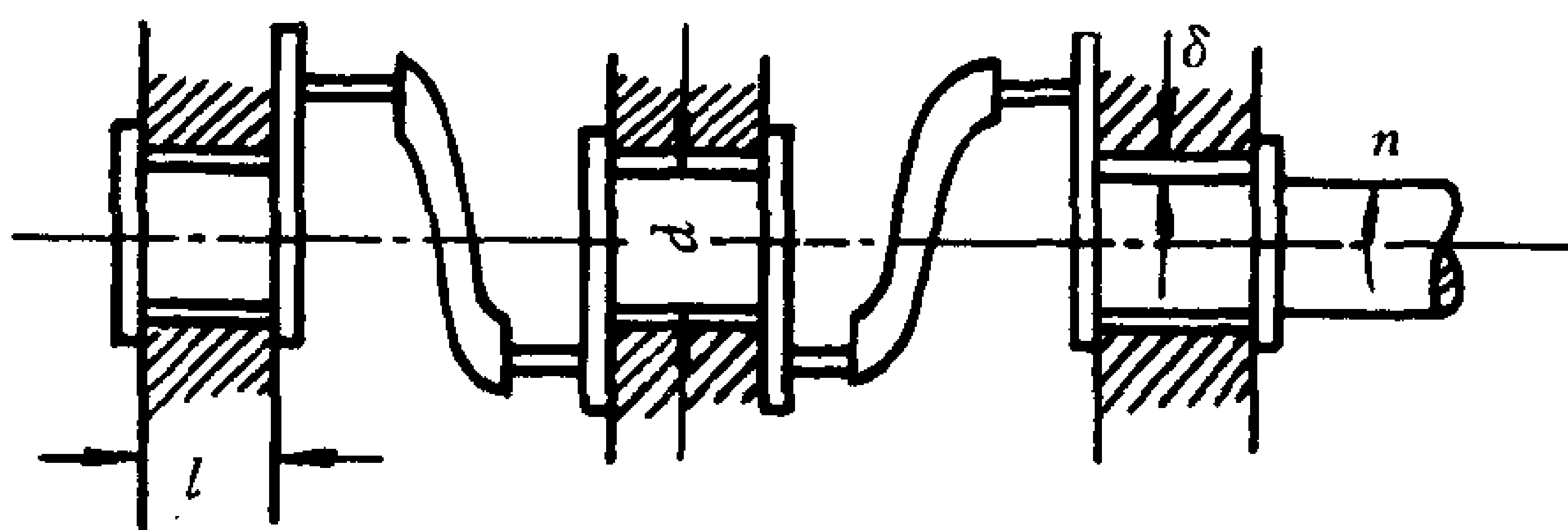
(2) $\mu=0.51$ Pa·s]



题 1－21 图

1－22. 四缸发动机曲轴上的三个主轴颈尺寸相同：$l=120$ mm，$d=60$ mm，同心缝隙 $\delta=0.1$ mm，润滑油的动力粘度 $\mu=0.05$ Pa·s，发动机转速 $n=1\ 800$r/min，试求消耗于轴承摩擦上的功率。

[答：$P=1.085$ kW]



题 1－22 图

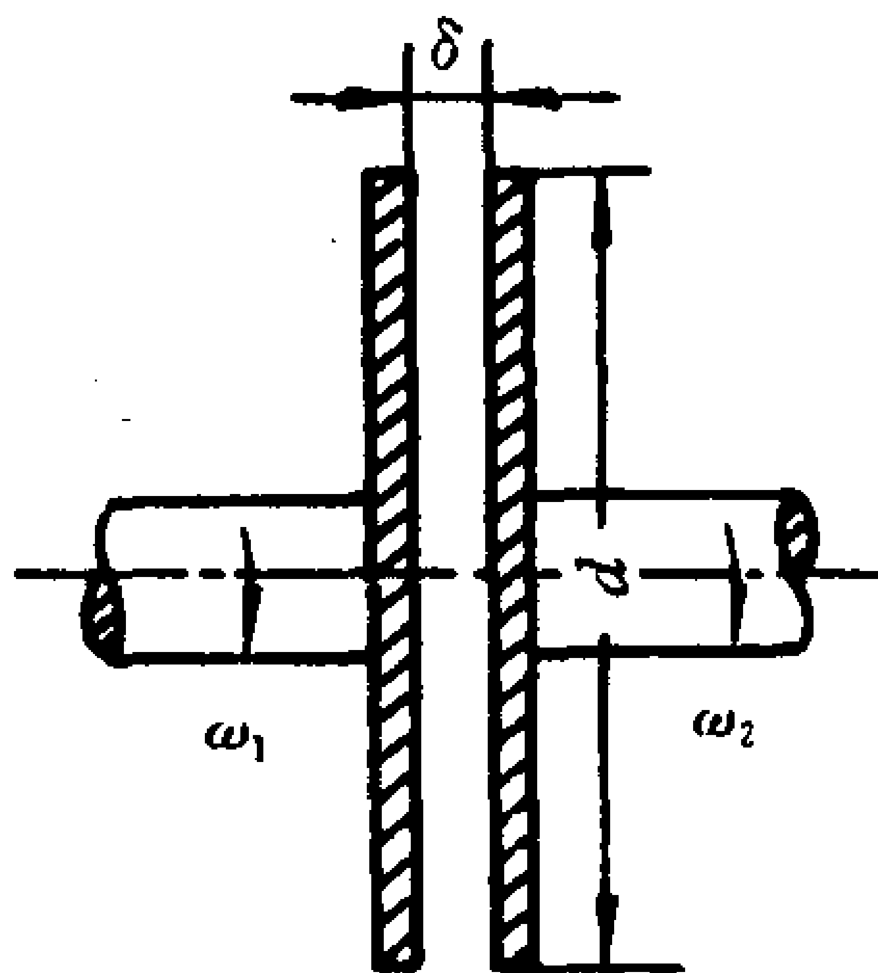
1－23. 利用液体摩擦传递扭矩 T 的摩擦盘直径为 d、间隙为 δ，摩擦盘间液体的动力粘度为 μ，主动轴与从动轴的角速度分别为 ω_1 及 ω_2。$\omega_1-\omega_2$ 叫作摩擦盘的滑移角速度。

(1) 试求以 T、d、δ、μ 表示的滑移角速度公式；

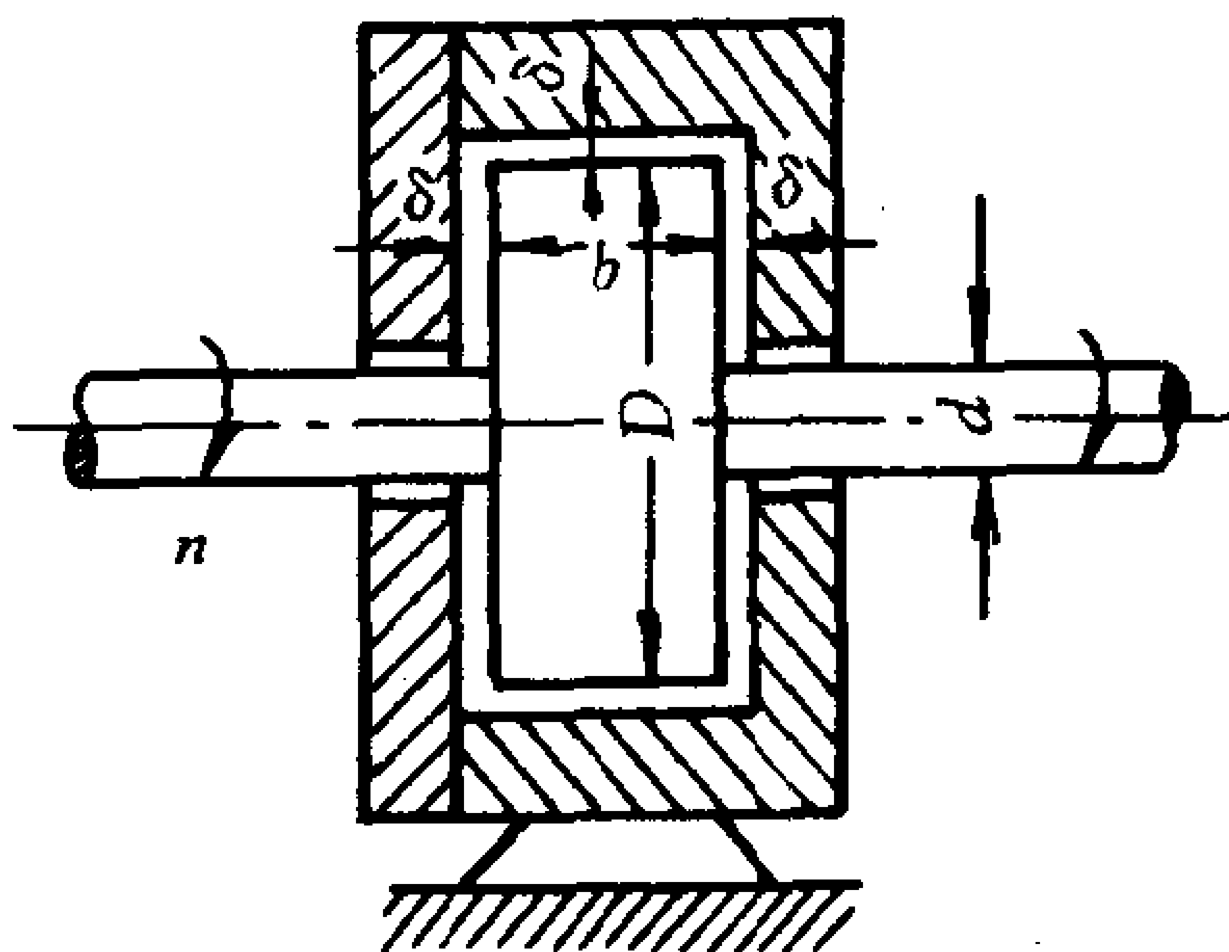
(2) 如果 $\omega_1-\omega_2=44$ rad/s，$d=200$ mm，$\delta=0.13$ mm，$\mu=0.14$ Pa·s，试求扭矩 T 为若干？

[答：(1) $\omega_1-\omega_2=\dfrac{32\delta T}{\pi\mu d^4}$；

(2) $T=7.44$ N·m]



题 1－23 图



题 1－24 图

1－24. 液体摩擦测功计的转子直径 $D=110$ mm，宽度 $b=40$ mm，转子与壳体之间的轴向缝隙、径向缝隙均充满动力粘度 $\mu=0.7$ Pa·s 的液体，轴的直径 $d=30$ mm，轴的转速 $n=420$ r/min，缝隙 $\delta=0.01$ mm。

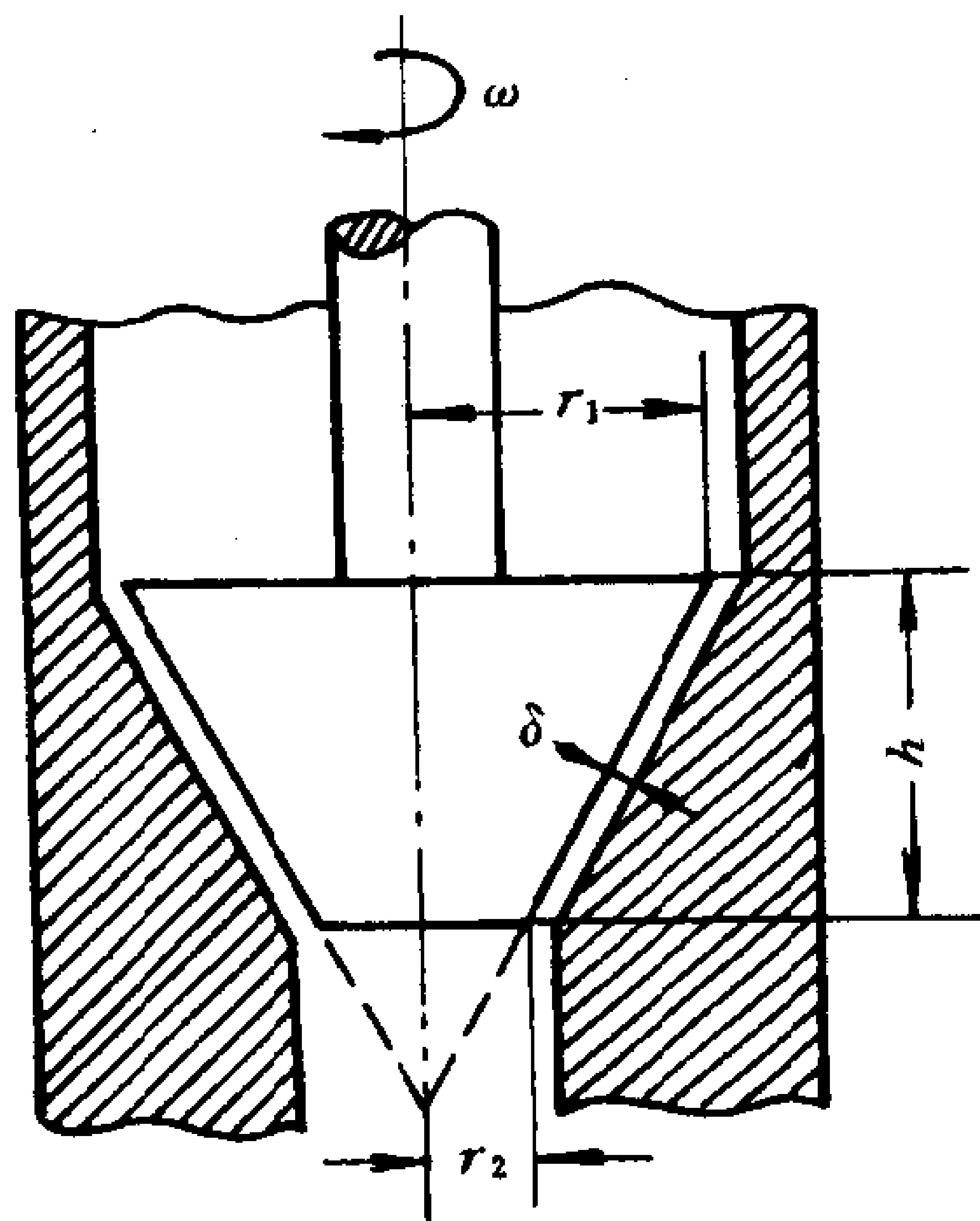
试求测功计的扭矩和功率。

[答：$T=217\ \mathrm{N\cdot m}$，$P=9.54\ \mathrm{kW}$]

1-25. 在旋转锥阀与阀座之间有厚度为 δ、动力粘度为 μ 的一层油膜，锥阀高为 h，上、下底圆半径分别为 r_1 及 r_2。

(1) 试证明，锥阀以 ω 角速度旋转时作用在锥阀上的阻力矩为

$$T=\frac{\pi\mu\omega(r_1^2+r_2^2)(r_1+r_2)\sqrt{(r_1-r_2)^2+h^2}}{2\delta};$$



题 1-25 图

(2) 已知 $T=0.05\ \mathrm{N\cdot m}$，$\mu=0.1\ \mathrm{Pa\cdot s}$，$r_1=20\ \mathrm{mm}$，$r_2=10\ \mathrm{mm}$，$h=20\ \mathrm{mm}$，$\omega=20\pi\ \mathrm{rad/s}$，试求缝隙 δ。

[答：$\delta=0.066\ \mathrm{mm}$]

第二章 流体静力学

流体静力学研究平衡流体的力学规律及其应用。

平衡包括两种：一种是流体对地球无相对运动，一种是流体对运动容器无相对运动。前者称为重力场中的流体平衡，后者称为流体的相对平衡。其实这只是按习惯认为地球是固定而划分的，如果将地球也视为运动容器，则一切平衡都是相对于坐标系的相对平衡。

平衡流体互相之间没有相对运动，因而流体粘性在平衡状态下无从显示，流体静力学中的一切原理都适用于实际流体。分析与实验结果完全一致。流体静力学是工程流体力学中独立完整而又严密符合实际的一部分内容，这里的理论不需要实验修正。

§2-1 平衡流体上的作用力

从平衡流体中取体积为 ΔV 的任意微团（如图 2-1）作为分离体。作用在流体微团上的力可以分为两种：

一、质量力

与流体微团质量大小有关并且集中作用在微团质量中心上的力称为质量力。

考虑到相对平衡的各种实际情况，质量力主要有重力 $\Delta \boldsymbol{W} = \Delta m\boldsymbol{g}$、直线运动惯性力 $\Delta \boldsymbol{F}_{\mathrm{I}} = \Delta m \cdot \boldsymbol{a}$、离心惯性力 $\Delta \boldsymbol{F}_{\mathrm{R}} = \Delta m \cdot \boldsymbol{r}\omega^2$ 等等。这些力的矢量和用 $\Delta \boldsymbol{F}_m$ 表示，则

$$\Delta \boldsymbol{F}_m = \Delta m \cdot \boldsymbol{a}_m = \Delta m(f_x\boldsymbol{i} + f_y\boldsymbol{j} + f_z\boldsymbol{k})$$

如果微团极限缩为一点，有限增量符号 Δ 改成微分符号 d，则

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_m = \mathrm{d}m \cdot \boldsymbol{a}_m = \mathrm{d}m(f_x\boldsymbol{i} + f_y\boldsymbol{j} + f_z\boldsymbol{k}) \qquad (2-1)$$

式中 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}_m$ 为作用在流体质点上的质量力；

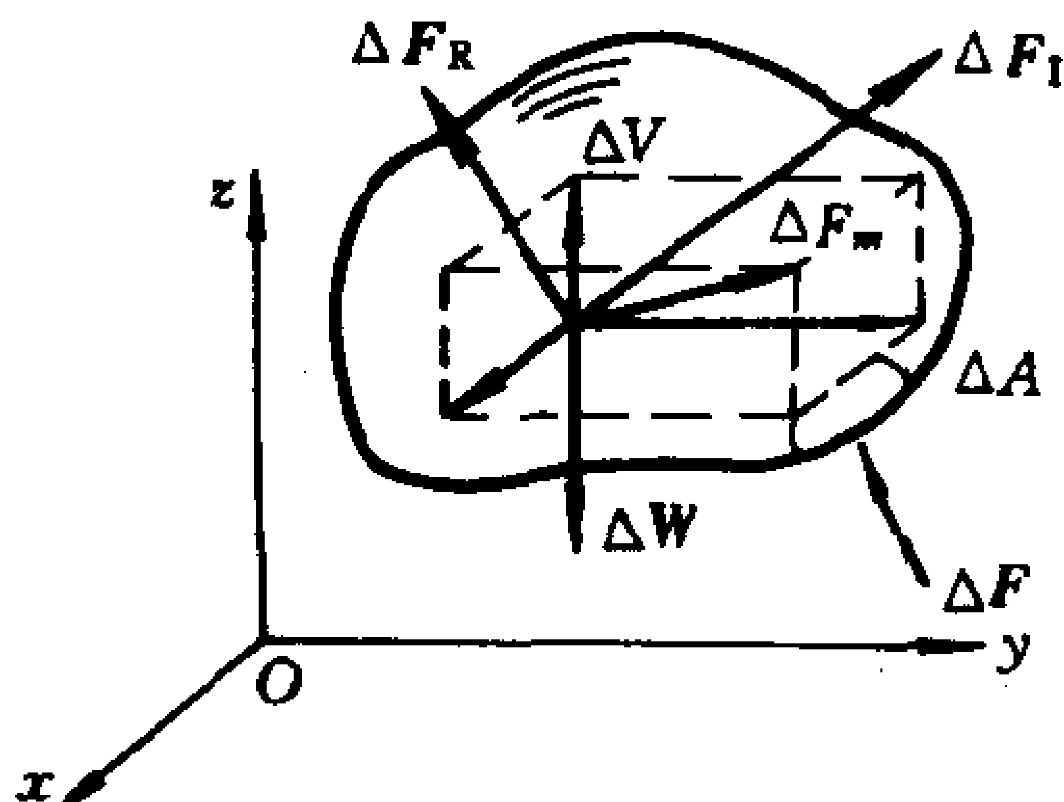


图 2－1　平衡流体上的作用力示意图

$\boldsymbol{a}_m$ 等于单位质量力，即单位质量的质量力；

f_x、f_y、f_z 为单位质量力在 x、y、z 轴上的投影，或简称为单位质量分力。

二、表面力

流体微团在流体内部不是孤立存在的，它与相邻微团在相互之间的接触表面上应该有力的相互作用。这种力起源于微团内部的分子运动，定义流体质点或微团时虽然不考虑其中的个别分子，但分子总体的平均统计作用是不能忽略的，这样我们取出图 2－1 所示的流体微团作为分离体时，必须相应地将周围流体或固体对它的作用以力的形式加于分离体微团表面上，这样才能维持微团原来的平衡状态。

这种大小与表面面积有关而且分布作用在流体表面上的力称为表面力。

表面力按其作用方向可以分为两种：一种是沿表面内法线方向的压力，一种是沿表面切向的摩擦力，因为流体不能抵抗拉力，所以除液体自由表面处的微弱表面张力外，在流体内部是不存在拉力或张力的。

对于平衡流体来说，因为流体质点与质点之间或流体质点与容器之间都没有相对运动，按照牛顿内摩擦定律，在平衡流体内部也不存在切向摩擦力，因而作用在平衡流体上的表面力只有沿受压表面内法线方向的所谓流体静压力。下面讨论一下流体静压力的表达式。

流体静压力是一个有大小、方向、合力作用点的矢量，它的大小和方向都与其受压面密切相关。如图2-1所示，在流体微团上取微元面积 ΔA，设作用在 ΔA 表面上的总压力大小为 ΔF。一般说来受压表面上各点流体静压力的强度不一定相等，$\frac{\Delta F}{\Delta A}$ 代表受压面上的平均流体静压强，而当 $\Delta A \to 0$ 时，流体微团极限成为某一个坐标 (x, y, z) 点上的流体质点，则平均流体静压强的极限

$$p = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}A} \tag{2-2}$$

称为一点的流体静压强。

在力学上，表面面积是矢量，称为面积矢

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \mathrm{d}A \cdot \boldsymbol{n} \tag{2-3}$$

式中 dA 是微元面积的大小，即面积矢的模；

$\boldsymbol{n}$ 是微元面积外法线方向上的单位矢量，即面积矢的方向矢量。

由(2-2)及(2-3)式不难得出微元表面上的流体静压力矢量的表达式为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = -p\mathrm{d}A\boldsymbol{n} \tag{2-4}$$

因而作用在某个有限表面 A 上的流体静压力矢量为

$$\boldsymbol{F} = -\int_A p\mathrm{d}A\boldsymbol{n} \tag{2-5}$$

式中 $-\boldsymbol{n}$ 说明流体静压力的方向是沿受压面的内法线方向；

$p\mathrm{d}A$ 说明流体静压力的大小是用微元面积乘以面上任何一点的流体静压强。

这里需要强调说明，流体静压力与流体静压强虽然互有联系，

但它们却是两个完全不同的物理概念。

如(2－5)式所示，流体静压力是流体作用在受压面上的总作用力矢量、单位符号是 N，用大写字母 $\boldsymbol{F}$ 或 F 表示，它的大小和方向均与受压面有关，没有受压面也就谈不上流体静压力。而流体静压强则是一点上的流体静压力的强度，用小写字母 p 表示，单位符号是 Pa。下面我们可以证明流体静压强没有方向性，它是一个标量，而不是矢量。

例如，在平衡流体中取出任意一个微元四面体 $OABC$，如图 2－2，它的三个棱边长度

$$\left.\begin{aligned} OA &= \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = \mathrm{d}x \\ OB &= \lim_{\Delta y \to 0} \Delta y = \mathrm{d}y \\ OC &= \lim_{\Delta z \to 0} \Delta z = \mathrm{d}z \end{aligned}\right\}$$

都是无穷小量。

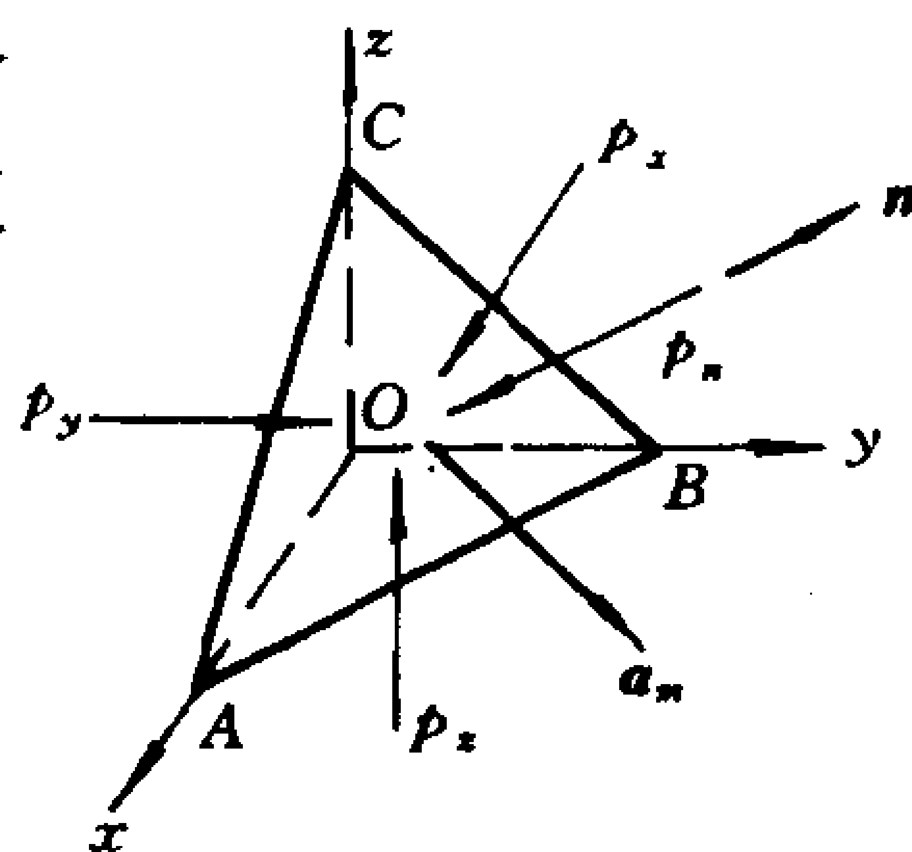


图 2－2　平衡流体中的微元四面体

$OABC$ 的体积为 $\mathrm{d}V = \dfrac{1}{6}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$。

设斜面 ABC 外法线方向的单位矢量为 $\boldsymbol{n}$，它与三个坐标轴正向的夹角分别为 α、β、γ，则

$$\left.\begin{aligned} \Delta ABC \cdot \cos\alpha &= \frac{1}{2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ \Delta ABC \cdot \cos\beta &= \frac{1}{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}z \\ \Delta ABC \cdot \cos\gamma &= \frac{1}{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \end{aligned}\right\}$$

设微元四面体内流体的平均密度为 ρ、单位质量力为 $\boldsymbol{a}_m = f_x\boldsymbol{i} + f_y\boldsymbol{j} + f_z\boldsymbol{k}$，则微元流体上的质量力为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_m = \rho\,\frac{1}{6}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z(f_x\boldsymbol{i} + f_y\boldsymbol{j} + f_z\boldsymbol{k}) \qquad (2-6)$$

设四面体每个面上任何一点的压强分别用 p_x、p_y、p_z 及 p_n

表示，则作用在微元四面体上表面力为

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{F} &= \left(p_x \frac{1}{2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z - p_n \Delta ABC\cos\alpha\right)\boldsymbol{i} \\
&\quad + \left(p_y \frac{1}{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}z - p_n \Delta ABC\cos\beta\right)\boldsymbol{j} \\
&\quad + \left(p_z \frac{1}{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y - p_n \Delta ABC\cos\gamma\right)\boldsymbol{k} \\
&= (p_x - p_n)\frac{1}{2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z\boldsymbol{i} + (p_y - p_n)\frac{1}{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}z\boldsymbol{j} \\
&\quad + (p_z - p_n)\frac{1}{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\boldsymbol{k}
\end{aligned}
\tag{2-7}
$$

流体处于平衡状态，则 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}_m + \mathrm{d}\boldsymbol{F} = 0$。将(2－6)、(2－7)式相加写成投影式，则有

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{\rho}{6} f_x \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (p_x - p_n)\frac{1}{2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0 \\
\frac{\rho}{6} f_y \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (p_y - p_n)\frac{1}{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}z = 0 \\
\frac{\rho}{6} f_z \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (p_z - p_n)\frac{1}{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0
\end{aligned}
\right\}
$$

每式中的第一项与第二项相比为高阶无穷小，略去不计，于是可得

$$
p_x = p_y = p_z = p_n \tag{2-8}
$$

$\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$、$\mathrm{d}z$、趋近于零时，四面体缩为一个点，原来四个面上任何一点的压强 p_x、p_y、p_z、p_n 就变成 O 点上各个方向的压强了。(2－8)式说明从任何方向作用于一点上的流体静压强均是相等的。按作用与反作用原理，一点对周围流体任何方向上所作用的流体静压强也都是相等的。流体静压强是各向同性的，它与受压面的方位无关，它的大小可以由质点所在的坐标位置确定。因而 $p = p(x,y,z)$ 与 $T = T(x,y,z)$、$\rho = \rho(x,y,z)$ 一样都是标量函数。

上面叙述了静压力和静压强两个概念的不同之处，但它们不是没有联系的，正如(2－5)式所示，流体静压力取决于受压面上各

点的流体静压强。因此下面首先叙述流体静压强的分布规律、计算与测量,然后再讨论流体静压力的计算和应用,这就是本章内容的主要轮廓。

§2-2 流体平衡的微分方程式

一、欧拉平衡方程式

如图2-3,在平衡流体中任取一个微元六面体 $ABCDE$,设 $AB=\mathrm{d}x$、$AC=\mathrm{d}y$、$AD=\mathrm{d}z$ 均为无穷小量,A 点密度为 ρ、压强为 p。

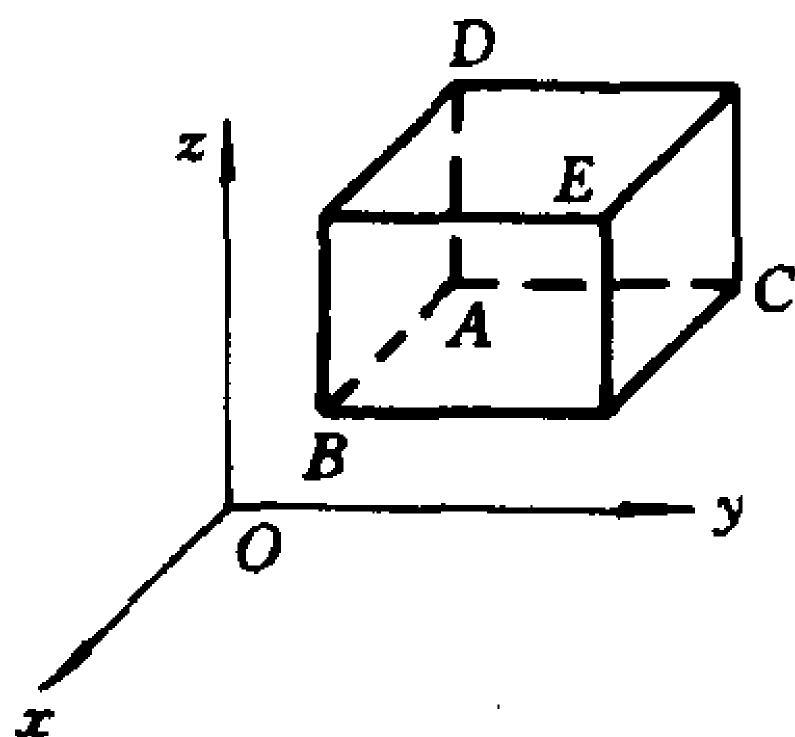


图2-3 微元六面体

由(2-1)式可得流体的质量力为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_m=\mathrm{d}m(f_x\boldsymbol{i}+f_y\boldsymbol{j}+f_z\boldsymbol{k})$$
$$=\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z(f_x\boldsymbol{i}+f_y\boldsymbol{j}+f_z\boldsymbol{k}) \qquad (2-9)$$

流体的表面力,可以根据(2-4)及(2-7)式写出为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=-p\mathrm{d}A\boldsymbol{n}=(p_A-p_B)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\boldsymbol{i}$$
$$+(p_A-p_C)\mathrm{d}x\mathrm{d}z\boldsymbol{j}+(p_A-p_D)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\boldsymbol{k} \qquad (2-10)$$

式中 p_A 是 DC、BD、BC 面上一点的压强,p_B、p_C、p_D 分别是 BE、CE、DE 面上一点的压强。

已知 $p_A=p$,而且压强在平衡流体中是坐标的连续函数,即 $p=p(x,y,z)$,按照多元连续函数的泰勒公式,略去二阶以上无穷小量,可得

$$\left.\begin{aligned} p_B &= p + \frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x \\ p_C &= p + \frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}y \\ p_D &= p + \frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}z \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} p_A - p_B &= -\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x \\ p_A - p_C &= -\frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}y \\ p_A - p_D &= -\frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}z \end{aligned}\right\}$$

以之代回(2－10)式可得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\left(-\frac{\partial p}{\partial x}\boldsymbol{i} - \frac{\partial p}{\partial y}\boldsymbol{j} - \frac{\partial p}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) \qquad (2-11)$$

因为流体保持平衡，它在任何方向的合力均为零，故其平衡条件是

$$\Sigma\boldsymbol{F} = 0, \text{或 } \mathrm{d}\boldsymbol{F}_m + \mathrm{d}\boldsymbol{F} = 0$$

由(2－9)及(2－11)式可得

$$\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\left[\left(f_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\right)\boldsymbol{i} + \left(f_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\right)\boldsymbol{j} + \left(f_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\right)\boldsymbol{k}\right] = 0$$

即

$$\left.\begin{aligned} f_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ f_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ f_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2-12)$$

这就是欧拉在 1755 年首先导出的流体平衡微分方程式，通常称为欧拉平衡方程式，它是平衡流体中普遍适用的一个基本公式，

无论平衡流体受的质量力有哪些种类，流体是否可压缩，流体有无粘性，欧拉平衡方程式都是普遍适用的。

方程式的推导过程说明：微元平衡流体的质量力与表面力无论在任何方向上都应该保持平衡，即质量力与该方向上表面力的合力应该相等相反。此外，从方程式还可看到：平衡流体受哪个方向的质量分力，则流体静压强沿该方向必然发生变化；反之，如果哪个方向没有质量分力，则流体静压强在该方向上必然保持不变。假如可以忽略流体的质量力，则这种流体中的流体静压强必然处处相等，这正是在简化处理机械或仪器中的气体平衡问题时所常常遇到的情况。

二、质量力的势函数

将(2-12)式分别乘以微分线段 dx、dy、dz 后相加，则有

$$f_x \mathrm{d}x + f_y \mathrm{d}y + f_z \mathrm{d}z - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}z\right) = 0$$

括号中正是 $p = p(x, y, z)$ 这个标量函数的全微分 $\mathrm{d}p$，所以

$$\mathrm{d}p = \rho(f_x \mathrm{d}x + f_y \mathrm{d}y + f_z \mathrm{d}z) \qquad (2-13)$$

此式称为欧拉平衡方程式的综合形式，也叫作压强微分公式。

压强微分公式的左端是压强的全微分，积分后得到一点上的静压强 p。而平衡流体中一点上的流体静压强应该由其坐标而唯一地确定，因此(2-13)式的右端必须也是一个坐标函数的全微分，这样才能保证积分结果的唯一性。

不难看到，如果单位质量分力与某一个坐标函数 $W = W(x, y, z)$ 具有下列关系(即 W 对某一个坐标的偏导数的负值等于该坐标方向上的质量分力)：

$$f_x = -\frac{\partial W}{\partial x}, f_y = -\frac{\partial W}{\partial y}, f_z = -\frac{\partial W}{\partial z} \qquad (2-14)$$

则(2-13)式的右端

$$\rho(f_x \mathrm{d}x + f_y \mathrm{d}y + f_z \mathrm{d}z) = -\rho\left(\frac{\partial W}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial W}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial W}{\partial z}\mathrm{d}z\right)$$
$$= -\rho \mathrm{d}W$$

才能成为坐标函数 $W=W(x,y,z)$的全微分。

于是(2－13)式变成

$$dp=-\rho dW \tag{2-15}$$

我们称满足(2－14)式的坐标函数 $W(x,y,z)$为质量力的势函数,符合(2－14)式关系的质量力则称为有势的质量力。

由此可以看到:在有势的质量力作用下,流体中任何一点上的流体静压强可以由坐标唯一地确定,这样流体才能保持平衡状态,因而结论是:只有在有势的质量力作用下流体才能平衡。

如果单位质量力与时间变量有关,那就找不到纯坐标变量的质量力的势函数,因而压强也就不能由坐标所唯一确定,这种情况下的流体当然不能保持平衡状态。

质量力的势函数通常可以根据平衡流体所受的单位质量分力用积分方法加以确定。

[**例题 2－1**] 试求重力场中平衡流体的质量力势函数,并说明其物理意义。

[**解**] 取如图 2－4 所示的坐标系,则单位质量分力为 $f_x=f_y=0, f_z=-g$,于是

$$dW=\frac{\partial W}{\partial x}dx+\frac{\partial W}{\partial y}dy+\frac{\partial W}{\partial z}dz$$
$$=-(f_x dx+f_y dy+f_z dz)=g dz \tag{2-16}$$

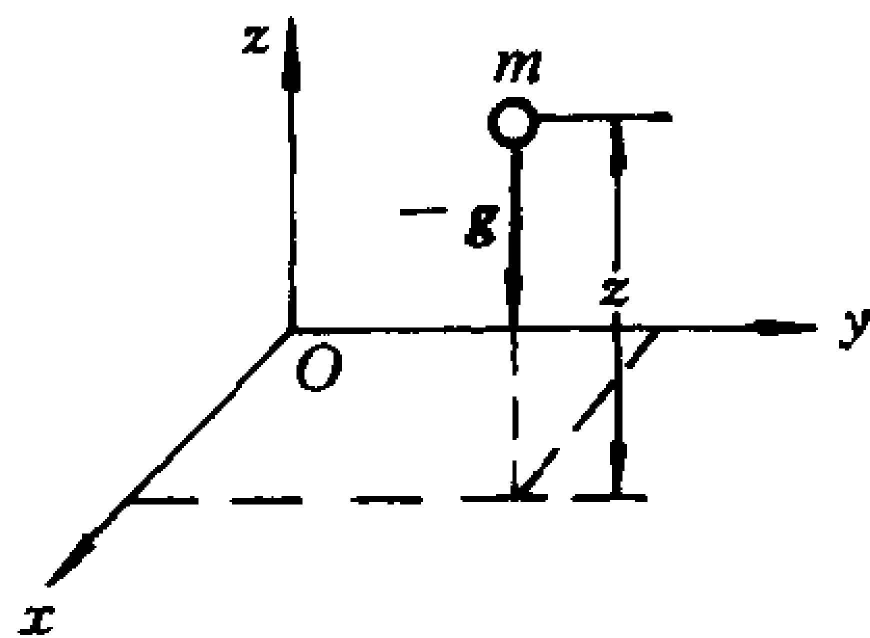


图 2－4 重力场的质量分力

设基准面 $z=0$ 处的势函数值为零,即零势面上 $W=0$。于是积分可得重力场中平衡流体的力势函数为

$$W=gz \tag{2-17}$$

因为在力学上,mgz 代表质量为 m 的物体在基准面以上高度为 z 时的位置势能,因而质量力势函数 $W=gz$ 的物理意义是单位质量($m=1$)流体在基准面以上高度为 z 时所具有的位置势能。

三、等压面微分方程式

流体中压强相等各点所组成的平面或曲面叫作等压面,等压

面上

$$p=C$$

$$dp=0$$

由(2－13)式可见等压面的微分方程式是

$$f_x dx + f_y dy + f_z dz = 0 \qquad (2-18)$$

等压面有下面三个性质：

1．等压面也是等势面。

由(2－15)式可见 $dp=0$ 时

$$dW=0$$

$$W=C$$

质量力势函数等于常数的面叫作等势面，所以等压面也就是等势面。

在重力场中，$W=gz$，所以当 $W=C$ 时，其等势面或等压面必然是由

$$z=C \qquad (2-19)$$

所代表的水平面族。与大气接触的自由表面当然也是等压面，这正是“水平面”一词的来由。不过应当注意，自由表面虽然始终是等压面，但在流体受其他质量力作用时其自由表面却不一定是水平的。

2．等压面与单位质量力矢量垂直。

这一性质可用等压面方程式(2－18)证明。因为 f_x、f_y、f_z 是单位质量力 $\boldsymbol{a}_m$ 的三个投影，dx、dy、dz 是等压面上任意微元线段 $d\boldsymbol{s}$ 的三个投影，于是(2－18)式可写成

$$\boldsymbol{a}_m \cdot d\boldsymbol{s} = 0 \qquad (2-20)$$

两矢量点积为零，说明两矢量相互垂直。$d\boldsymbol{s}$ 是等压面上的任意线段，因而等压面与单位质量力相互垂直。

3．两种不相混合平衡液体的交界面必然是等压面。

如图 2－5，假定密闭容器与地球有某种相对运动，而其中密度为 ρ_1 及 ρ_2 的两种不相混合液体在容器中处于平衡状态。如果

两种液体的交界面 $a-a$ 不是等压面(当然也不是等势面)则交界面上两点 A、B 的压强差从两种平衡液体中可以分别写出两个等式：

$$\left.\begin{aligned} dp &= \rho_1 dW \\ dp &= \rho_2 dW \end{aligned}\right\}$$

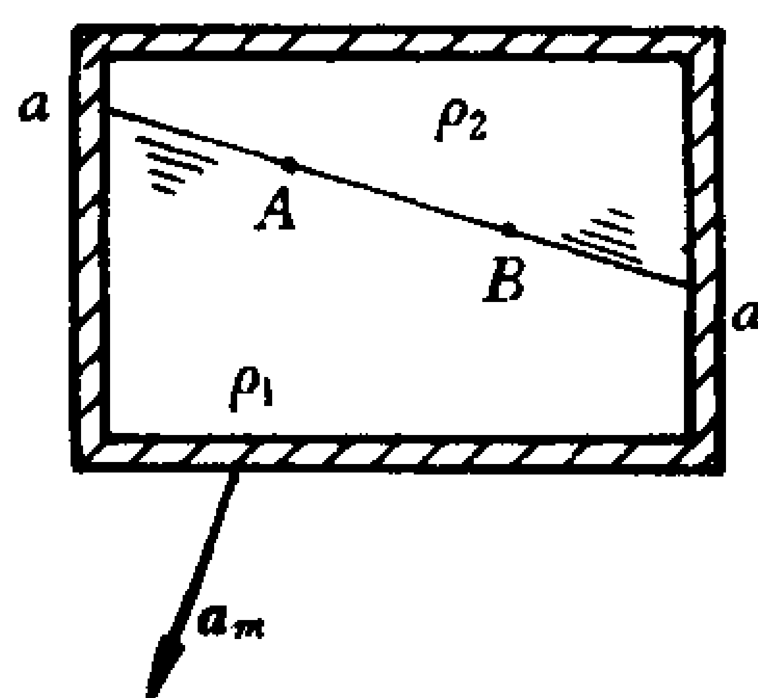


图 2-5　两种平衡液体的交界面

因为 $\rho_1 \neq \rho_2$，这组等式在 $dp \neq 0$，$dW \neq 0$ 的情况下是不可能同时成立的。只有 $dp=0$，$dW=0$ 时这组等式才能同时成立，因而交界面 $a-a$ 必须是等压面、等势面。

如果容器相对地球没有运动，则重力场中两种液体的交界面不但是等压面而且又必然是水平面。

§2-3　重力场中的平衡流体

重力场中的平衡流体是流体静力学的主要研究对象。重力场中的欧拉平衡方程式可以写成

$$dp = -\rho dW = -\rho g dz \tag{2-21}$$

根据流体的压缩性，下面分成两种情况来讨论它的积分并进而求解重力场中平衡流体的静压强分布规律。

一、不可压缩流体的静压强基本公式

对于连续、均质的不可压缩流体来说，其密度是恒定的常量，因而(2-21)式变成

$$dz + \frac{dp}{\rho g} = 0 \quad 或 \quad d\left(z + \frac{p}{\rho g}\right) = 0$$

在流体连续区域内积分，则

$$z + \frac{p}{\rho g} = C \tag{2-22}$$

这就是重力场中连续、均质、不可压缩流体的静压强基本公

式。式中左端的 z 和 p 代表平衡流体中任何一点的铅直坐标及静压强，右端是可以由边界条件确定的积分常数。由此，同样可以看出压强等于常量的等压面是铅直坐标恒定的水平面。

(2－22)式虽然简单，但却有重要的实用价值，为了深刻理解公式的含义，需要作下面两点引申说明。

1．静压强基本公式的物理意义

如图 2－6，在静止液体铅直坐标为 z 的 A 点处连接一个顶部抽成完全真空的玻璃闭口测压管，由于 A 点具有一定的压强，故测压管中液体会上升一定的高度 h_p，对于连续均质平衡流体中的 A、B 两点列静压强基本公式，可得

$$z+\frac{p}{\rho g}=(z+h_p)+0$$

于是

$$h_p=\frac{p}{\rho g} \qquad (2-23)$$

可见闭口测压管中液体上升高度正是该点的静压强与流体单位重力之比，一定的流体静压强代表使液柱上升一定高度的势能，因此如果说 z 代表单位重力流体的位置势能，则 $\frac{p}{\rho g}$ 代表单位重力流体的压强势能。

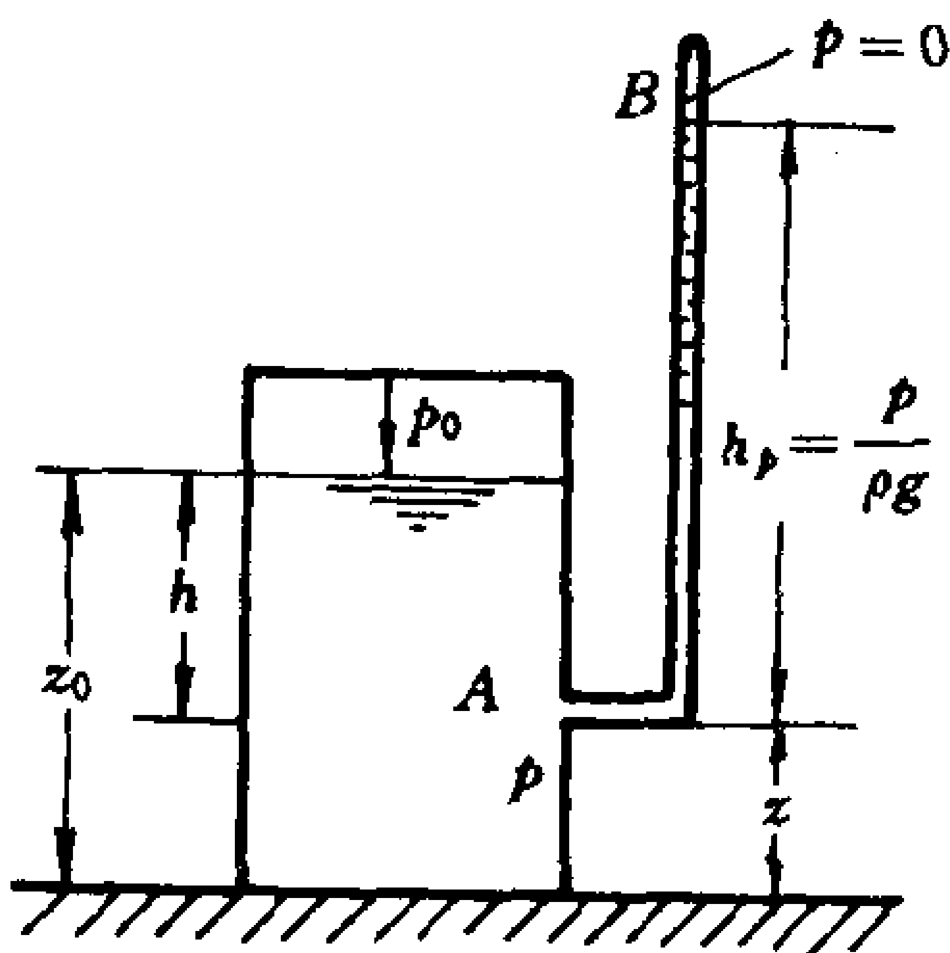


图 2－6　闭口测压管

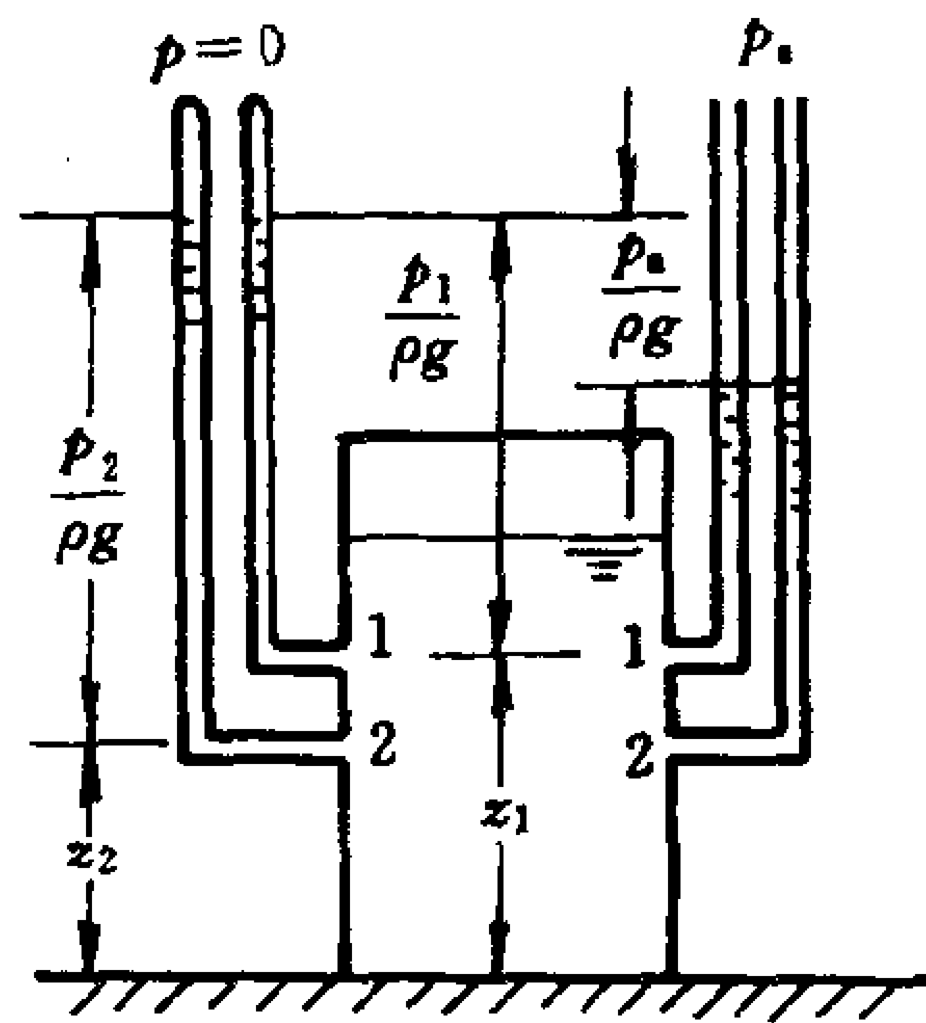


图 2－7　静压强基本公式的物理意义

于是静压强基本公式的物理意义就是平衡流体中各点的总势能(包括位置势能和压强势能)是一定的。如图 2－7 左部的闭口测压管所示

$$z_1 > z_2, \frac{p_1}{\rho g} < \frac{p_2}{\rho g}$$

但

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} \tag{2-24}$$

所以两闭口测压管中的液面是水平的。

z 称为位置水头，$\frac{p}{\rho g}$ 称为压强水头，因为它们的量纲同样都是 L，后者也代表一定的液柱高度。测压管抽成完全真空是不可能的，实际测压管往往是开口连通大气，如图 2－7 右部所示。在大气压 p_a 的作用下，它的液面比闭口测压管低 $\frac{p_a}{\rho g}$ 这样一段液柱高，但液面仍然是水平的。

2. 静压强分布规律

静压强基本公式中的积分常数 C 可以用平衡液体自由表面上的边界条件：$z = z_0, p = p_0$ 来确定。

于是
$$z + \frac{p}{\rho g} = z_0 + \frac{p_0}{\rho g}$$

移项得

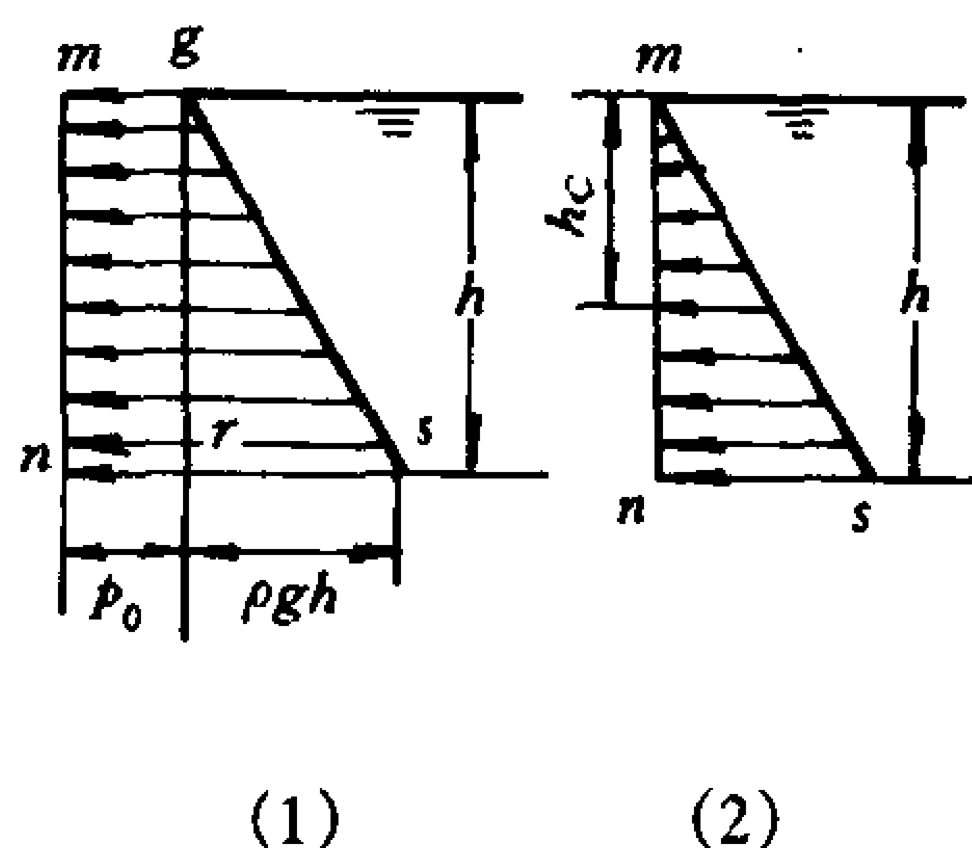
$$p = p_0 + \rho g(z_0 - z) = p_0 + \rho g h \tag{2-25}$$

这就是不可压缩流体的静压强分布规律。

公式说明一点上的流体静压强 p 是由两个独立部分组成的。一部分是自由液面上的压强 p_0，一部分是单位截面上的液柱重力 $\rho g h$。

静压强分布规律也可以用静压强分布图表示。如图 2－8(1) 所示，取一定比例尺，使 $\overline{gm} = \overline{rn} = p_0, \overline{sr} = \rho g h$，则 gs 直线与 mn 直线间的水平线段长短就代表 mn 线上各点的流体静压强大小。

如果 $p_0 = p_a = 0$,则 mn 线上的计示压强分布图如图 2－8 (2)所示。



(1)　　　　(2)

图 2－8　静压强分布图

*二、可压缩流体的静压强分布公式

可压缩流体的密度是温度和压强的函数,因此在对(2－21)式积分时,需要引用气体状态方程式$\frac{p}{\rho}=R_g T$。

重力场中可压缩流体的平衡问题在一般机械工程上应用不多,因为在有限高度上,气体重力对压强的影响十分微弱,在机械和仪器中平衡气体的压强可以认为是到处相等的。但在海拔高度比较大的航空和气象问题上,气体重力对压强的影响就不能忽视了,因此在计算地球外围的大气状况时必须应用重力场可压缩流体的静压强公式。

大气状况十分复杂,不同季节不同地区又千变万化,在航空计算上不能用一时一地的实测数据为标准,因为这样势必造成混乱,为了统一计算标准,规定如下两个条件作为“国际标准大气”:①海拔 0～11 km 为对流层,海平面温度 15 °C,压强 101 325 Pa(这就是所谓的标准大气压),对流层中随着海拔增高温度下降,其温度下降率定为 0.006 5 K/m。②海拔 11～25 km 为平流层或同温层,其温度为 $t_d=-56.5$ °C。此外大约海拔 25～90 km 为臭氧层,90～300 km 为电离层,300 km 以上为外层空间。

按照国际标准大气的条件可以推导对流层和同温层的压强公式如下。

1. 对流层

设海平面温度为 T_a,温度下降率为 β。

海拔为 z 处的温度则为 $T = T_a - \beta z$ (2-26)

将它代入气体状态方程式中,得

$$\rho = \frac{p}{R_g T} = \frac{p}{R_g(T_a - \beta z)} \tag{2-27}$$

于是(2-21)式变成

$$dp = -\rho dW = -\frac{pg dz}{R_g(T_a - \beta z)}$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g dz}{R_g(T_a - \beta z)} \tag{2-28}$$

从海平面到任意海拔高度 z 求定积分,则

$$\int_{p_a}^{p} \frac{dp}{p} = \int_0^z \frac{g}{R_g \beta} \frac{d(T_a - \beta z)}{T_a - \beta z}$$

即
$$\ln \frac{p}{p_a} = \frac{g}{R_g \beta} \ln\left(\frac{T_a - \beta z}{T_a}\right)$$

$$p = p_a\left(1 - \frac{\beta z}{T_a}\right)^{\frac{g}{R_g \beta}} \tag{2-29}$$

这就是国际标准大气对流层中的压强公式。将 $p_a = 101\ 325$ Pa,$\beta = 0.006\ 5$ K/m,$T_a = 288$ K,$R_g = 287$ J/(kg·K),$g = 9.81$ m/s^2 代入则为

$$p = 101.3\left(1 - \frac{z}{44\ 300}\right)^{5.256} \text{kPa} \tag{2-30}$$

式中 z 的单位是 m,$0 \leqslant z \leqslant 11\ 000$ m。

2. 同温层

同温层的特点是温度不变。对流层与同温层的交界处,即同温层最低处的各种参数用下标 d 表示,如 T_d、z_d、p_d 等,同温层的

温度为 $T=T_d=T_a-\beta z_d=288-0.006\ 5\times 11\ 000=216.5\ \mathrm{K}$(即 $-56.5\ ^\circ\mathrm{C}$)。

同温层最低处($z=z_d=11\ 000\ \mathrm{m}$)的压强可由(2-30)式求得为 $p_d=22.6\ \mathrm{kPa}$。

由(2-28)式得

$$\frac{\mathrm{d}p}{p}=-\frac{g\mathrm{d}z}{R_g T}=-\frac{g\mathrm{d}z}{R_g T_d}$$

以同温层最低处为积分下限,积分之,得

$$\ln\frac{p}{p_d}=-\frac{g}{R_g T_d}(z-z_d)$$

$$p=p_d\exp\left(-\frac{g(z-z_d)}{R_g T_d}\right) \qquad (2-31)$$

这就是国际标准大气同温层中的压强公式。将 T_d、p_d 数值代入,则

$$p=22.6\exp\left(\frac{11\ 000-z}{6\ 334}\right)\ \mathrm{kPa} \qquad (2-32)$$

式中 z 的单位是 m,$11\ 000\leqslant z\leqslant 25\ 000$ m。

国际标准大气条件是由地球平均纬度(45°)处的多年平均值制定的,因而按上面公式算得的大气压强与局部实测会有少许出入,但作为航空计算标准,它比局部瞬时的气象资料更有价值。而且实践证明将大气按国际标准大气计算比按等温大气、绝热大气、不可压缩大气计算都更准确。

§2-4 静压强的计算与测量

一、静压强的计算标准

不可压缩平衡液体的自由液面如果与大气连通,则公式(2-25)中的 p_0 等于大气压强 p_a,于是

$$p=p_a+\rho gh \qquad (2-33)$$

这样表示的压强显然包括大气压在内以绝对真空为计算标准。如图 2－9 所示，以绝对真空为起点计算压强大小，称为绝对压强。它反映流体分子运动的物理本质，因此在物理学、热力学、航空气体动力学上多采用绝对压强为计算标准。本书前面有关气体状态方程式中的压强都是用绝对压强计算的。

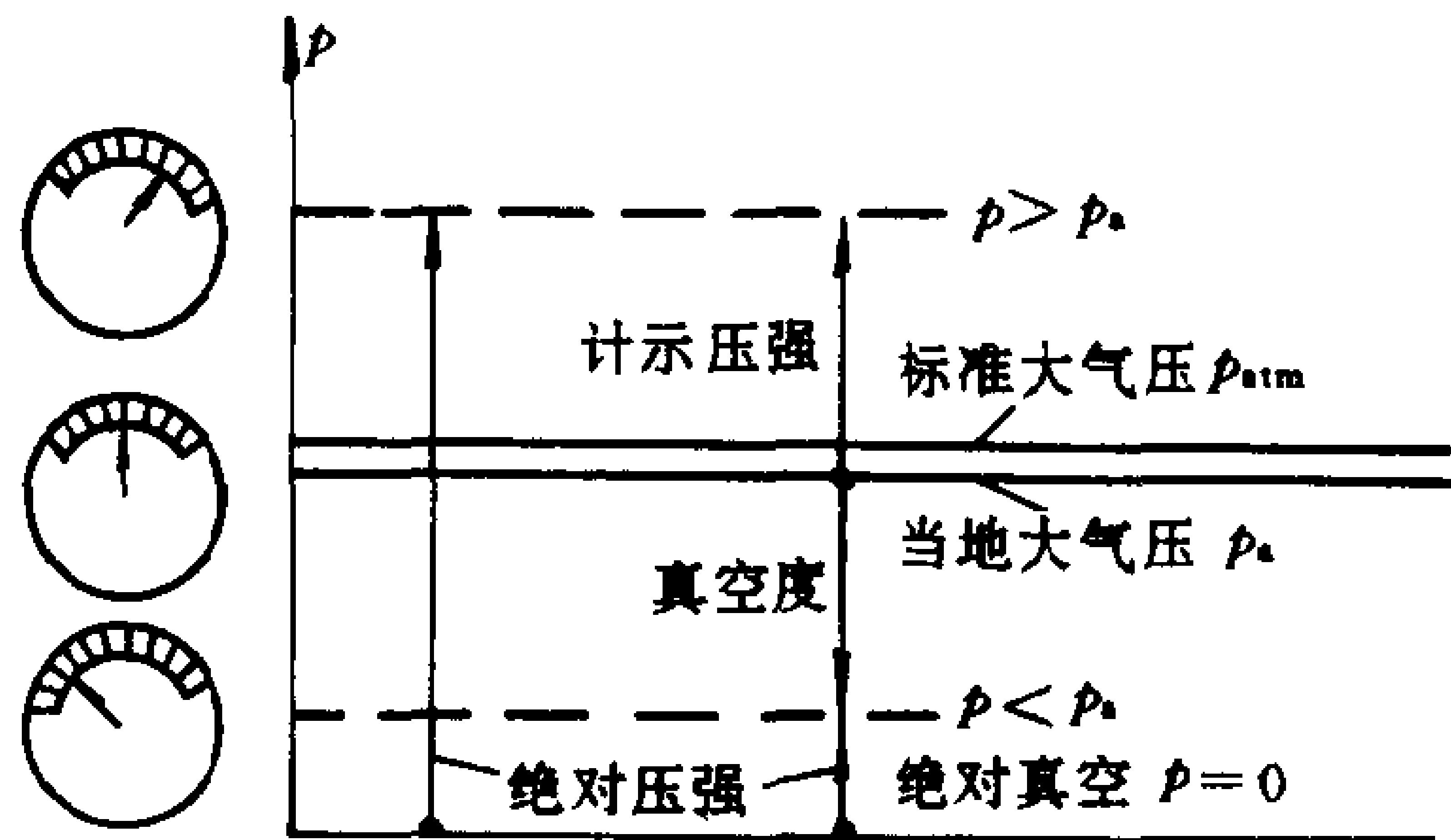


图 2－9　绝对压强、计示压强与真空度

但是工程上的测压仪表在当地大气压下的读数为零，仪表上的读数只表示流体压强比当地大气压大多少或者小多少，因此测压表是以当地大气压为计算标准，如图 2－9 所示，比当地大气压大多少的压强叫作计示压强或表压强，比当地大气压小多少的压强叫作真空度。

以当地大气压为起点计算压强，则 $p_a=0$，于是

$$p=\rho gh$$

它可能大于零，大多少就是计示压强的数值多少；它可能小于零，小多少就是真空度的数值多少。

由图 2－9 可见：

当 $p>p_a$ 时

绝对压强 = 当地大气压 + 计示压强

计示压强 = 绝对压强 − 当地大气压

当 $p<p_a$ 时

绝对压强 = 当地大气压 - 真空度

真空度 = 当地大气压 - 绝对压强

当地大气压一般用气压计测量，在不同地区、不同季节、不同气象条件下，它不是一定的数值。只有作精确实验，需要计算准确绝对压强数值时，才有必要记取气压计上的当地大气压数值。

但在一般通用性的工程计算中，用当地大气压计算反而不方便，因此在许多情况下都近似以标准大气压作为计示压强和真空度的起点。这种办法意味着忽略了当地大气压与标准大气压之间的差别。

二、静压强的计量单位

静压强计量单位有三种。

1. 应力单位　在法定计量单位中是 Pa（1 Pa = 1 N/m^2），1 bar = 10^5 Pa，应力单位多用于理论计算。

2. 液柱高单位　因为 $h=\dfrac{p}{\rho g}$，将应力单位的压强除以 ρg 即为该压强的液柱高度，测压计中常用水或汞作工作介质，因此液柱高单位有米水柱（mH_2O）、毫米汞柱（mmHg）等等，不同液柱高度的换算关系可由 $p=\rho_1 g h_1=\rho_2 g h_2$ 求得为

$$h_2=\frac{\rho_1}{\rho_2}h_1 \qquad (2-34)$$

液柱高单位来源于实验测定，因此多用于实验室计量。

3. 大气压单位　标准大气压（atm）是根据北纬 45 度海平面上 15 ℃时测定的数值。

1 标准大气压（atm）= 760 mmHg

$\qquad\qquad\qquad\qquad = 1.013\ 25$ bar $= 1.013\ 25\times10^5$ Pa

大气压单位多用于机械或航天行业，因为在高压情况下，用应力单位或液柱单位表示时则数字过大。

值得注意，上述第二、三种单位在国家标准中为不赞成使用的单位。

表 2-1 上列出各种压强单位的换算关系。其中 1.013 25 简化为 1.013，表中单位 bar(巴)只供参考。它不是我国法定计量单位。1 bar=0.987 atm，即 1 bar 近似等于 1 个标准大气压，故而有时也称 1 bar 为 1 个大气压。

表 2-1　压强单位及其换算关系表

帕 Pa	巴 bar	标准大气压 atm	毫米汞柱 mmHg	米水柱 mH_2O
1	10^{-5}	0.987×10^{-5}	750×10^{-5}	10.2×10^{-5}
10^5	1	0.987	750	10.2
1.013×10^5	1.013	1	760	10.33
133	0.001 33	0.001 32	1	0.013 6
9 810	0.098 1	0.0968	73.5	1

[**例题 2-2**]　在图 2-10 所示的装置中 $h_1=1.2$ m，$h_2=1$ m，$h_3=0.8$ m，$h_4=1$ m，$h_5=1.5$ m，大气压强 $p_a=101\ 300$ Pa，水 $\rho=1\ 000$ kg/m³，酒精 $\rho'=790$ kg/m³。相对于液体来说可以认为空气密度为 0，试求 1、2、3、4、5、6 各点的绝对压强及 M_1、M_3、M_6 三个压强表的计示压强或真空度。

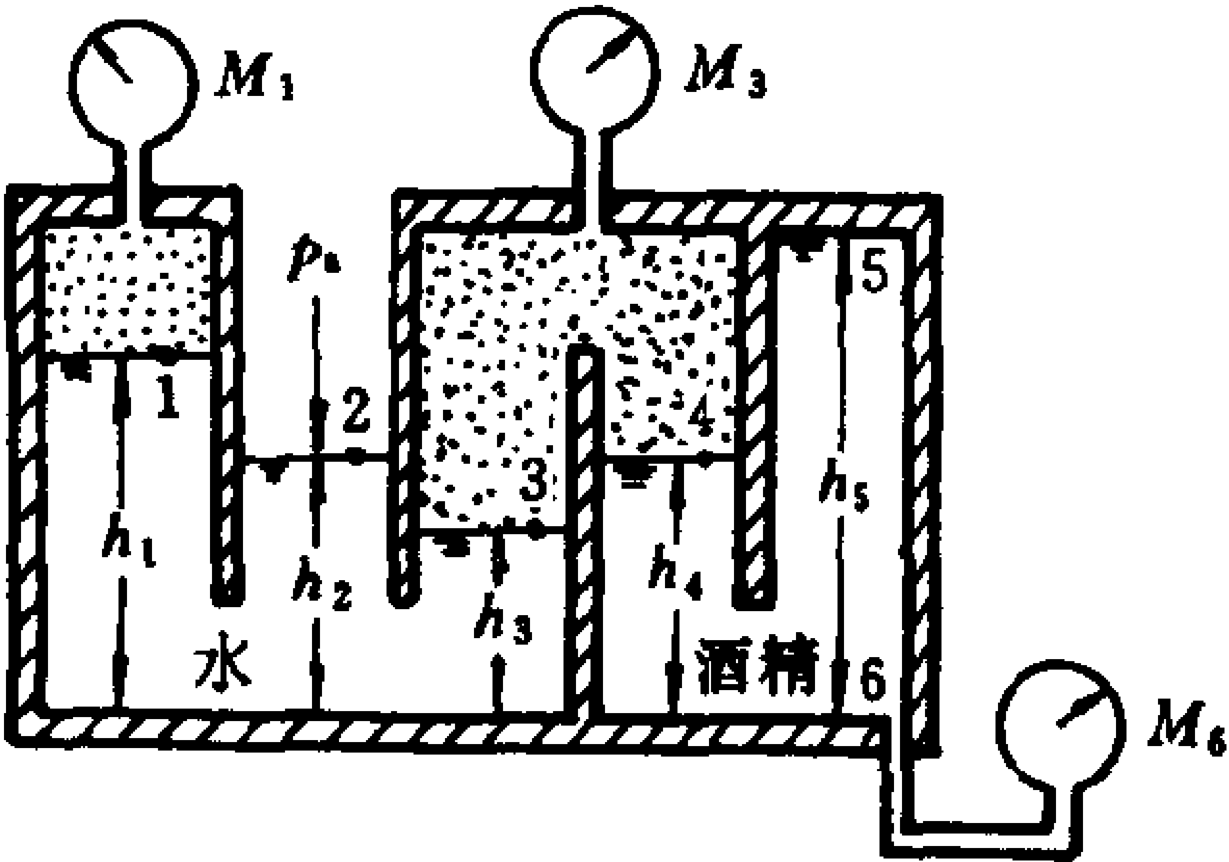


图 2-10　压强计算用图

[**解**]　根据静压强基本公式，在密度为 ρ 的连续静止液体中，如果已知一点的静压强为 p_0，则与之相差 h 高度处的另一点的静压强为

$$p=p_0+\rho gh$$

对 1、2 两点来说：

$$p_2 = p_1 + \rho g(h_1 - h_2)$$

令 $p_2 = p_a$ 有

$$p_1 = p_a - \rho g(h_1 - h_2) = 101\ 300 - 1\ 000 \times 9.81 \times (1.2 - 1)$$

$$= 99\ 300 \text{ Pa}\ (\text{绝对压强})$$

$$p_{M1} = p_a - p_1 = 101\ 300 - 99\ 300 = 2\ 000 \text{ Pa}(\text{真空度})$$

对 2、3 两点来说：

$$p_3 = p_2 + \rho g(h_2 - h_3) = p_a + \rho g(h_2 - h_3)$$

$$= 101\ 300 + 1\ 000 \times 9.81 \times (1 - 0.8)$$

$$= 103\ 300 \text{ Pa}\ (\text{绝对压强})$$

$$p_{M_3} = p_3 - p_a = 103\ 300 - 101\ 300 = 2\ 000 \text{Pa}(\text{计示压强})$$

又空气密度为 0，有

$$p_4 = p_3 = 103\ 300 \text{Pa}(\text{绝对压强})$$

对 4、5 两点来说：

$$p_5 = p_4 - \rho' g(h_5 - h_4) = p_3 - \rho' g(h_5 - h_4)$$

$$= p_2 + \rho g(h_2 - h_3) - \rho' g(h_5 - h_4)$$

$$= 101\ 300 + 9.81 \times (1\ 000 \times 0.2 - 790 \times 0.5)$$

$$= 101\ 100 \text{ Pa}\ (\text{绝对压强})$$

对 4、6 两点来说：

$$p_6 = p_4 + \rho' g h_4 = p_3 + \rho' g h_4$$

$$= p_2 + \rho g(h_2 - h_3) + \rho' g h_4$$

$$= 101\ 300 + 9.81 \times (1\ 000 \times 0.2 + 790 \times 1)$$

$$= 111\ 000 \text{ Pa}\ (\text{绝对压强})$$

$$p_{M6} = p_6 - p_a = 111\ 000 - 101\ 300 = 9\ 700 \text{ Pa}\ (\text{计示压强})$$

三、静压强的测量

流体静压强的测量仪表主要有三种：金属式、电测式和液柱式。金属式中使待测压强与金属弹性元件的变形成比例，可测计示压强的叫压强表，可测真空度的叫真空表，金属式量程较大，多用于液压传动中。电测式将弹性元件的机械变形转化成电阻、电容、电感等电量，便于远距离测量及动态测量。液柱式仪表测量精度高，但量程较小，一般用于低压实验场所。常见的液柱式仪表有

下述几种。

1. 测压管

如图 2－11(1)可测水中大于大气压的计示压强 $p=\rho gh$；图 2－11(2)可测空气中小于大气压的真空度 $p=\rho gh$。

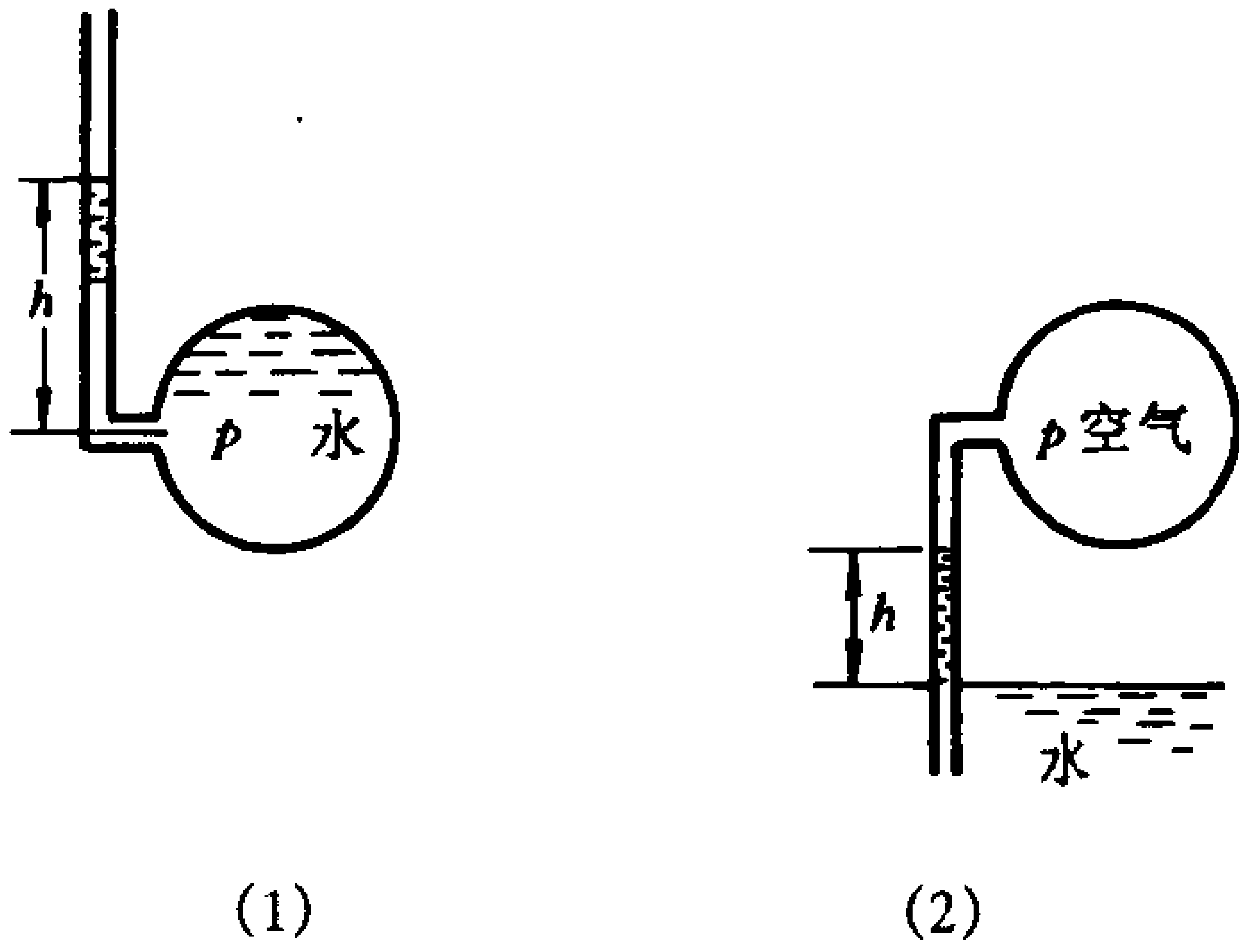


图 2－11 测压管

此种测压管一般需注意毛细管现象的影响，其内径以不小于 5 mm 为宜。

2. U 形测压计

如图 2－12(1)，在连续静止的汞中，1、2 两点在等压面上，故 $p_1=p_2$。

因为在右支管中

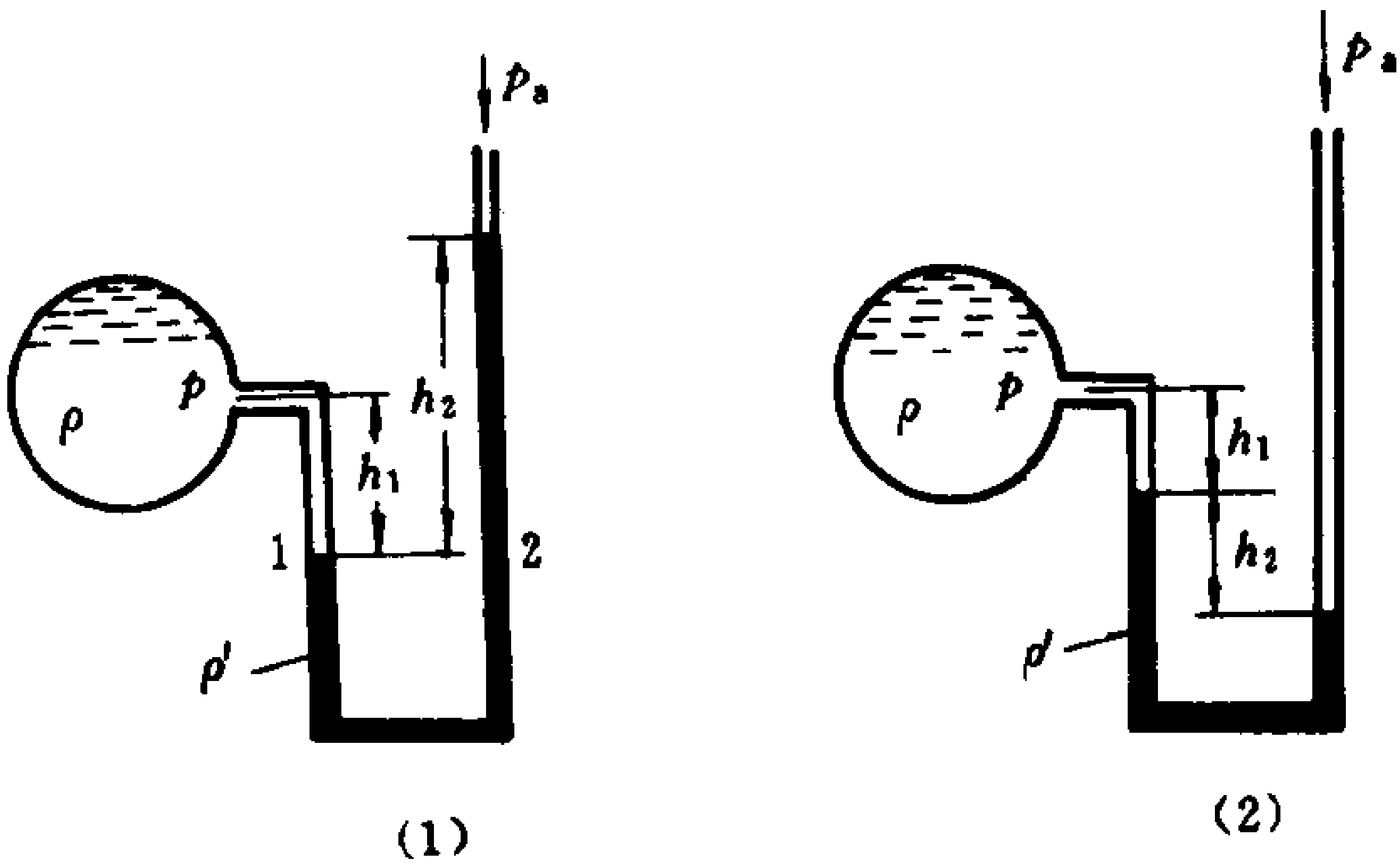


图 2－12 U 形测压计

$$p_2 = p_a + \rho' g h_2$$

在左支管中

$$p_1 = p + \rho g h_1$$

于是 $$p + \rho g h_1 = p_a + \rho' g h_2$$

由此可得测点上的绝对压强为

$$p = p_a + g(\rho' h_2 - \rho h_1) \tag{2-35}$$

其计示压强为

$$p = g(\rho' h_2 - \rho h_1) \tag{2-36}$$

如果测点上的压强小于大气压，则如图 2－12(2)所示，测点的绝对压强为

$$p = p_a - g(\rho' h_2 + \rho h_1) \tag{2-37}$$

其真空度为

$$p = g(\rho' h_2 + \rho h_1) \tag{2-38}$$

3. 差压计

测量两点压强差的仪器叫差压计，差压计在流体力学实验室中使用得比较广泛。最简单的两种差压计如图 2－13 所示，水管下部为 U 形管式汞差压计，它的计算公式为

$$p_1 - p_2 = (\rho' - \rho) g h \tag{2-39}$$

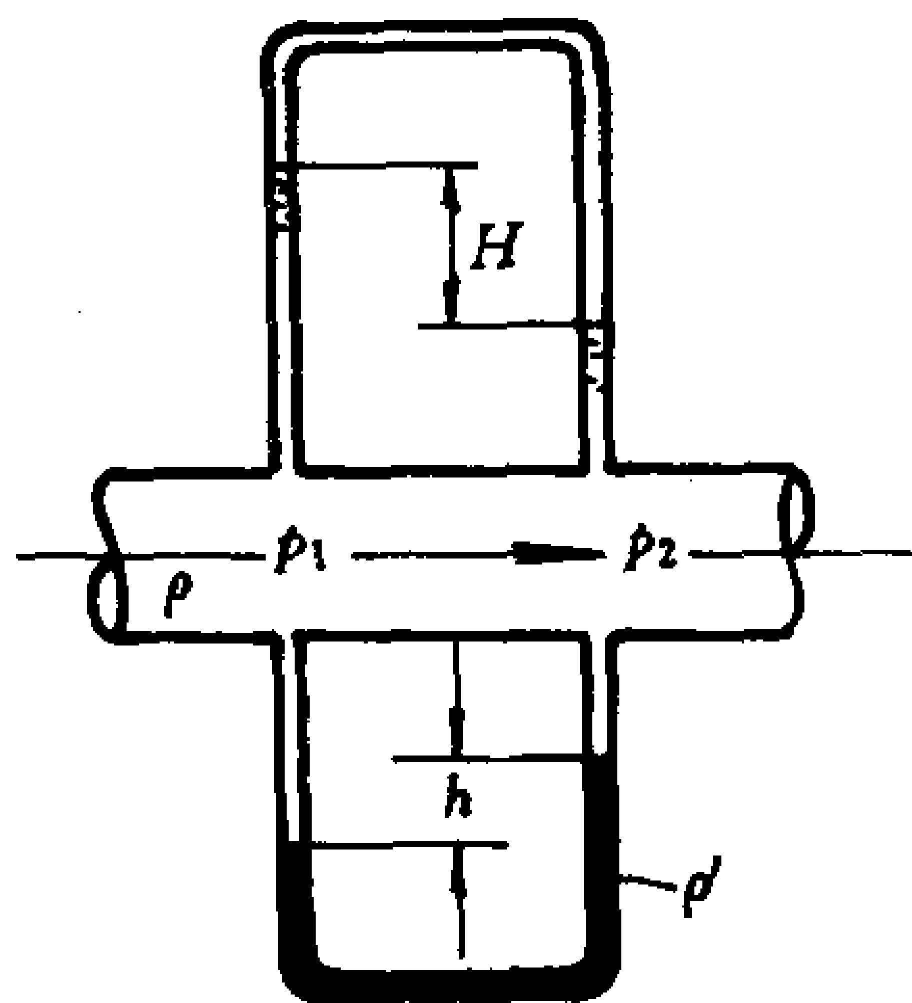


图 2－13　差压计

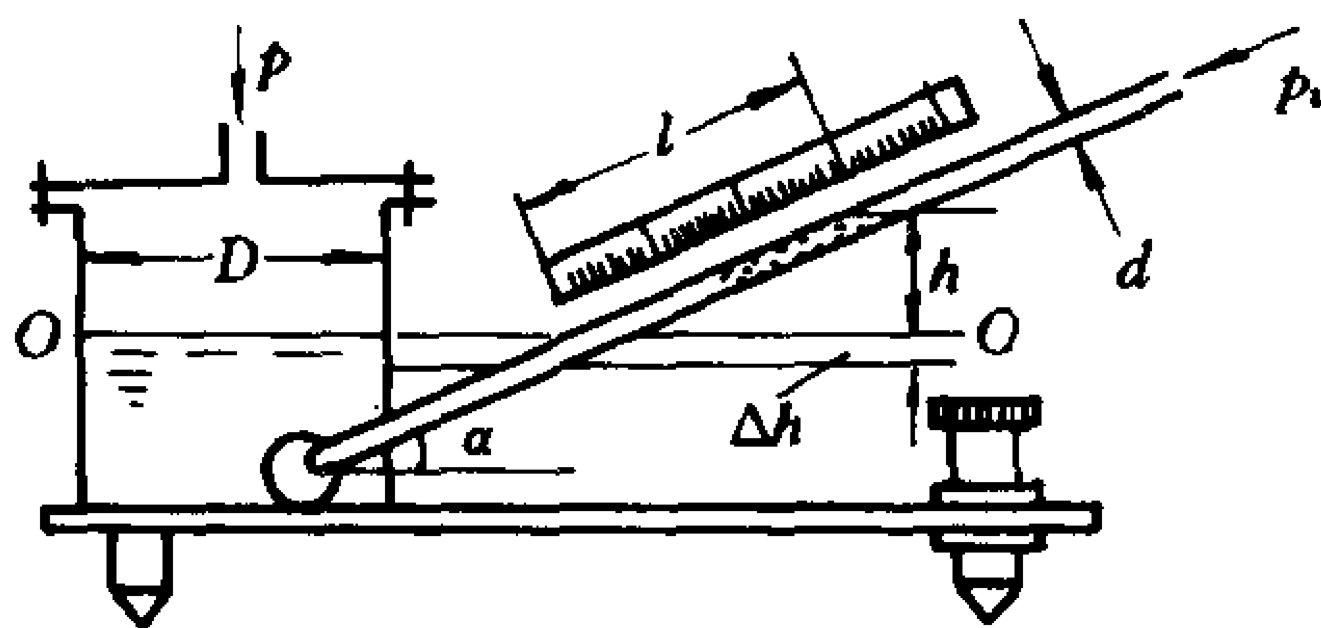


图 2－14　斜管式微压计

管道上部为倒 U 形管式水柱差压计，忽略空气密度，则其计算公式为

$$p_1 - p_2 = \rho g H \tag{2-40}$$

比较(2－39)及(2－40)式可见，在仪器管长一定的前提下，汞差压计量程大，而水柱差压计的准确度高。

4．微压计

测量较小压强或压强差的仪器叫微压计。如图 2－14 所示的斜管式微压计就是最常用的一种。它右边的测管可以绕枢轴转动从而倾斜成较小的锐角 α，测管及与之连通容器的横截面直径分别用 d 和 D 表示，仪器中液体密度用 ρ 表示，仪器的原始液面为 0—0，当待测的气体压强 $p(>p_a)$引入容器后，可使容器中液面下降 Δh，测管中液面上升 h，形成平衡，于是

$$p - p_a = \rho h(h + \Delta h) \tag{2-41}$$

从原始液面算起，上下变动的液体体积应该相等(这一原则在其它液压计上也常常应用)

$$\frac{\pi}{4} D^2 \Delta h = \frac{\pi}{4} d^2 l$$

$$\Delta h = \left(\frac{d}{D}\right)^2 l \tag{2-42}$$

将(2－42)式代入(2－41)式，则待测的计示压强为

$$p - p_a = \rho g\left[h + l\left(\frac{d}{D}\right)^2\right] = \rho g l\left[\sin\alpha + \left(\frac{d}{D}\right)^2\right] \tag{2-43}$$

待测的绝对压强为

$$p = p_a + \rho h l\left[\sin\alpha + \left(\frac{d}{D}\right)^2\right] \tag{2-44}$$

如果测管的直径 d 远远小于容器的直径 D，认为 $\left(\frac{d}{D}\right)^2 \approx 0$，也就是忽略容器中的液面变化，则计示压强为

$$p - p_a = \rho g l \sin\alpha \tag{2-45}$$

由此可见 α 越小，则 l 越大(实际上 α 也不能过小，否则斜管

中液面读数不易准确)。在适当的小倾斜角下即使待测的计示压强不大,但倾斜标尺上也仍有可观的读数,尤其是微压计中所用的液体 ρ 较小时(例如用密度小于水的酒精等),则斜管式微压计的放大效果更加明显。

微压计放大效果更显著的是例题 2-3 所示的双杯二液式微压计。

[**例题 2-3**] 如图 2-15,这种微压计是由 U 形管连接的两个相同圆杯所组

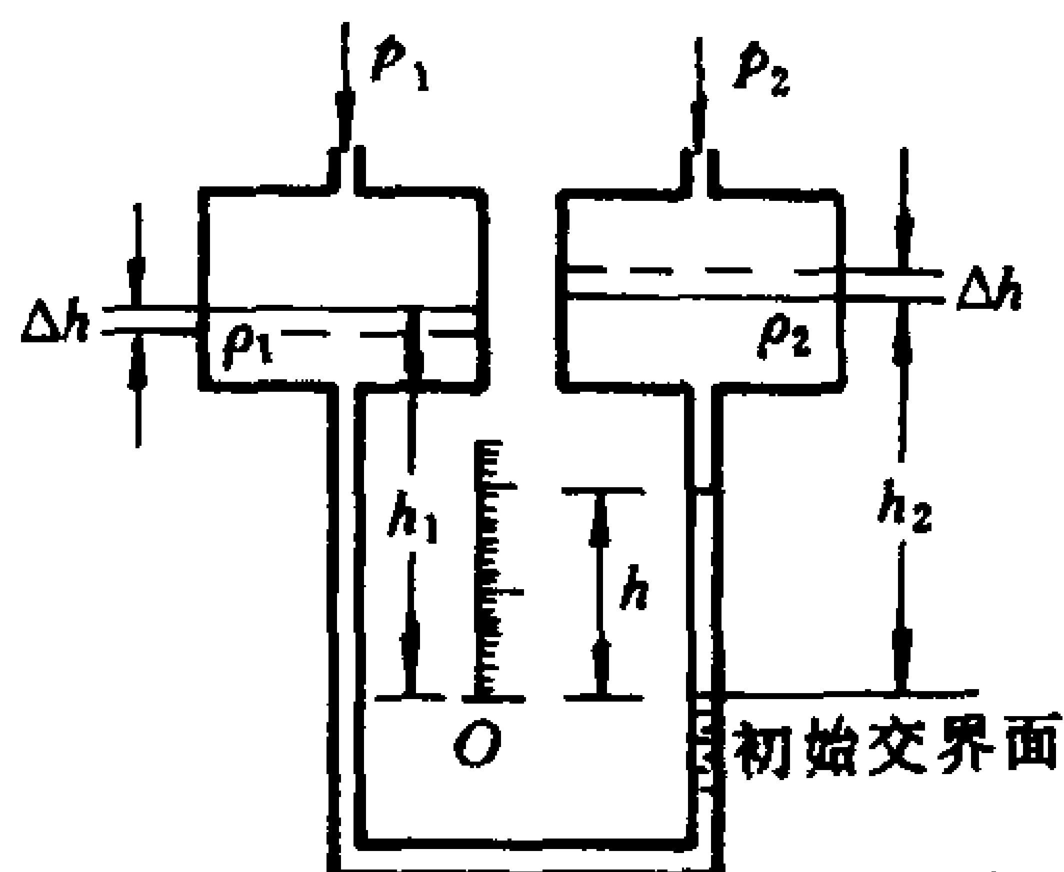


图 2-15 杯式二液式微压计

成,两杯中分别装入互不混合而又密度相近的两种工作液体(酒精的水溶液 $\rho_1 = 870\ \text{kg/m}^3$,煤油 $\rho_2 = 830\ \text{kg/m}^3$),当气体压强差 $\Delta p = p_1 - p_2 = 0$ 时,两种液体的初始交界面在标尺 O 点处,已知 U 形管直径 $d = 5$ mm,杯直径 $D = 50$ mm。试确定使交界面升至 $h = 280$ mm 时的压强差 Δp。

[**解**] 设两杯中初始液面距离为 h_1 及 h_2。当 U 形管中交界面上升 h 时,左杯液面下降及右杯液面上升均为 Δh。则由于初始平衡状态可知

$$\rho_1 h_1 = \rho_2 h_2 \tag{2-46}$$

由于 U 形管与杯中升降的体积相等,可得

$$\Delta h \cdot \frac{\pi}{4} D^2 = h\ \frac{\pi}{4} d^2$$

$$\Delta h = \left(\frac{d}{D}\right)^2 h \tag{2-47}$$

以变动后的 U 形管中的交界面为基准,分别列出左右两边的液体平衡基本公式可得

$$p_1+\rho_1(h_1-\Delta h-h)g$$
$$=p_2+\rho_2(h_2+\Delta h-h)g$$

将(2-46)及(2-47)式代入后整理，即得

$$\Delta p=p_1-p_2$$
$$=h\left[(\rho_1-\rho_2)+(\rho_1+\rho_2)\left(\frac{d}{D}\right)^2\right]g \qquad (2-48)$$

代入已知数据，将 $g=9.81\ \mathrm{m/s^2}$ 乘入方括号中，则得

$$\Delta p=0.28\left[(8\ 530-8\ 140)+(8\ 530+8\ 140)\times\frac{1}{100}\right]$$
$$=156\ \mathrm{Pa}$$

或换算成水柱，则

$$h=\frac{\Delta p}{\rho g}=\frac{156}{1\ 000\times 9.81}=0.016\ \mathrm{mH_2O}=16\mathrm{mmH_2O}$$

由此计算结果可知：

本来压强差 Δp 只有 16 mm 水柱之微，而现在用双杯二液式微压计却可以得到 280 mm 的读数，这充分显示出微压计的放大效果，U 形管与杯直径之比越小，两种液体的相对密度差越小，则放大效果越显著。

§2-5 平衡流体对壁面的作用力

工程上常常遇到计算油箱、水箱、密封容器、管道、锅炉、水池及堤坝等结构物的强度，计算液体中潜浮物体的受力，以及液压油缸、活塞及各种形状阀门的受力等等问题，这种平衡流体作用在壁面上的力就是流体静压力。流体静压力的大小、方向、作用点当然都与受压面的形状及受压面上流体静压强的分布有关。如果受压面积上的静压强相同，则 $F=pA$，这种简单情况无需讨论。下面主要介绍受压面上各点静压强不同时，如何计算壁面上的流体静压力的问题。

一、任意空间壁面上的流体静压力

如图 2-16 所示，在与平衡液体相接触的空间壁面 A 上任取一个微元面积 ΔA，它的矢量式为 $\Delta\boldsymbol{A}=\boldsymbol{n}\Delta A$，或取极限时 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}=$

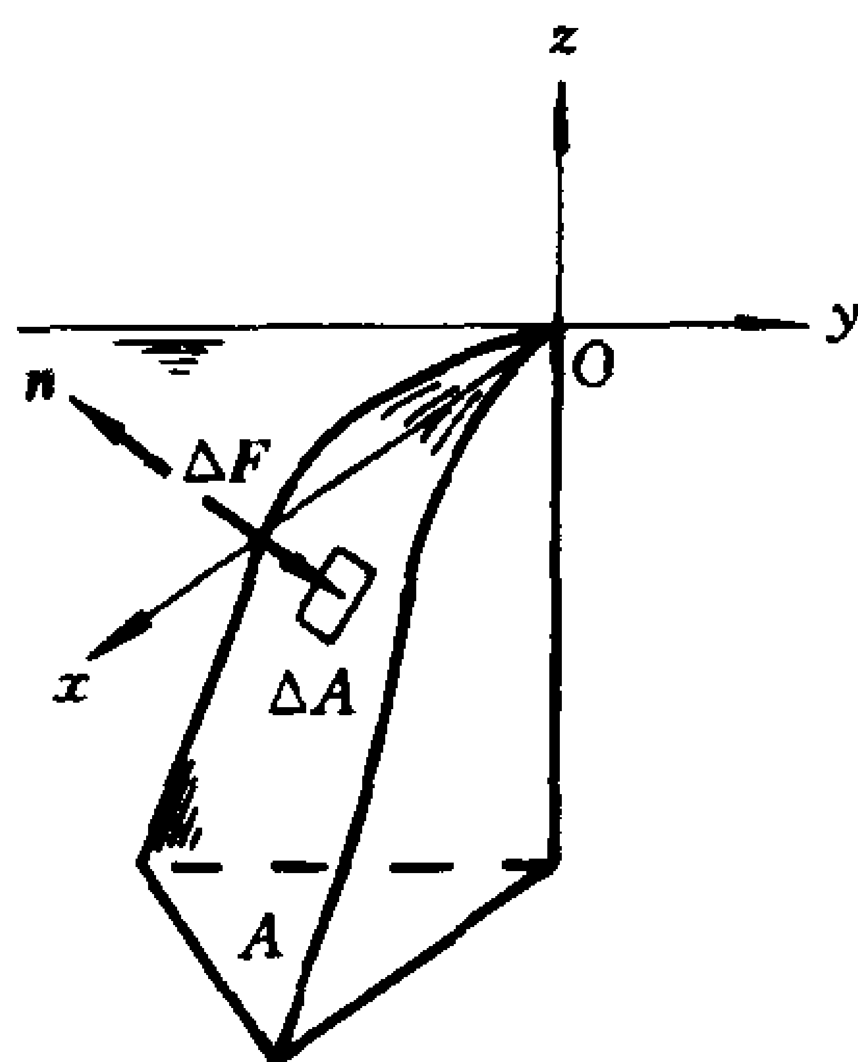


图 2-16　空间壁面

$\boldsymbol{n}\mathrm{d}A$，假定它的淹没深度是 h，则其计示压强 $p=\rho gh$，于是微元面积上的流体静压力为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=p(-\boldsymbol{n}\mathrm{d}A)$$

整个受压面积 A 上的流体静压力为

$$\boldsymbol{F}=\int_A p(-\boldsymbol{n}\mathrm{d}A)=\int_A \rho gh(-\boldsymbol{n}\mathrm{d}A)=\rho g\int_A(-\boldsymbol{n})h\mathrm{d}A \tag{2-49}$$

计算壁面上的流体静压力时，式中的静压强 p 一般只用计示压强即可，因为壁面无论是全部或部分与液体接触，它四面八方所受大气压的作用都是互相平衡的。以大气压为零的计示压强计算，则无需考虑未与液体接触的部分壁面上的大气压作用，这样要简单得多。

对空间壁面来说，(2-49)式所表示的流体静压力实际是一个空间非平行力系的矢量和，为了积分方便，通常将微元面积上的流体静压力 dF 投影在 x、y、z 三个坐标轴上，可得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{F}&=\mathrm{d}F_x\boldsymbol{i}+\mathrm{d}F_y\boldsymbol{j}+\mathrm{d}F_z\boldsymbol{k}\\&=\mathrm{d}F\cos\alpha\,\boldsymbol{i}+\mathrm{d}F\cos\beta\boldsymbol{j}+\mathrm{d}F\cos\gamma\boldsymbol{k}\\&=p\mathrm{d}A\cos\alpha\boldsymbol{i}+p\mathrm{d}A\cos\beta\boldsymbol{j}+p\mathrm{d}A\cos\gamma\boldsymbol{k}\\&=p\mathrm{d}A_x\boldsymbol{i}+p\mathrm{d}A_y\boldsymbol{j}+p\mathrm{d}A_z\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

式中 α、β、γ 是微元面积矢的方向角，$\mathrm{d}A_x$、$\mathrm{d}A_y$、$\mathrm{d}A_z$ 是微元面积的三个投影面积，它们分别垂直于 x、y、z 轴，于是沿每个坐标方向即可得到一组平行力系，对平行力系求和即可得出作用在空间壁面上流体静压力的三个分量为

$$\left.\begin{aligned}F_x &= \int_{A_x} p\,\mathrm{d}A_x = \rho g\int_{A_x} h\,\mathrm{d}A_x = \rho g h_C A_x\\ F_y &= \int_{A_y} p\,\mathrm{d}A_y = \rho g\int_{A_y} h\,\mathrm{d}A_y = \rho g h_C A_y\\ F_z &= \int_{A_z} p\,\mathrm{d}A_z = \rho g\int_{A_z} h\,\mathrm{d}A_z = \rho g V_F\end{aligned}\right\} \tag{2-50}$$

式中前两个积分式中，由于 h 与微元面积 $\mathrm{d}A_x$ 或 $\mathrm{d}A_y$ 平行，积分结果为对水平轴的面积矩，$\rho g h_C$ 为投影面积 A_x 或 A_y 的形心处的计示压强。

(2－50)式的最末一个积分式中，水深 h 与微元面积 $\mathrm{d}A_z$ 是垂直关系，因而积分式是一个纯几何体积，这个体积由曲面 A、经曲面外缘所作的铅直投影面及液面(或液面延伸面)所围成，这体积用 V_F 表示，称为压力体体积。$\rho g V_F$ 称为压力体液重。即(2－50)的最末一式说明：作用在壁面上流体静压力的铅直分力 F_z 等于曲面上方压力体体积的液重。

这里需要注意的是，压力体体积是个纯几何体积，压力体液重 $\rho g V_F$ 才具有力的量纲。

(2－50)式的三个分力如果能交于一点，则可以求出作用在曲面 A 上的静压力的大小为

$$F=\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2} \tag{2-51}$$

静压力的方向可由下列三个方向余弦确定：

$$\cos\alpha=\frac{F_x}{F},\cos\beta=\frac{F_y}{F},\cos\gamma=\frac{F_z}{F} \tag{2-52}$$

静压力的矢量作用线与曲面 A 的交点称为压力中心 D。在

壁面具体形状给定之后，作用在壁面上的静压力和压力中心都是容易确定的。

空间壁面是一种普遍情况，下面讨论平面、柱面、封闭曲面三种特例，这三种情况在工程上是有实用价值的。

二、平面、柱面、封闭曲面上的流体静压力

［**特例1**］ 平面上的流体静压力

如图2-17所示，平面 A 与液面倾斜成 α 角。

图2-17 平面上的流体静压力

假定平面有一个对称轴 LL，面积的形心 C 及压力中心 D 都在对称轴上。

取微元面积 ΔA，则微元面积上的流体静压力大小为

$$\mathrm{d}F = p\mathrm{d}A = \rho gh\mathrm{d}A = \rho g\sin\alpha l\mathrm{d}A$$

对平行力系求和，则可得平面 A 上的静压力为

$$F = \int_A \mathrm{d}F = \rho g\sin\alpha\int_A l\mathrm{d}A = \rho g\sin\alpha l_C A = \rho g h_C A \qquad (2-53)$$

为了求出压力中心 D 在 l 方向上的坐标 l_D，可将平行力系对 Om 轴取矩，得

$$l_D = \frac{\int_A l\mathrm{d}F}{F} = \frac{\rho g\sin\alpha\int_A l^2\mathrm{d}A}{\rho g h_C A}$$

$$=\frac{\rho g\sin\alpha I_m}{\rho g\sin\alpha l_C A}=\frac{I_m}{l_C A} \qquad (2-54)$$

式中 l_C 是平面A 的形心C 点的l 坐标。

$\int_A l^2 \mathrm{d}A=I_m$ 是平面面积A 对Om 轴的惯性矩，如果用 I_C 表示面积A 对于通过其形心C 且与Om 平行的CC 轴的惯性矩，则由材料力学中的惯性矩平行换轴公式可得

$$I_m=I_C+l_C^2 A \qquad (2-55)$$

代回(2－54)式，则

$$l_D=\frac{I_C}{l_C A}+l_C \qquad (2-56)$$

因为$\frac{I_C}{l_C A}>0$，所以 $l_D>l_C$，即压力中心 D 恒在平面形心C 的下方。这两点 l 坐标之差

$$l_D-l_C=\frac{I_C}{l_C A}=\varepsilon \qquad (2-57)$$

也称为偏距，偏距 $\varepsilon>0$。

(2－56)式就是用解析法求得的压力中心坐标的公式。为便于计算，现将工程上常用的几何平面图形的惯性矩 I_C、形心坐标 s 及图形面积 A 列于表 2－2 中。

[**特例 2**]　柱面上的流体静压力

如图 2－18 所示，柱面在坐标面 Oyz 上投影为一条ab 曲线，因而沿 x 方向没有作用力，从(2－50)式可以直接得出

$$\left.\begin{aligned}F_y&=\rho g h_C A_y\\F_z&=\rho g V_F\end{aligned}\right\} \qquad (2-58)$$

于是合力大小为 $F=\sqrt{F_y^2+F_z^2}$，合力方向为 $\tan\theta=\frac{F_y}{F_z}$。

工程上常需计算高压下油管或筒形容器的抗张强度，如图 2－19所示，管中最大可能的压强为 p，它均匀作用在内径为D、

表 2-2　几种平面图形的 I_C、s 及 A 值

平面图形		对于通过形心而与对称轴垂直的 $C-C$ 轴的惯性矩 I_C	图形顶点(边)到形心的距离 s	面积 A
矩形		$\frac{1}{12}bl^3$	$\frac{1}{2}l$	bl
三角形		$\frac{1}{36}bl^3$	$\frac{2}{3}l$	$\frac{1}{2}bl$
梯形		$\frac{1}{36}l^3\left(\frac{a^2+4ab+b^2}{a+b}\right)$	$\frac{1}{3}l\left(\frac{a+2b}{a+b}\right)$	$\frac{1}{2}l(a+b)$

(续表)

平面图形		对于通过形心而与对称轴垂直的 $C-C$ 轴的惯性矩 I_C	图形顶点(边)到形心的距离 s	面积 A
圆形	R, s, C, C	$\frac{1}{4}\pi R^4$	R	πR^2
半圆形	R, C, s, C	$\frac{(9\pi^2-64)}{72\pi}R^4$	$\frac{4}{3}\frac{R}{\pi}$	$\frac{1}{2}\pi R^2$
环形	s, r, C, R, C	$\frac{1}{4}\pi(R^4-r^4)$	R	$\pi(R^2-r^2)$
椭圆形	a, s, C, C, b	$\frac{1}{4}\pi a^3 b$	a	πab

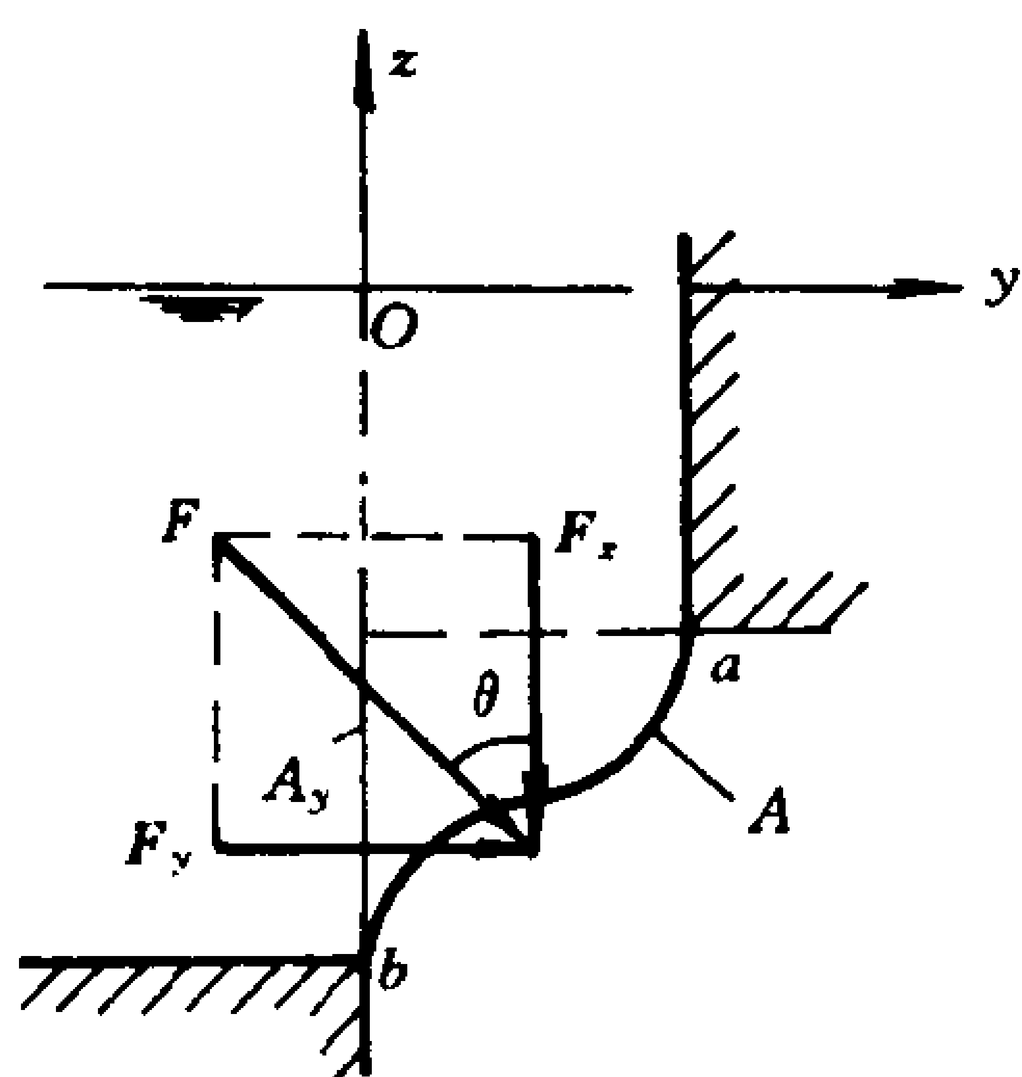


图 2-18　柱面上的流体静压力

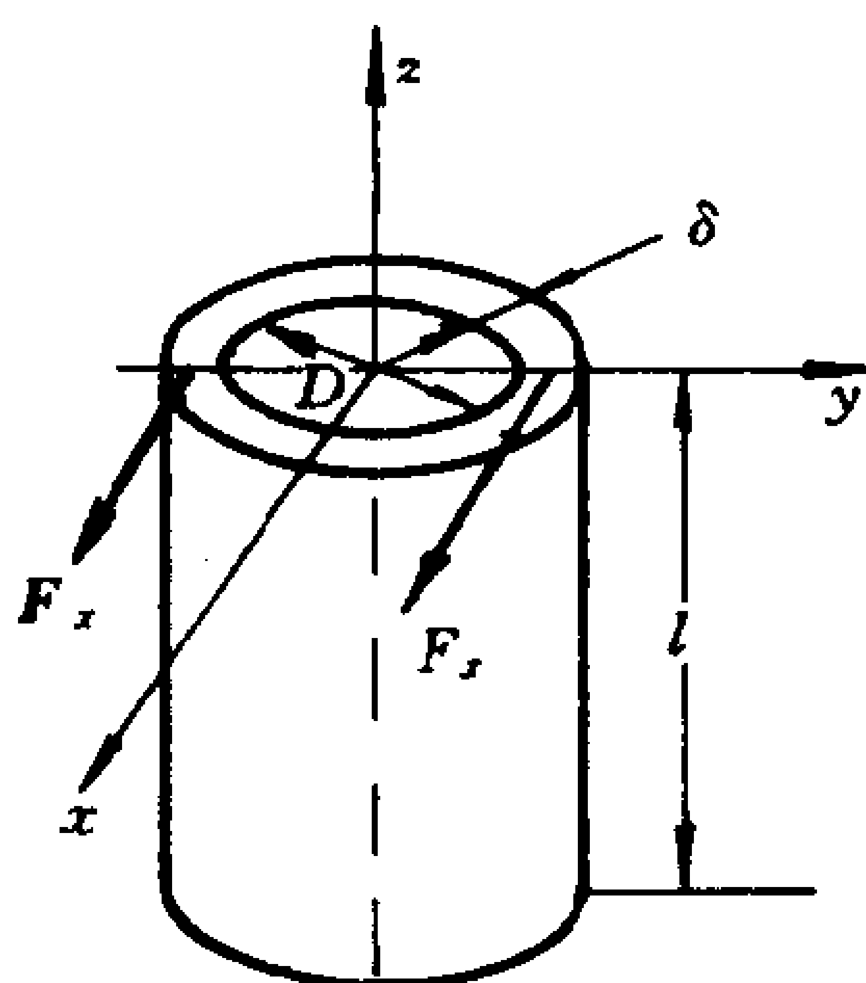


图 2-19　圆管抗张强度

长度为 l 的管内壁的圆柱面上，设使管断裂之张力为 F_x，则按公式(2-58)可得

$$F_x = F_y = pA_y = pDl$$

在壁厚为 δ 的两侧断面上产生的应力为

$$\sigma = \frac{F_x}{2l\delta} = \frac{pD}{2\delta} \tag{2-59}$$

只要 σ 小于管材的许用应力，则在正常情况下，管子就不会破裂。

［**特例 3**］　封闭曲面上的流体静压力

体积为 V 的固体完全沉没在静止液体中，则成为有封闭曲面的潜体，如图 2-20 所示。

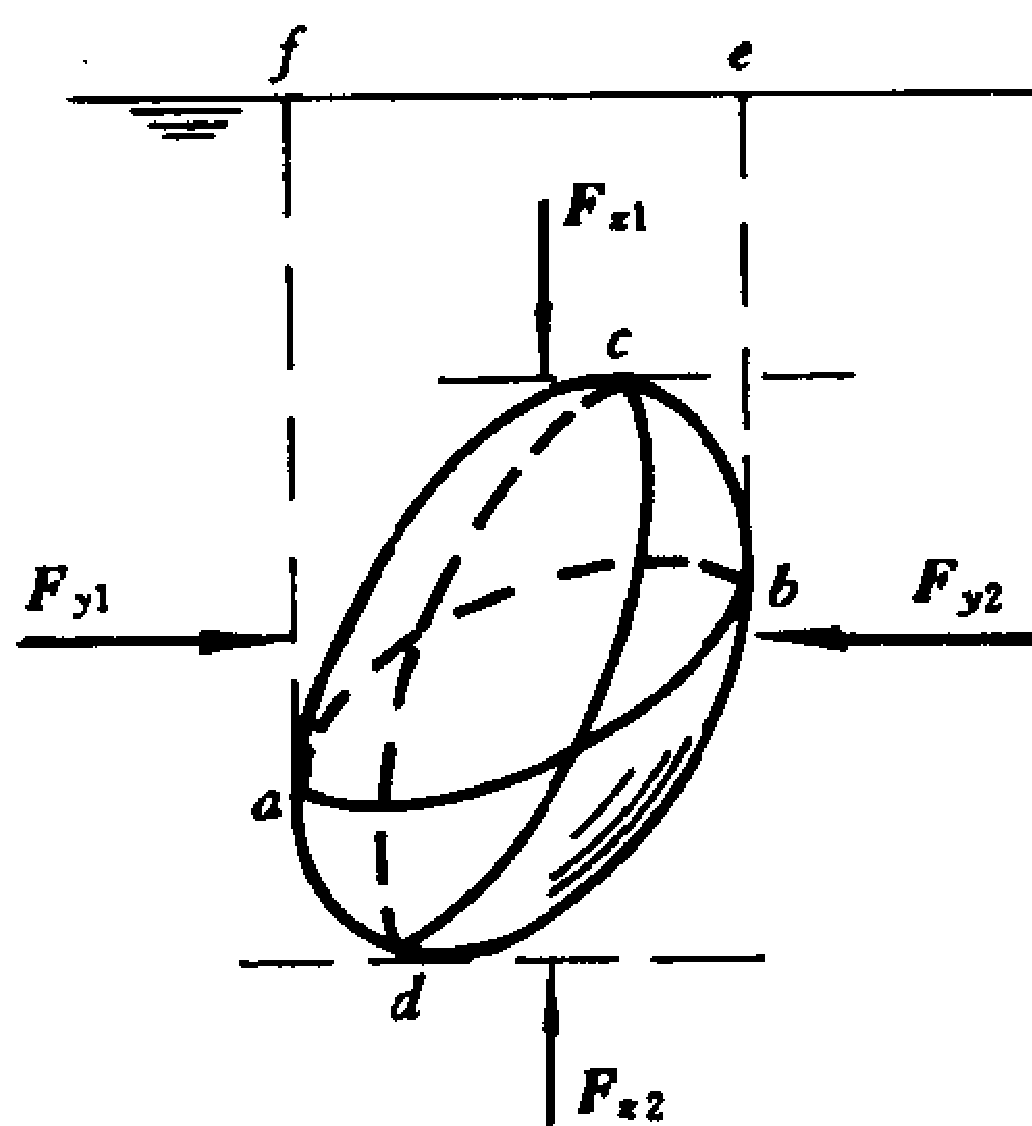


图 2-20　潜体上的流体静压力

水平母线与物面接触点的连线将物面分割成左、右两个部分，左半部曲面 cad 与右半部曲面 cbd 上所受到的水平分压力 F_{y1} 与 F_{y2} 大小相等方向相反而且作用在

同一条直线上，因而整个潜体水平方向的流体静压力为零。

铅直母线与物面接触点的连线将物面分割成上、下两个部分，上半部曲面 acb 上的铅直分压力方向向下，大小等于压力体 $acbef$ 的液重，而下半部曲面 adb 上的铅直分压力方向向上，大小等于压力体 $adbef$ 的液重，因而整个潜体铅直方向的流体静压力大小为

$$F_z = F_{z2} - F_{z1} = \rho g(V_{adbef} - V_{acbef}) = \rho g V \qquad (2-60)$$

方向向上，压力中心也就是潜体的形心。

不难证明，对于部分沉没在液体中，部分露在液面上的所谓浮体，上述结论也是同样适用的，只不过此时压力体不是物体全部，而是沉没在液体中的那部分体积。

铅直向上作用在潜体或浮体上的流体静压力通称为浮力，这样我们就证明了物理上著名的阿基米德(Archimedes)原理：

作用在潜体或浮体上的浮力或者说物体在液体中所减轻的重力等于它所排开的同体积的液重。

三、压力体

计算曲面或平面上的铅直分压力，需用到压力体的概念。由(2-50)式可知压力体是由积分式 $\int_A h\,dA_z$ 所确定的纯几何体积，它与这块体积中究竟有无液体却又没有关系，例如图 2-21 所示的四个柱面 ab，假如它们本身尺寸完全相同，而且柱面在液面下的距离也完全相同，则根据积分所得的压力体体积 $V_F = V_{abcd}$ 也是完全相同的。

由此可见所谓的压力体液重并不是压力体内实有的液体重力。上面四个柱面的压力体中有的充满液体，有的部分充有液体，有的则完全没有液体，但这四个柱面上的压力体积既然相同，则乘以液体 ρg 后所得的压力体液重，亦即四个柱面上的铅直分压力的大小，也是完全相等的(当然，铅直分压力的方向则需要根据液体在壁面之上还是在壁面之下来确定)。

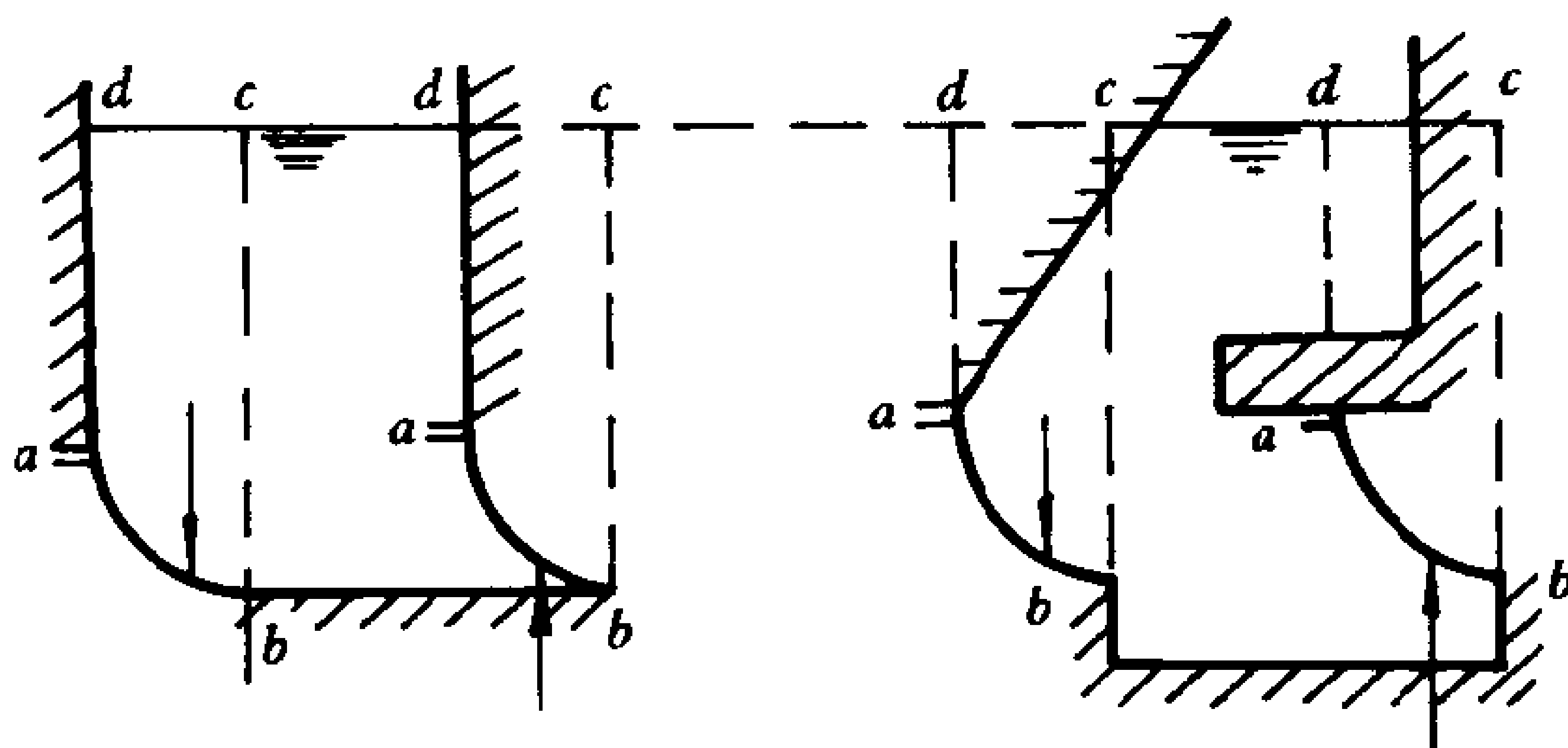


图 2-21　曲面上的压力体

这说明压力体液重并不一定就是压力体内实际具有的液体重力，它只是为计算铅直分压力大小而引入的一个虚构概念。

[**例题 2-4**]　在水箱底部 $\alpha=60^\circ$ 的斜平面上，如图 2-22，装有一个直径 $d=0.5$ m 的圆形泄水阀，阀的转动轴通过其中心 C 且垂直于纸面，为了使水箱内的水不经阀门外泄，试问在阀的转动轴上需施加多大的锁紧力矩？

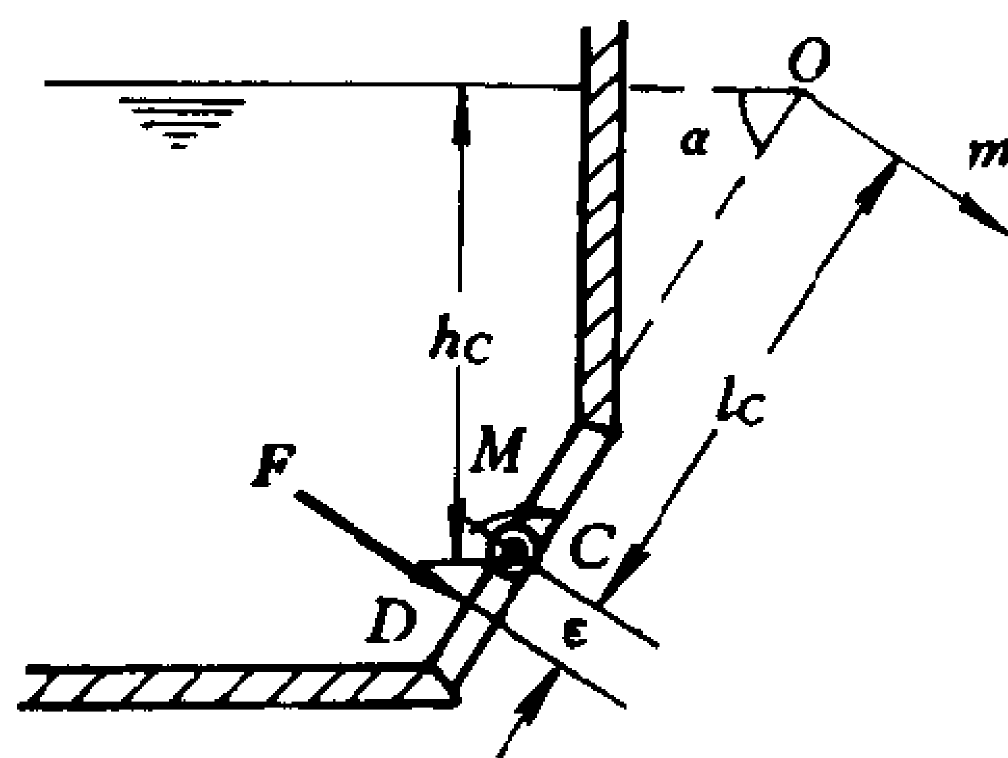


图 2-22　水箱上的泄水阀

[**解**]　设阀中心 C 点的水深为 h_C，压力中心 D 到阀心 C 的偏距为 s。

由(2-53)式得

$$F=\rho g h_C A=\rho g h_C\,\frac{\pi d^2}{4}$$

由(2-57)式及表 2-2 得

$$\varepsilon=\frac{I_C}{l_C A}=\frac{\dfrac{\pi d^4}{64}}{\dfrac{h_C}{\sin\alpha}\cdot\dfrac{\pi d^2}{4}}=\frac{\sin\alpha d^2}{16h_C}$$

设施加在转动轴上的力矩为 M，则由力矩平衡可得

$$F\varepsilon+M=0$$

$$M=-F\varepsilon=-\frac{\rho g h_C\pi d^2}{4}\cdot\frac{\sin\alpha d^2}{16h_C}=-\frac{\rho g\pi\sin\alpha d^4}{64}\qquad(2-61)$$

$$=-\frac{9\,810\times\pi\times\sin 60^\circ\times0.5^4}{64}=-26\ \text{N}\cdot\text{m}$$

即在阀的转轴上需施加顺时针方向力矩 26 N·m 则可使水不外泄。

由(2－61)式还可看到所需的力矩与水深无关，因为 F 与 h_C 成正比，而 ε 与 h_C 成反比，二者的影响正好互相抵消。

[**例题 2－5**] 用熔化生铁(相对密度为 7)铸造带凸缘的半球形零件，如图 2－23，已知 $H=0.5$ m、$D=0.8$ m、$r=0.3$ m、$\delta_1=15$ mm、$\delta_2=25$ mm、$d=20$ mm，试求铁水作用在砂箱上的力。

[**解**] 铁水向上作用在砂箱上的力等于压力体的液重，压力体是由直径 D、高 H 的圆柱体再减去被铁水占据的下列三部分体积；

(1) 半径为 $r+\delta_1$ 的半球；

(2) 内半径 $r+\delta_1$、外半径$\frac{D}{2}$、厚 δ_2 的小圆环；

(3) 直径 d，高 $H-(r+\delta_1)$的小圆柱。

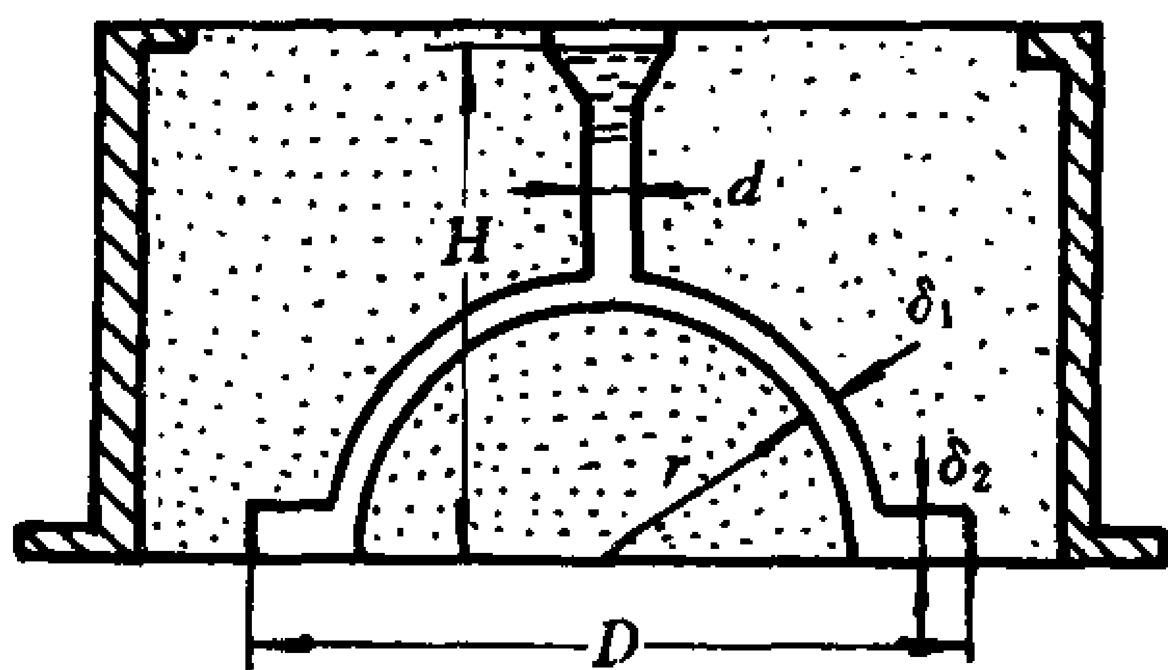


图 2－23 铸件砂箱

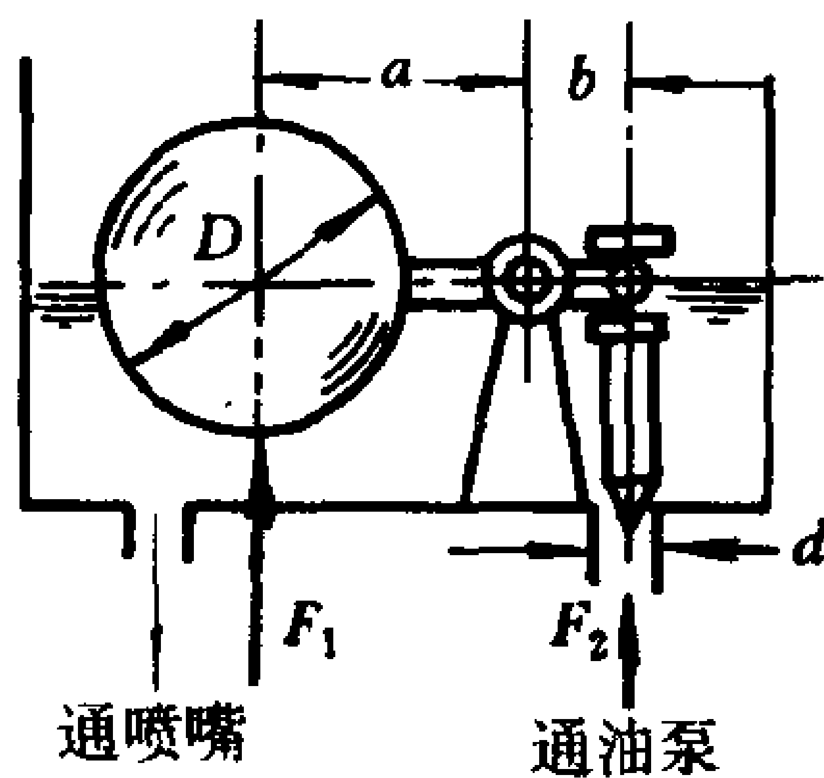


图 2－24 汽油机浮子室

$$F=\rho g V_F=\rho g\left\{\frac{\pi}{4}D^2H-\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi(r+\delta_1)^3\right.$$
$$\left.-\pi\left[\left(\frac{D}{2}\right)^2-(r+\delta_1)^2\right]\delta_2-\frac{\pi}{4}d^2[H-(r+\delta_1)]\right\}$$

将铁水密度 $\rho=1\,000\times7=7\,000$ kg/m^3 及其他已知数据代入，可得

$$F=12\,430\text{ N}$$

[**例题 2－6**] 图 2－24 为汽油机燃料供给系统的浮子室，利用浮球沉浮控制针阀开闭，使浮子室中油面不变用以保证汽油机喷嘴的恒定供油量。

已知 $a=50$ mm, $b=15$ mm, $d=5$ mm,浮子质量 $m_1=10.2$ g,针阀质量 $m_2=5.1$ g,汽油密度 $\rho=678$ kg/m^3,从汽油泵来的计示压强 $p=40$ kPa,杠杆质量忽略。

试按浮子淹没一半的条件设计浮子的直径 D。

[解] 用 F_1 表示浮力,用 $F_2=p\dfrac{\pi}{4}d^2$ 表示针阀铅直方向的流体静压力。列出对杠杆铰点的力矩平衡方程式为

$$(F_1-m_1g)a+(m_2g-F_2)b=0$$

解得: $F_1=(F-m_2g)\dfrac{b}{a}+m_1g=\left(p\dfrac{\pi}{4}d^2-m_2g\right)\dfrac{b}{a}+m_1g$

因 $m_1g=10.2\times10^{-3}\times9.81=0.1$ N; $m_2g=5.1\times10^{-3}\times9.81=0.05$N,

所以 $F_1=\left(40\times10^3\times\dfrac{\pi}{4}\times0.005^2-0.05\right)\times\dfrac{0.015}{0.05}+0.1=0.32$ N

根据阿基米德原理,浮力 F_1 应等于半球体积的汽油重力,即

$$F_1=\rho g\frac{\pi}{12}D^3$$

而 $\rho g=678\times9.81=6\ 650$ N

所以 $D=\sqrt[3]{\dfrac{12F_1}{\pi\rho g}}=\sqrt[3]{\dfrac{12\times0.32}{\pi\times6\ 650}}=0.057\ \text{m}=57\ \text{mm}$

* §2-6 液压机械的工作原理

利用平衡液体传递动力的机械统称为液压机械,液压机械包括水压机、油压机、液压千斤顶、液力蓄能机、液力倍压器、液压传动等等。

由(2-25)式, $p=p_0+\rho gh$,可知静止液体中各点的静压强均包含 p_0,如果通过加压的办法改变液面上的 p_0,则各点压强均发生同样大小的变化,即施加于平衡流体中的压强以等值向各个方向传递,这就是液压机械传递动力所遵循的帕斯卡(Pascal)原理。

在液压机械中,流体压强较高,因位置高差而引起的压强变化项 ρgh 均可忽略。

下面简单介绍几种液压机械的工作原理。

一、液压机

图 2－25 为液压机示意图，它的两个重要部分是泵和压力机，泵是动力源，压力机是工作机械。

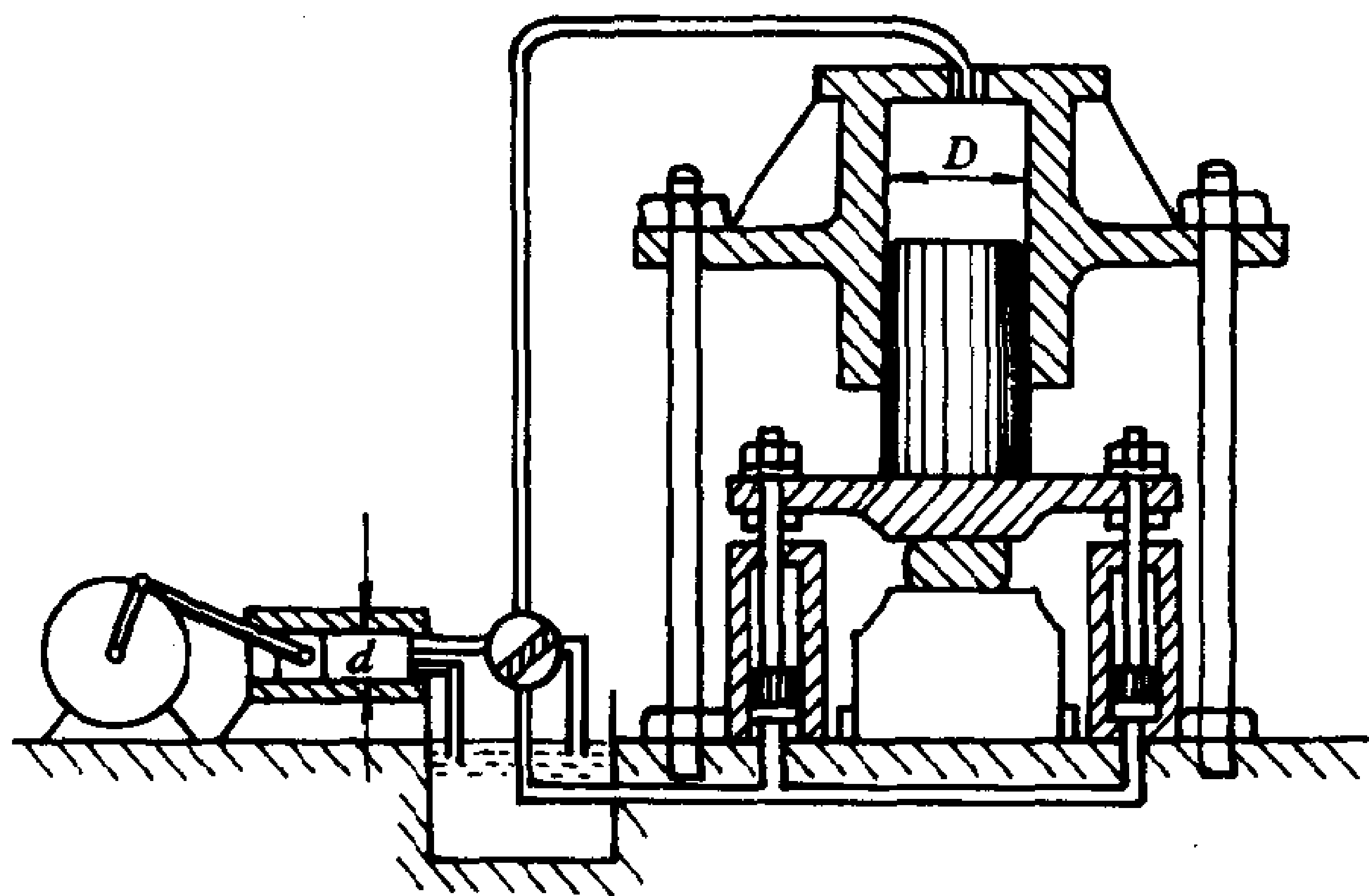


图 2－25　液压机示意图

泵的油缸直径 d 小于压力机油缸直径 D。

$$p=\frac{4F_1}{\pi d^2}=\frac{4F_2}{\pi D^2}$$

所以

$$F_2=F_1\left(\frac{D}{d}\right)^2 \tag{2-62}$$

压力机活塞上的力 F_2 远大于活塞泵上的 F_1，这就是液压机的基本原理。示意图上简示出由操纵阀控制的正反行程的管路，实际液压机设备上还常配有倍压器、蓄能机等许多辅助装置。

二、液力倍压器

液力倍压器(如图 2－26 所示)亦称液力放大器，它的功用不是直接提高流体静压力而是提高流体静压强。

由水泵来的液体静压强为 p_1，作用在活动缸筒上产生静压力 F，此力又传给活动缸筒中的液体，于是

$$F = p_1 \frac{\pi D^2}{4} = p_2 \frac{\pi d^2}{4}$$

所以
$$p_2 = p_1 \left(\frac{D}{d}\right)^2 \tag{2-63}$$

活动缸筒中的液体得到一个比 p_1 大$\left(\frac{D}{d}\right)^2$倍的压强 p_2。在液压机系统中将此压强再输往工作机械，自然会产生更大的作用力。

液力倍压器不止用于液压机，它在液压传动、气动传动方面也有许多应用。

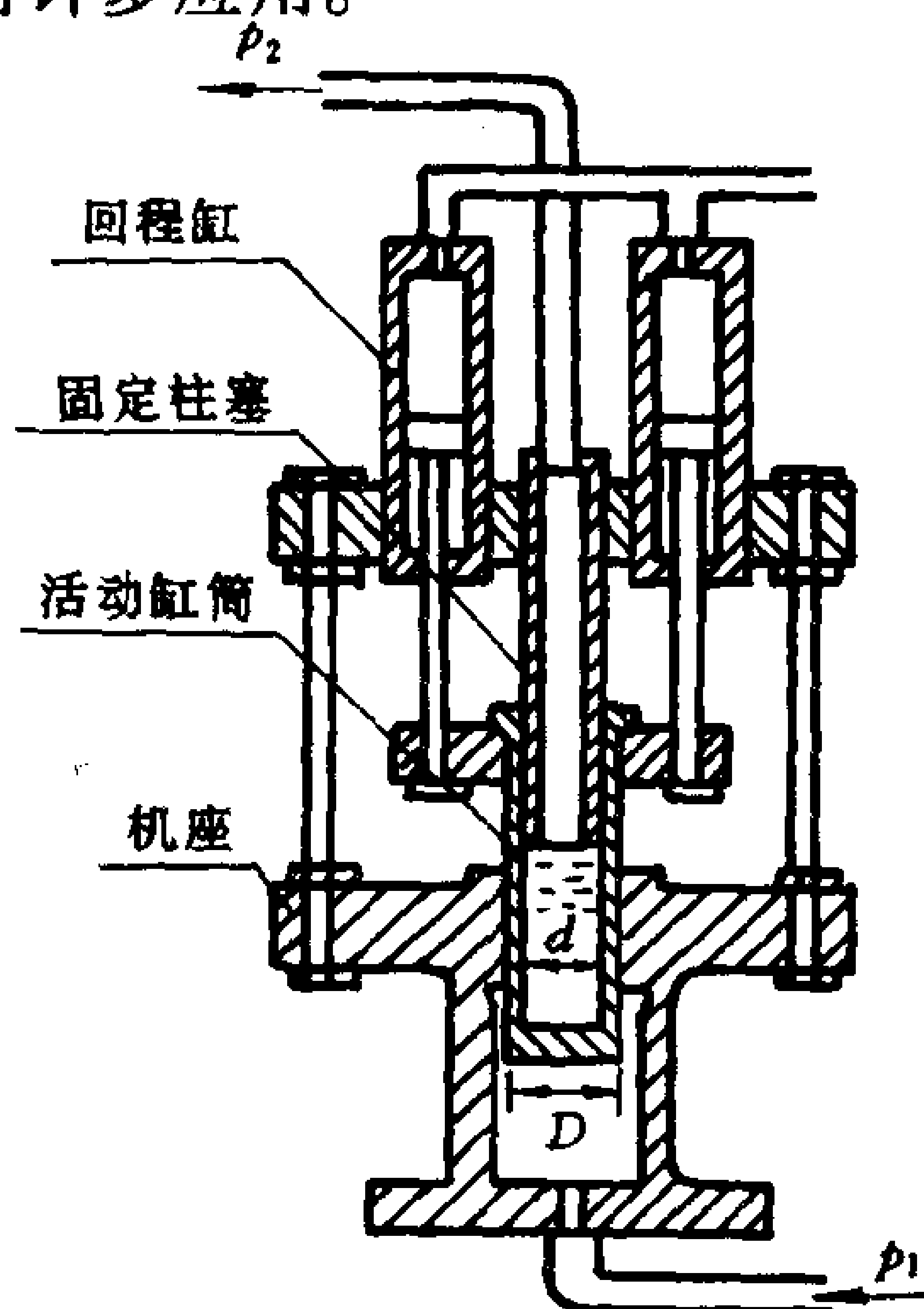


图 2－26　液力倍压器

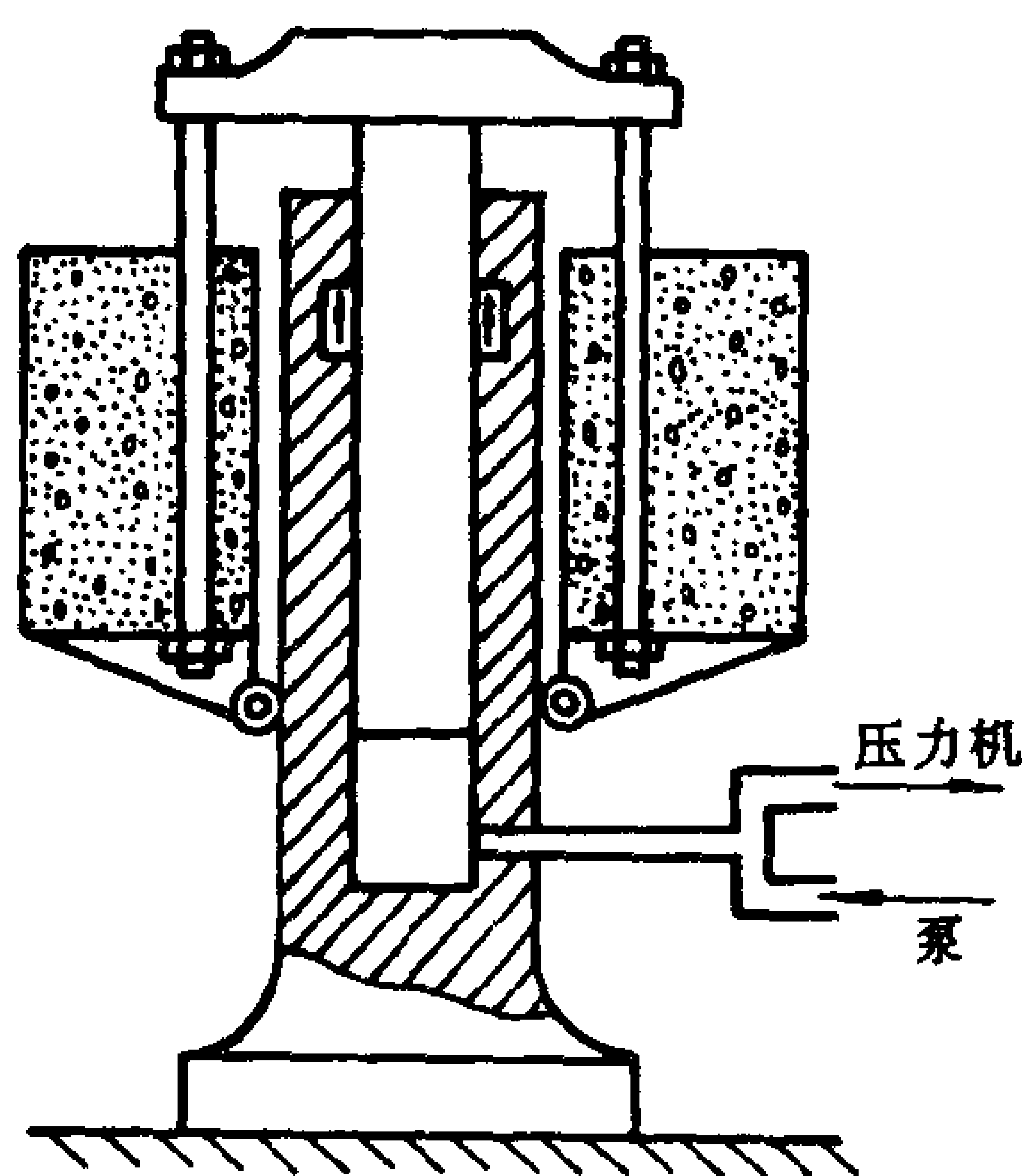


图 2－27　液力蓄能机

三、液力蓄能机

压力机是间断性工作而泵是连续性工作的，当压力机不工作时，泵出来的液体及其能量进入蓄能机中储存起来，当压力机工作时，蓄能机再将液体和能量释放出来。这样不但解决了间断和连续工作之间的矛盾，而且可以合理降低泵的使用功率。如图 2－27 所示，如果重物及活塞的总重力为 W，升举高度为 H，摩擦力为 F，则输入能量为$(W+F)H$，输出能量为$(W-F)H$，蓄能机

的效率为

$$\eta=\frac{W-F}{W+F} \tag{2-64}$$

四、液压千斤顶

修理汽车时，将液压千斤顶顶在车架下面，一个人摇动手柄，很快就可将很重的汽车支架起来，这充分显示出液体压强的效能。

如图 2－28 所示，液压千斤顶主要有两部分：

上部是直径为 d 的手动柱塞油泵，下部是直径 $D\gg d$ 的液压油缸。

摇动手柄则油泵柱塞上下往复运动。柱塞向上时，油池中的油经单向阀 1 被吸入油泵中腔；柱塞向下时，经过单向阀 2 将油压出，高压油的压力使液压缸筒连同油泵一起向上运动以承受负载 F_2。如果将卸荷阀打开则高压油返回油池卸除载荷。

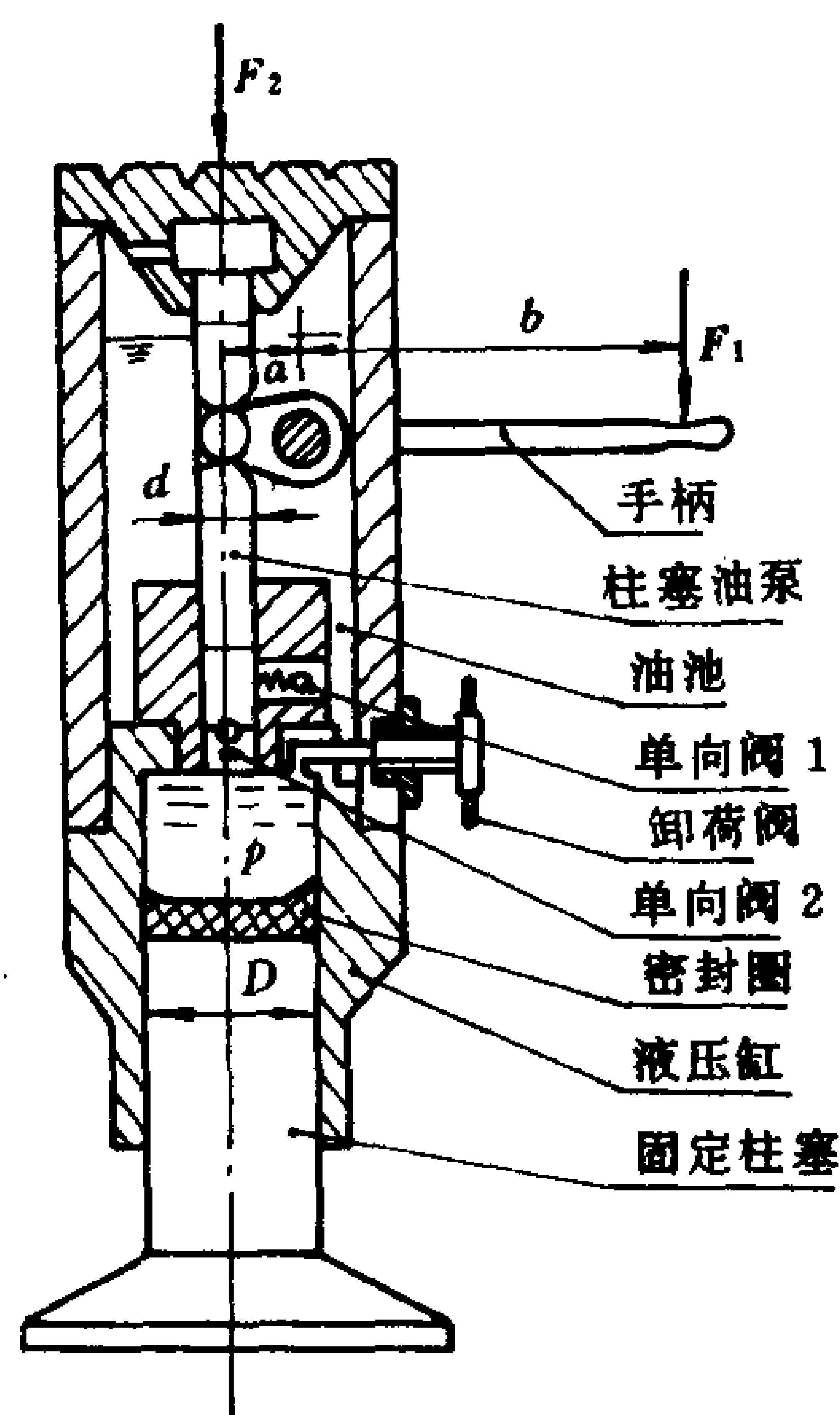


图 2－28　液压千斤顶

设杠杆比$\frac{b}{a}=10$,直径比$\frac{D}{d}=10$,忽略摩擦,则手力

$$F_1=\frac{a}{b}\left(p\frac{\pi d^2}{4}\right)$$
$$=\frac{a}{b}\frac{F_2}{\frac{\pi}{4}D^2}\frac{\pi d^2}{4}$$

所以力比

$$\frac{F_2}{F_1}=\frac{b}{a}\left(\frac{D}{d}\right)^2=1\ 000$$

可见“千斤顶”一词绝非夸张,液压效能何止千斤。

五、液压传动

图 2-29 所示机床往复运动的液压传动系统是最简单的典型实例,它包括液压传动所必需的四个组成部分:

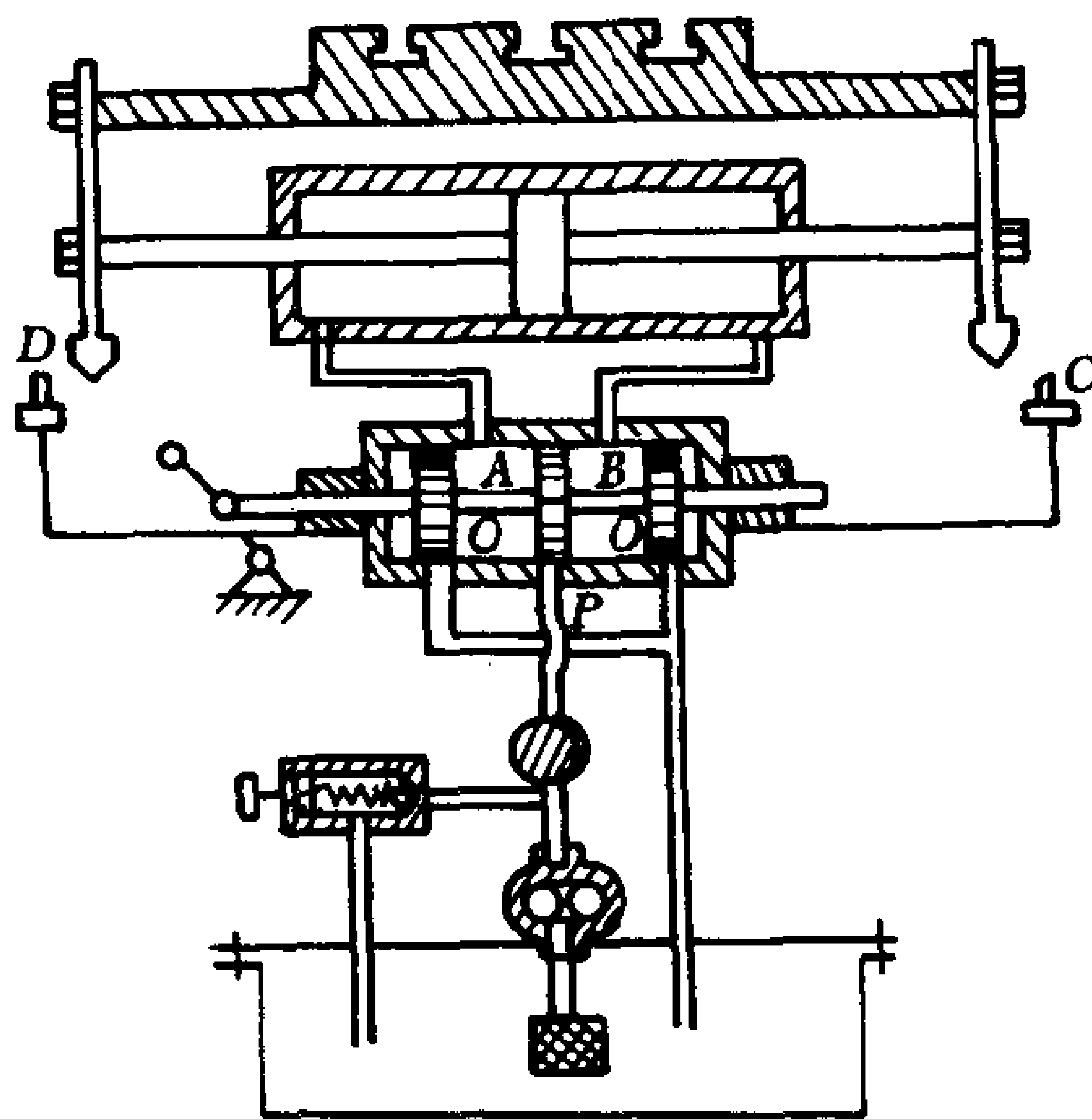


图 2-29 机床往复运动的液压传动系统

(1) 液压泵,将机械能转化为液体压能;

(2) 液动机,将液体压能转化为机械的直线运动(液压缸)或回转运动(液压马达);

(3) 控制阀,包括控制液流方向的换向阀、控制压强的溢流阀、控制流量的节流阀等;

(4) 液压辅件,如油箱、滤油器等。

液压泵工作时将油经节流阀输送至换向阀的入口 P,图示位置油路不通,油压增大后只能克服溢流阀的弹簧力流回油箱。如果用手柄使换向阀向右移,则 P 口和 A 口连通,高压油进入液压缸左腔推动活塞及机床工作台向右运动,此时液压缸右腔的油经 B 口及 O 口流回油箱。工作台运动到规定的极右位置时,挡块将右边的行程开关 C 压下,换向阀受电磁力控制向左移,P 口与 B 口连通,A 口与 O 口连通,于是活塞及工作台向左运动,至规定的极左位置再将行程开关 D 压下,继续循环如此实现工作台的自动往复直线运动。

液压传动的工作原理就是用原动机带动液压泵对液动机活塞所封闭住的液体进行体积压缩,使流体静压强及作用在液动机活塞上的流体静压力持续增长,直到克服液动机的负载及阻力时,迫使液动机运动达到传递动力的目的。在这里液体是传动工质;可变的封闭容积是产生流体压强的条件。克服负载产生运动后,容积的封闭条件也依然存在,因此这种传动也叫静液传动,它与靠液体动能变化传递动力的动液传动(液力偶合器、液力变矩器)的区别就在于此。

液动机活塞未移动时流体静压强急剧增大,当作用在液动机活塞上的流体静压力等于负载及阻力时,活塞开始移动。此时封闭容积扩大,接纳压送进来的流体,不再发生体积压缩,如果传动过程中负载及阻力不变则流体静压强亦保持恒定,其传动功率为

$$P=\frac{l}{t}pA=p\,\frac{V}{t}=pq_V \tag{2-65}$$

式中 p 是活塞前的流体静压强,

A 是活塞受压面积,

$\frac{l}{t}$是活塞移动速度,

$V = Al$ 是因活塞移动而进入液压缸的液体体积，

$q_V = \frac{V}{t}$ 是单位时间内进入液压缸的液体体积，称为体积流量。

由于封闭容积的变化，液体在管路中流动，因而液压传动中不仅有流体静力学问题，也有大量流体动力学问题，诸如管路中的能量损失、液压缝隙中的泄漏、孔口或短管中的阻尼、阀门处的液压冲击、串联和并联管路中的计算等等，这些问题都需要用流体动力学的基础知识解决。

§2-7 液体的相对平衡

除了重力场中的流体平衡问题以外，还有一种在工程上常见的所谓液体相对平衡问题：液体质点彼此之间固然没有相对运动，但盛液体的容器或机件却对地面上的固定坐标系有相对运动。如果我们把运动坐标取在容器或机件上，则对于这种所谓的非惯性坐标系来说，液体就成为相对平衡了。

容器或机件如果只有匀速直线运动，则流体质点的质量力仍与重力场中的情况完全一样，因此无需讨论。工程上比较常见的相对平衡有下面两种。

一、容器作匀加速直线运动

如图 2-30，盛有液体的容器沿着与水平基面成 α 角的斜面向下以匀加速度 a 作直线运动。

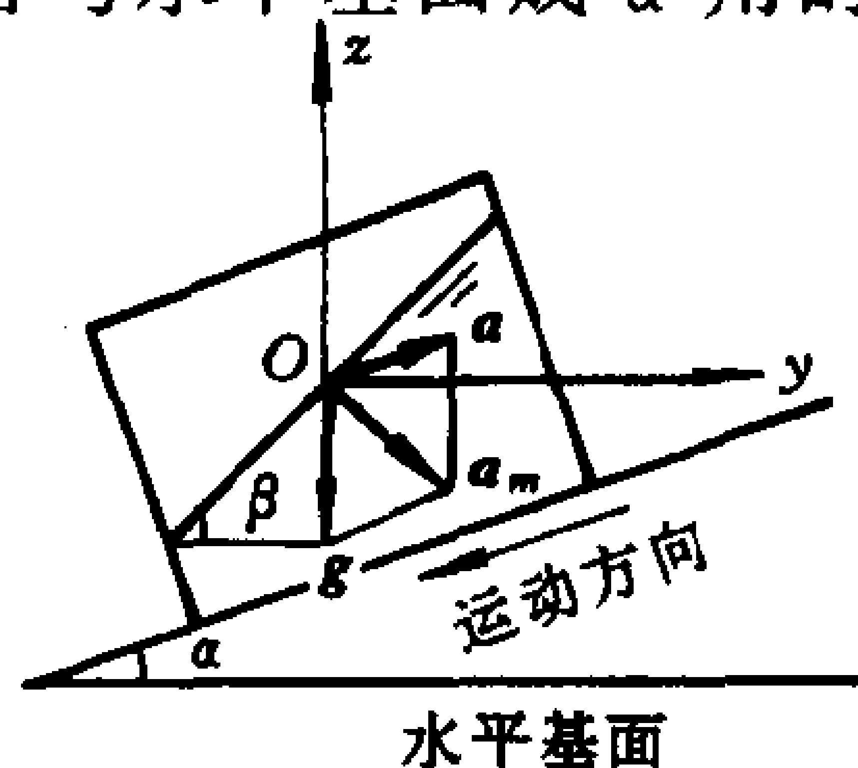


图 2-30 匀加速直线运动

将运动坐标系取在容器上，并使坐标原点在自由液面上，x 轴垂直纸面。按动静法，成相对平衡的液体的每个质点均受有两种质量力，一种是与运动方向相反的虚构惯性力 $\Delta \boldsymbol{I} = \Delta m\boldsymbol{a}$，一种是重力 $\Delta \boldsymbol{W} = \Delta m\boldsymbol{g}$，于是

单位质量力

$$\boldsymbol{a}_m = f_x\boldsymbol{i} + f_y\boldsymbol{j} + f_z\boldsymbol{k} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{g}$$

由图 2－30 可得单位质量分力为

$$\left.\begin{aligned} f_x &= 0 \\ f_y &= a\cos\alpha \\ f_z &= a\sin\alpha - g \end{aligned}\right\} \tag{2-66}$$

1．等压面

将(2－66)式代入等压面微分方程式(2－18)中即得

$$a\cos\alpha \mathrm{d}y + (a\sin\alpha - g)\mathrm{d}z = 0$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = \frac{a\cos\alpha}{g - a\sin\alpha} = \tan\beta \tag{2-67}$$

$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$是等压面的斜率，因为 a、g，α 都是常数，故倾斜角 β 是一定的，这说明等压面(包括自由表面)是与水平基面成倾角 β 的一族平行平面，这族平面必然与单位质量力 $\boldsymbol{a}_m$ 的方向互相垂直。

2．静压强分布规律

将(2－66)式代入压强微分公式(2－13)中，即得

$$\mathrm{d}p = \rho[a\cos\alpha \mathrm{d}y + (a\sin\alpha - g)\mathrm{d}z]$$

作不定积分，得

$$p = \rho[ay\cos\alpha + z(a\sin\alpha - g)] + C$$

当 $y=0$，$z=0$ 时，自由表面上的压强 $p = p_0$，可得积分常数 $C = p_0$，于是

$$p = p_0 + \rho[ay\cos\alpha + z(a\sin\alpha - g)] \tag{2-68}$$

这就是流体静压强在不同点(y,z)上的分布规律。

当斜面角度 α 变为 0 或$\frac{\pi}{2}$时，即可得出容器水平或铅直匀加速直线运动的两种特例。

［**特例 1**］ $\alpha=0$，即容器沿水平基面向左作匀加速运动，如图 2－31(1)，由(2－67)式可得其等压面方程为

$$\tan\beta=\frac{a}{g} \tag{2-69}$$

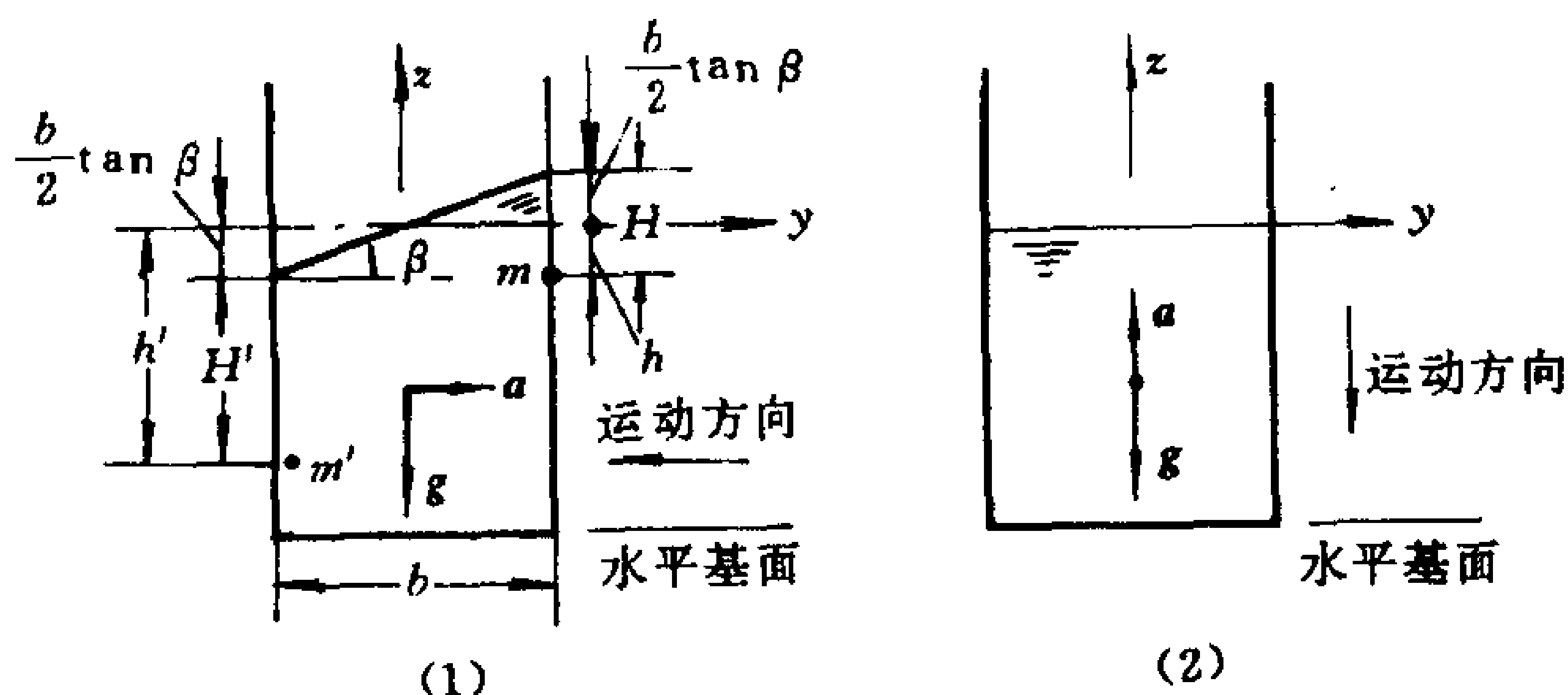


图 2－31　容器匀加速直线运动的两种特例

这种与单位质量力 a_m 相垂直的平面族的斜率等于运动加速度与重力加速度之比。

由(2－68)式可得其静压强分布规律为

$$\begin{aligned} p &= p_0+\rho(ay-gz)=p_0+\rho g\left(\frac{a}{g}y-z\right)\\ &=p_0+\rho g(y\tan\beta-z) \end{aligned} \tag{2-70}$$

括号$(y\tan\beta-z)$的含义可以通过对液体中的任何两点

$$m\left(y=\frac{b}{2},z=-h\right) \quad 与 \quad m'\left(y=-\frac{b}{2},z=-h'\right)$$

的计算看出。

对 m 点来说

$$y\tan\beta-z=\frac{b}{2}\tan\beta-(-h)=\frac{b}{2}\tan\beta+h=H$$

对 m' 点来说

$$\begin{aligned} y\tan\beta-z &= -\frac{b}{2}\tan\beta-(-h')\\ &= -\frac{b}{2}\tan\beta+h'=H' \end{aligned}$$

由此可见$(y\tan\beta-z)$代表任何一点在倾斜自由液面下的铅

直淹没深度，统以 H 表示，则(2－70)式可写为

$$p = p_0 + \rho g H。 \quad (2-71)$$

这与重力场中静压强分布规律(2－25)式的形式是一样的，差别只是 H 代表任意点在倾斜液面下的深度，这种深度不仅与点的坐标(y, z)有关，而且也与加速度的大小和方向有关。

如果容器向右运动，等压面与水平基面的夹角成钝角，自由液面与图 2－31(1)所示的倾斜方向相反，其压强分布规律也仍然是 $p = p_0 + \rho g H$。

[**特例 2**]　$\alpha = 90°$，即容器沿铅直方向向下作匀加速运动，如图 2－31(2)，由(2－67)式可得其等压面方程为

$$\tan\beta = 0 \quad (2-72)$$

即等压面仍为水平面。由(2－68)式可得其静压强分布规律为

$$\begin{aligned} p &= p_0 + \rho(a - g)z = p_0 + \rho h(g - a) \\ &= p_0 + \rho g h\left(1 - \frac{a}{g}\right) \end{aligned} \quad (2-73)$$

公式说明：当容器向下加速运动时，$a_m = g - a$，铅直向下的单位质量力小于重力，液体处于失重状态。此时尽管液面不变，但一定高度 h 上的单位截面液柱重力却从 $\rho g h$ 降低为 $\rho g h\left(1 - \frac{a}{g}\right)$，因而液体中任一点的静压强均因液柱失重而有所降低。

令 $k_1 = 1 - \frac{a}{g} < 1$，称为失重系数，则

$$p = p_0 + k_1 \rho g h \quad (2-74)$$

相反，如果容器向上作匀加速运动，则 $a_m = g + a$，铅直向下的单位质量力大于重力，液体处于超重状态，每一点的静压强均因液柱超重而增大，于是

$$p = p_0 + \rho g h\left(1 + \frac{a}{g}\right) = p_0 + k_2 \rho g h \quad (2-75)$$

式中 $k_2 = 1 + \frac{a}{g} > 1$，称为超重系数。

二、容器作等角速回转运动

如图 2－32 所示，盛有液体的容器绕铅直轴 z 作回转运动，启动瞬间，液体被甩向外周，但当回转角速度 ω 稳定不变时，液体形成如图所示的自由表面，质点和质点之间不再有相对运动，液体连同容器作整体回转。如果将运动坐标系固结在回转容器上，且如图所示，坐标原点取在液面最低点，则液体对运动坐标系形成相对平衡。

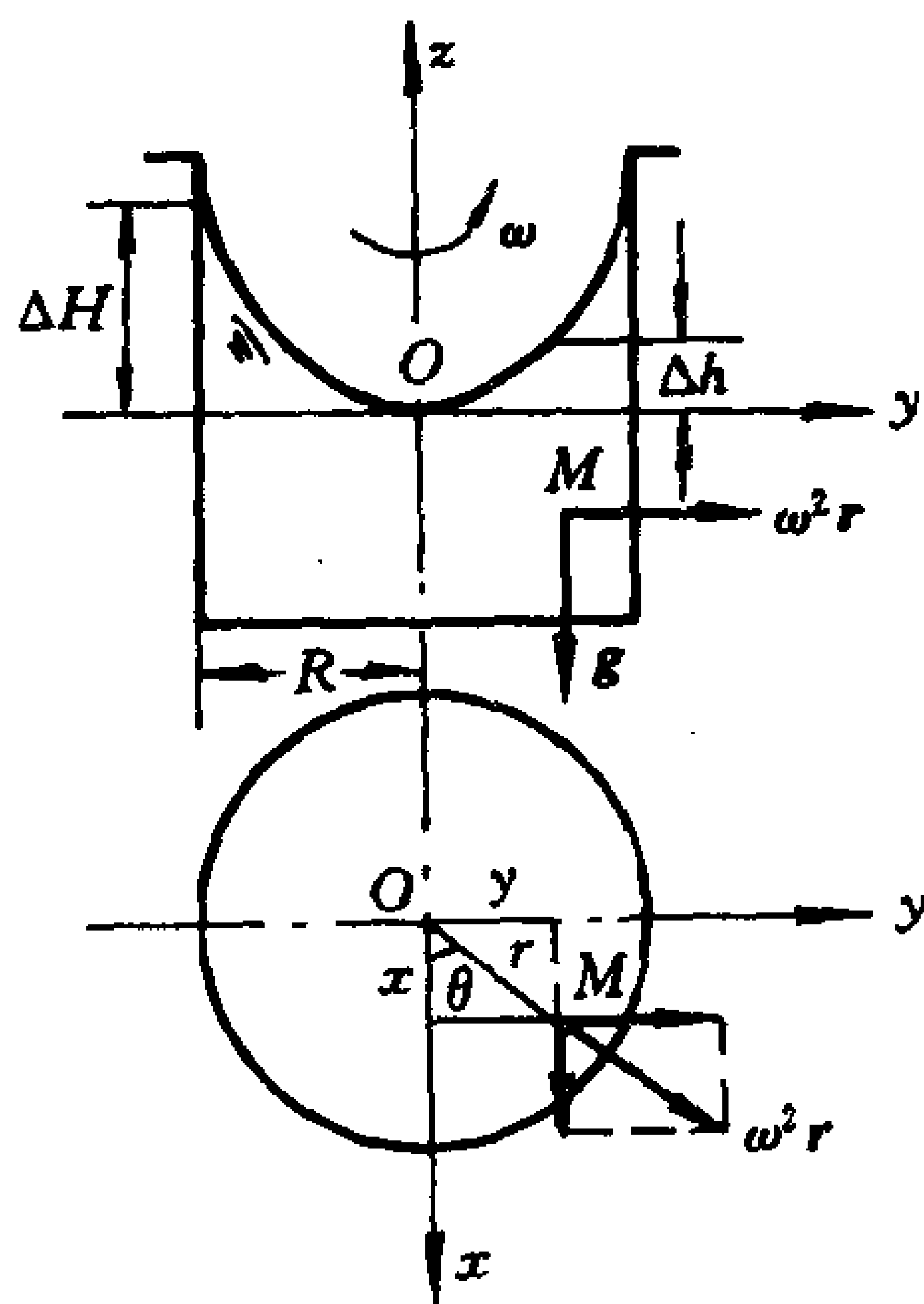


图 2－32　容器作等角速回转运动

此时作用在液体上的质量力有两种：一种是重力 $\Delta W=\Delta mg$，一种是虚构的离心惯性力 $\Delta F=\Delta m\omega^2\boldsymbol{r}$（其方向与向心加速度的方向相反），因此单位质量力 $\boldsymbol{a}_m=f_x\boldsymbol{i}+f_y\boldsymbol{j}+f_z\boldsymbol{k}=\boldsymbol{g}+\omega^2\boldsymbol{r}$，单位质量分力为

$$\left.\begin{aligned}f_x&=\omega^2r\cos\theta=\omega^2x\\f_y&=\omega^2r\sin\theta=\omega^2y\\f_z&=-g\end{aligned}\right\}\tag{2-76}$$

1. 等压面

将(2－76)式代入等压面微分方程式(2－18)中，即得

$$\omega^2x\mathrm{d}x+\omega^2y\mathrm{d}y-g\mathrm{d}z=0$$

作不定积分得

$$\frac{\omega^2x^2}{2}+\frac{\omega^2y^2}{2}-gz=C$$

即

$$\frac{\omega^2r^2}{2}-gz=C\tag{2-77}$$

这说明等压面是绕 z 轴的一族回转抛物面。

当 $r=0$ 时,$z=0$,可得自由表面上的积分常数 $C=0$,故自由表面的方程式为

$$\frac{\omega^2 r^2}{2} - gz = 0 \quad 或 \quad z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} \tag{2-78}$$

自由表面上任一点的 z 坐标,也就是自由表面上的点比抛物面顶点所高出的铅直距离,叫作超高,用 Δh 表示,则

$$\Delta h = z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} = \frac{u^2}{2g} \tag{2-79}$$

式中 $u=\omega r$ 是该点的圆周速度。

用 R 和 v_c 表示容器的内半径和圆周速度,则液面的最大超高为

$$\Delta H = \frac{\omega^2 R^2}{2g} = \frac{v_c^2}{2g} \tag{2-80}$$

在 Oxy 坐标平面以上的回转抛物体内的液体体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_0^R z 2\pi r \mathrm{d}r = \int_0^R \frac{\omega^2 r^2}{2g} 2\pi r \mathrm{d}r \\ &= \frac{\pi\omega^2}{g}\int_0^R r^3 \mathrm{d}r = \frac{\pi}{4g}\omega^2 R^4 \\ &= \frac{1}{2}\pi R^2 \frac{\omega^2 R^2}{2g} = \frac{1}{2}\pi R^2 \Delta H \end{aligned} \tag{2-81}$$

这说明圆筒形容器中的回转抛物体体积恰好是高度为最大超高的圆柱形体积之半。回转抛物体的这一数学性质对于解决等角速回转的相对平衡问题很有用处。

2. 静压强分布规律

将(2-76)式代入压强微分公式(2-13)中,得

$$\mathrm{d}p = \rho(\omega^2 x \mathrm{d}x + \omega^2 y \mathrm{d}y - g\mathrm{d}z)$$

作不定积分,则

$$\begin{aligned} p &= \rho\left(\frac{\omega^2 x^2}{2} + \frac{\omega^2 y^2}{2} - zg\right) + C \\ &= \rho\left(\frac{\omega^2 r^2}{2} - zg\right) + C \end{aligned} \tag{2-82}$$

式中的积分常数可以根据实际问题的不同边界条件来确定,下面讨论三种实用情况。

(1) 密封容器,液面上的压强为 p_0(如图 2-33)

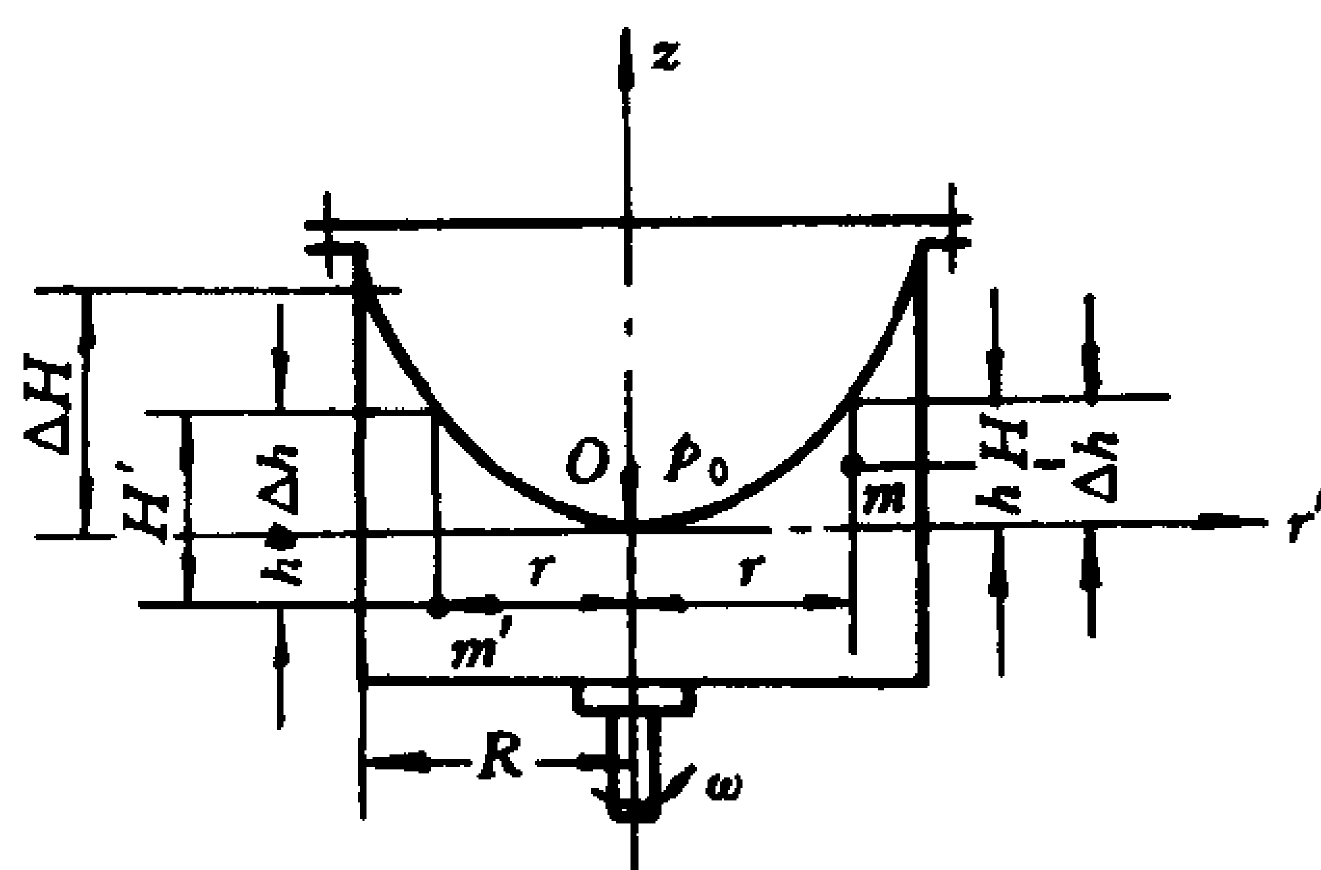


图 2-33 密封容器

此时回转抛物面顶点($r=0, z=0$)处的压强 $p=p_0$,于是可得 $C=p_0$,代回(2-82)式

$$p=p_0+\rho g\left(\frac{\omega^2 r^2}{2g}-z\right)=p_0+\rho g(\Delta h-z) \quad (2-83)$$

我们在液体中任取两点 $m(r, z=h)$、$m'(r, z=-h)$,分析一下($\Delta h-z$)的含义。对 m 点来说

$$\Delta h-z=\Delta h-h=H$$

对 m' 点来说

$$\begin{aligned}\Delta h-z&=\Delta h-(-h)\\&=\Delta h+h=H'\end{aligned}$$

可见(2-83)式中的 $\Delta h-z$ 表示任何一点在回转自由液面下的铅直淹没深度,统用 H 表示,则

$$p=p_0+\rho gH \quad (2-84)$$

这仍然与重力场中静压强分布规律形式相同,差别只是现在自由液面不是水平而是回转抛物面,H 是一点在回转抛物面下的淹没深度。

(2) 容器盛满液体,顶盖中心接触大气(如图 2-34)

此时 $r=0, z=0$ 处 $p=p_a$,于是 $C=p_a$,代回(2-82)式可得

$$p = p_a + \rho g(\Delta h - z) \tag{2-85}$$

由于顶盖限制，液体不可能形成自由回转抛物面，但液体中各点的压强分布规律却仍然与上述情况是一样的。如果只讨论顶盖（$z=0$）各处的计示压强，则

$$p = \rho g \Delta h = \rho g \frac{\omega^2 r^2}{2g} = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 \tag{2-86}$$

这说明顶盖上的计示压强与半径 r 仍然成二次抛物线规律（如图中箭头所示）。

流体作用在顶盖上的静压力可以通过积分求得

$$F = \int_0^R p 2\pi r \mathrm{d}r = \int_0^R \left(\frac{\rho}{2}\omega^2 r^2\right) 2\pi r \mathrm{d}r$$

$$= \frac{\pi}{4}\rho\omega^2 R^4 \tag{2-87}$$

方向向上。

（3）容器盛满液体，顶盖边缘接触大气（如图 2－35）

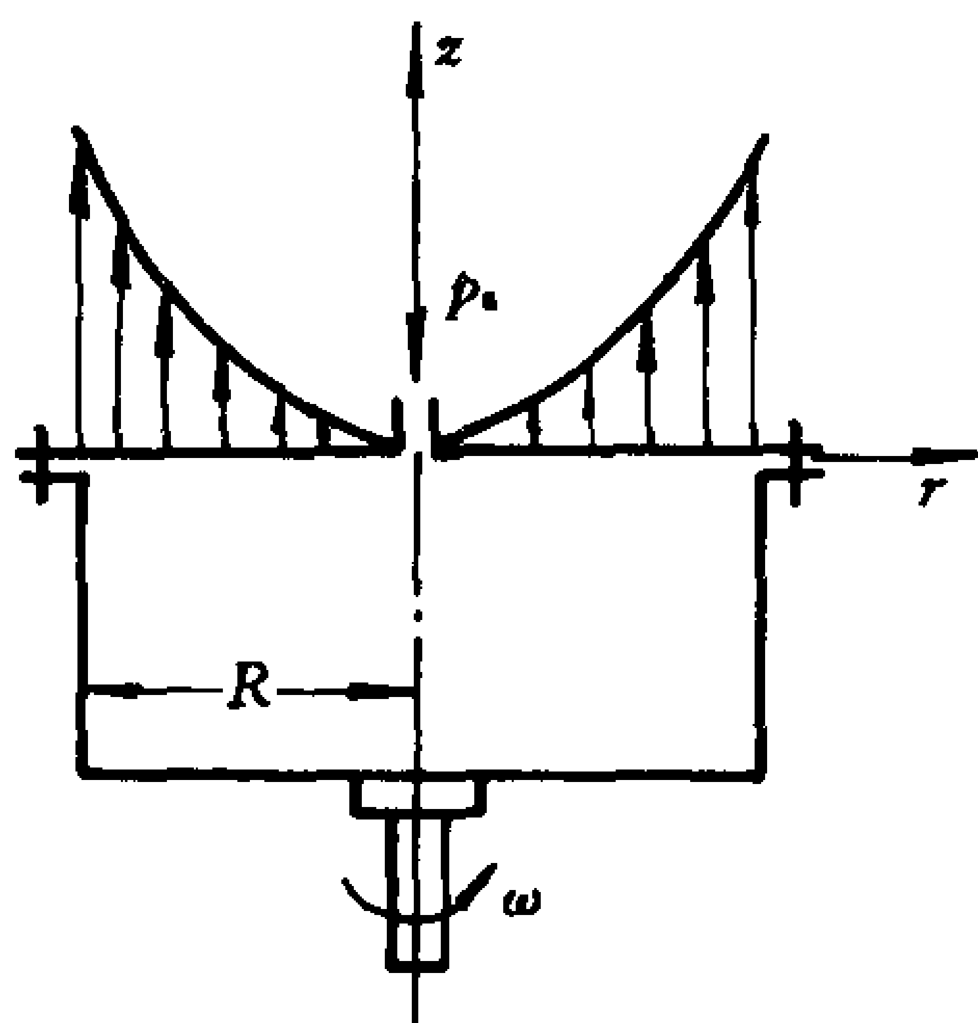


图 2－34 顶盖中心开口容器

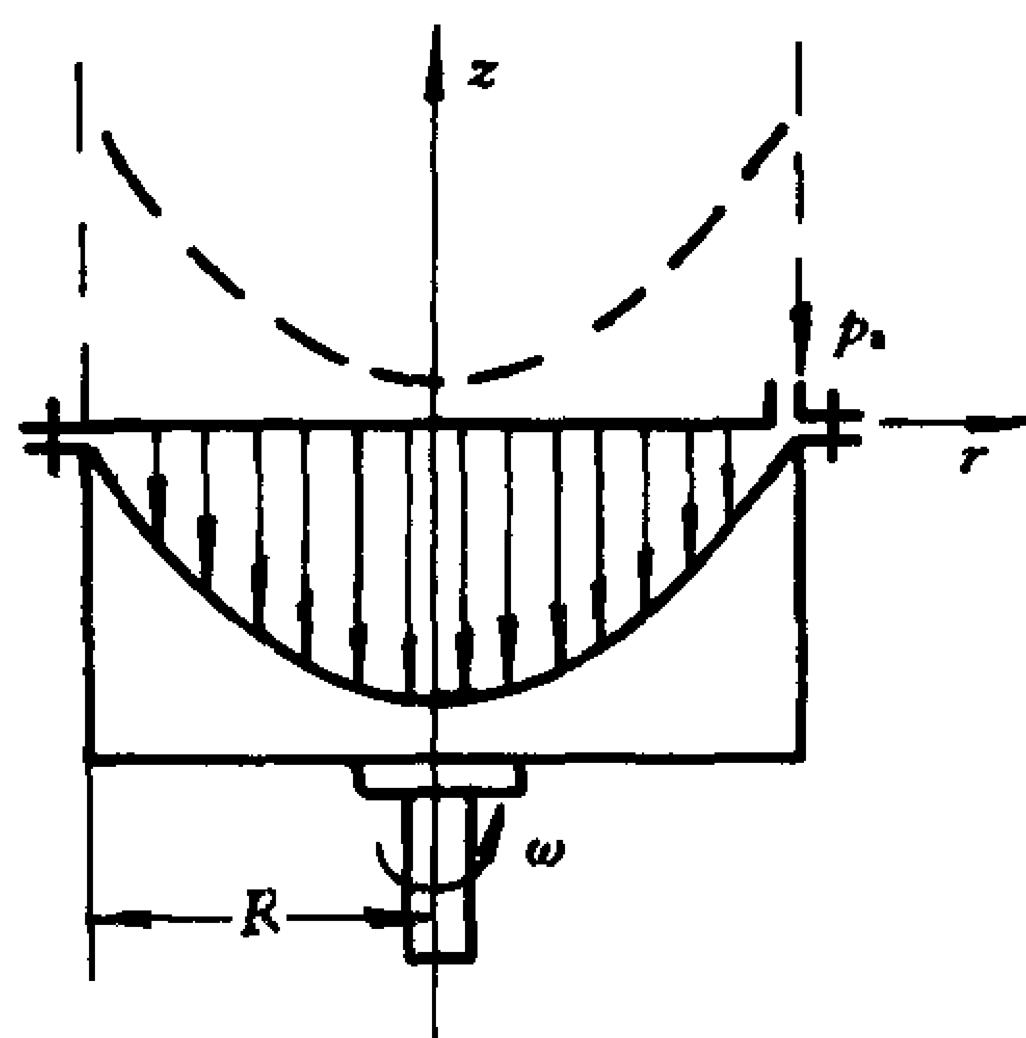


图 2－35 顶盖边缘开口容器

此时 $r=R$，$z=0$ 处 $p=p_a$，于是由（2－82）式得积分常数

$$C = p_a - \rho g \frac{\omega^2 R^2}{2g}$$

代回（2－82）式得

$$p = p_a - \rho g\left[\frac{\omega^2}{2g}(R^2 - r^2) + z\right]$$

如果只讨论顶盖各处的计示压强，则

$$p = -\rho\frac{\omega^2}{2}(R^2 - r^2) \qquad (2-88)$$

“-”号说明顶盖处各点存在着真空度。图 2-35 中向下的箭头表示真空度的分布情况。

流体作用在顶盖上的静压力也可以通过积分计算

$$F = \int_0^R p2\pi r\mathrm{d}r = -\int_0^R \frac{\rho\omega^2}{2}(R^2 - r^2)2\pi r\mathrm{d}r$$

$$= -\frac{\pi}{4}\rho\omega^2 R^4 \qquad (2-89)$$

“-”号说明顶盖内作用着向下的吸力。

等角速回转的相对平衡原理在工程上有很多应用，如离心式水泵、风机、旋风分离器、除尘器、离心铸造等等。

［**例题 2-7**］ 图 2-36 为方底（$b = 0.6$ m）柱形油箱，内盛相对密度 $d = 0.9$ 的机器油，深度 $h = 1$ m，底面之半为折页式活门。当油箱以 $a = \frac{g}{2}$ 的加速度分别向左、右、上、下运动时，试求作用在活门上的静压力 F 及对活门枢轴的力矩 M_O。

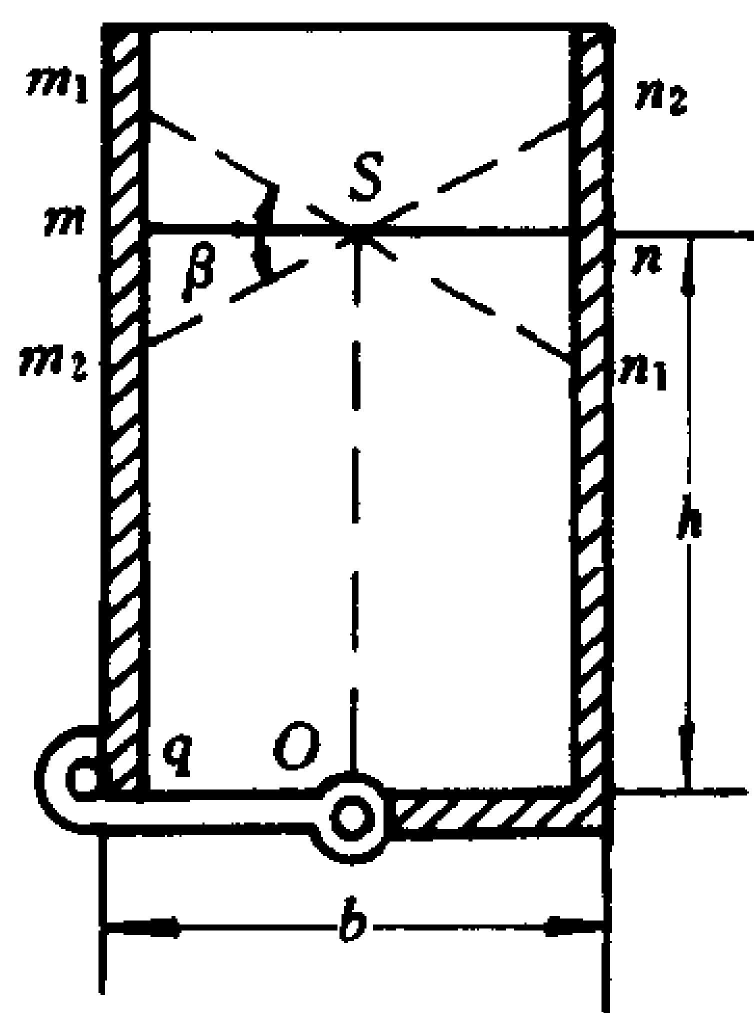


图 2-36 方底柱形油箱

［**解**］ 油的

$$\rho g = 900 \times 9.81 = 8\ 830\ \mathrm{N/m^3}$$

油箱水平加速时液面的斜率为 $\tan\beta = \frac{a}{g} = \frac{1}{2}$。此时活门上一点的计示压强 $p = \rho gH$（H 是从活门到倾斜液面的铅直高度），因此作用在活门上的静压力 F 等于活门上方实有的液体重力 ρgV。

1. 向右运动时，液面为 m_1n_1，

$$F=\rho g(V_{OSmq}+V_{Sm_1m})=\rho g\left(\frac{b^2h}{2}+\frac{b^3}{16}\right)=1\ 710\ \text{N}$$

$$M_O=\rho g\left(\frac{b^2h}{2}\times\frac{b}{4}+\frac{b^3}{16}\times\frac{b}{3}\right)=262\ \text{Nm}$$

2. 向左运动时,液面为 m_2n_2,

$$F=\rho g(V_{OSmq}-V_{Smm_2})=\rho g\left(\frac{b^2h}{2}-\frac{b^3}{16}\right)=1\ 470\ \text{N}$$

$$M_O=\rho g\left(\frac{b^2h}{2}\times\frac{b}{4}-\frac{b^3}{16}\times\frac{b}{3}\right)=215\ \text{Nm}$$

3. 向下运动时,液面仍为 mn,

失重系数 $$k_1=1-\frac{a}{g}=\frac{1}{2}$$

$$F=k_1\rho gV_{OSmq}=\rho g\frac{b^2h}{4}=795\ \text{N}$$

$$M_O=\rho g\frac{b^2h}{4}\times\frac{b}{4}=119\ \text{Nm}$$

4. 向上运动时,液面仍为 mn,

超重系数 $$k_2=1+\frac{a}{g}=\frac{3}{2}$$

$$F=k_2\rho gV_{OSmq}=\rho g\frac{3b^2h}{4}=2\ 380\ \text{N}$$

$$M_O=\rho g\frac{3b^2h}{4}\times\frac{b}{4}=358\ \text{Nm}$$

向上加速运动,液体处于超重状态,作用在活门上的力和力矩最大。

[例题 2-8] 图 2-37 所示的液体转速计内工作介质是液体,已知中心圆筒直径 $D=20$ mm,两个玻璃小管直径 $d=8$ mm,小管距旋转轴心距离 $R=40$ mm,转速计不转动时活塞指针指 0,试求 $n=1\ 000$ r/min 时指针的降落值 h。

[解] 1. 假定工作介质的密度是 ρ,指针连活塞的质量是 m,当转速计不转动时,质量 m 加在中心圆筒的液体上,必产生初始压强,使两端小管中液柱比 $O-O$ 面高出 h_0 这样一个高度借以平衡活塞下的初始压强,故

$$h_0=\frac{mg}{\frac{\pi}{4}D^2\rho g}=\frac{4m}{\pi D^2\rho} \tag{2-90}$$

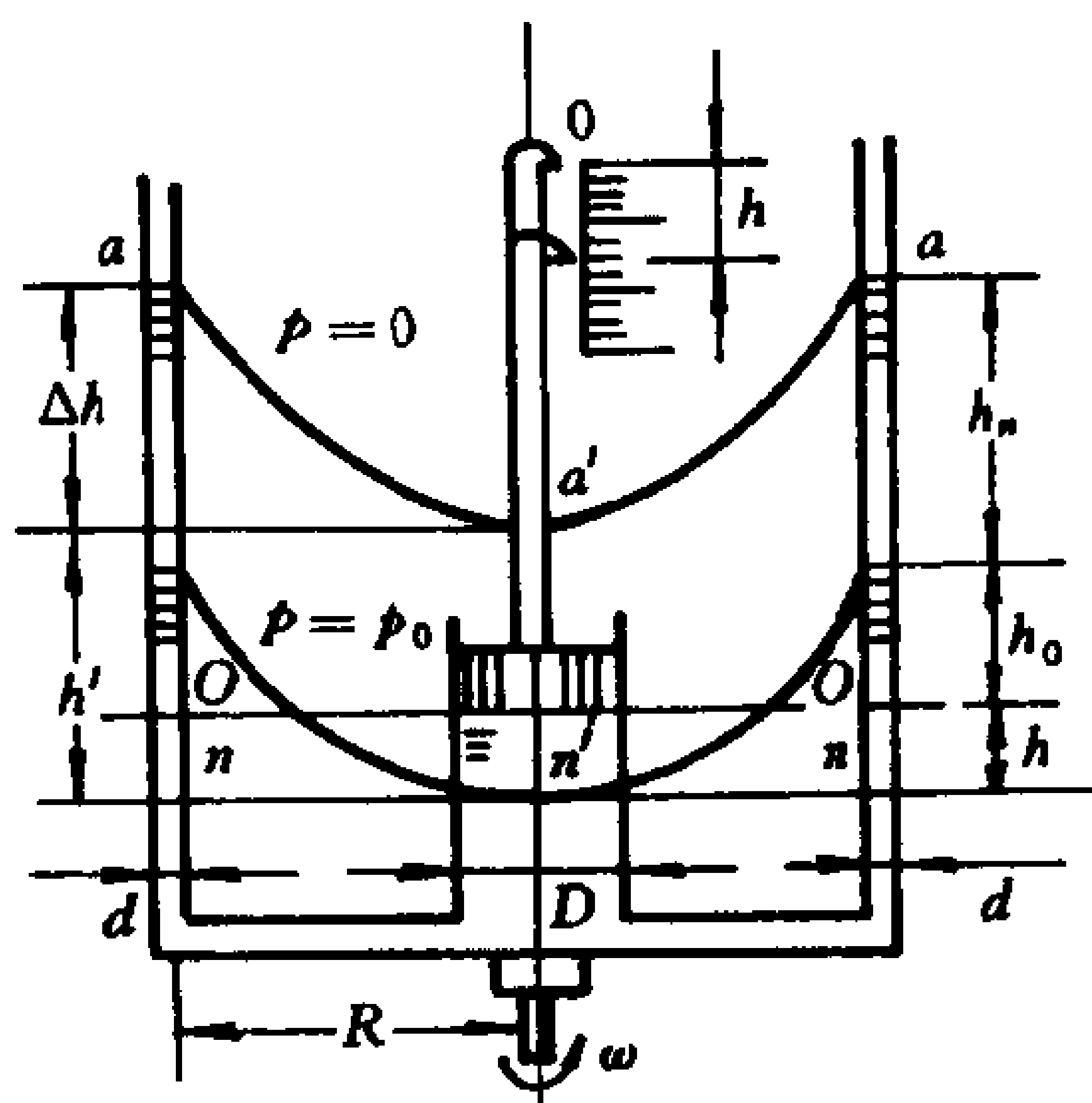


图2－37　液体转速计

2．当转速计每分钟转数为 n 时，活塞连同指针下降 h，中心圆筒中的液面从 $O-O$ 降至 $n-n$，所排挤出来的液体必等量地进入两个小管中，致使小管中液柱又上升 h_n 这样一个高度，从而到达 a 点。根据体积相等原则

$$\frac{\pi}{4}D^2h=2\frac{\pi d^2}{4}h_n$$

可得

$$h_n=\frac{h}{2}\left(\frac{D}{d}\right)^2 \tag{2-91}$$

3．当转速为 n 时，通过 aa 点的等压面假定如图 $aa'a$ 所示，它与转轴的交点为 a'，由此可得小管中的超高为

$$\Delta h=\frac{\omega^2R^2}{2g} \tag{2-92}$$

$aa'a$ 是假想等于大气压($p=0$)的等压面。

4．令 n' 为 $n-n$ 面与转轴的交点，则 $a'n'=h'$ 这样一段假想的液柱高再乘以 ρg，就是转速计回转后，活塞下面中心点 n' 上的计示压强 p_0，即

$$p_0=\rho gh'$$

由图可见 $h'=h+h_0+h_n-\Delta h$，将(2－90)、(2－91)、(2－92)式代入，可得

$$\begin{aligned}p_0&=\rho g\left[h+\frac{4m}{\pi D^2\rho}+\frac{h}{2}\left(\frac{D}{d}\right)^2-\frac{\omega^2R^2}{2g}\right]\\&=\rho gh\left(1+\frac{D^2}{2d^2}\right)+\frac{4mg}{\pi D^2}-\frac{\rho\omega^2R^2}{2}\end{aligned} \tag{2-93}$$

5. 当转速计回转时，活塞及指针的重力必与活塞下面的液体静压力相平衡，而后者可按抛物线型分布的压强在活塞直径范围内积分而求得，于是

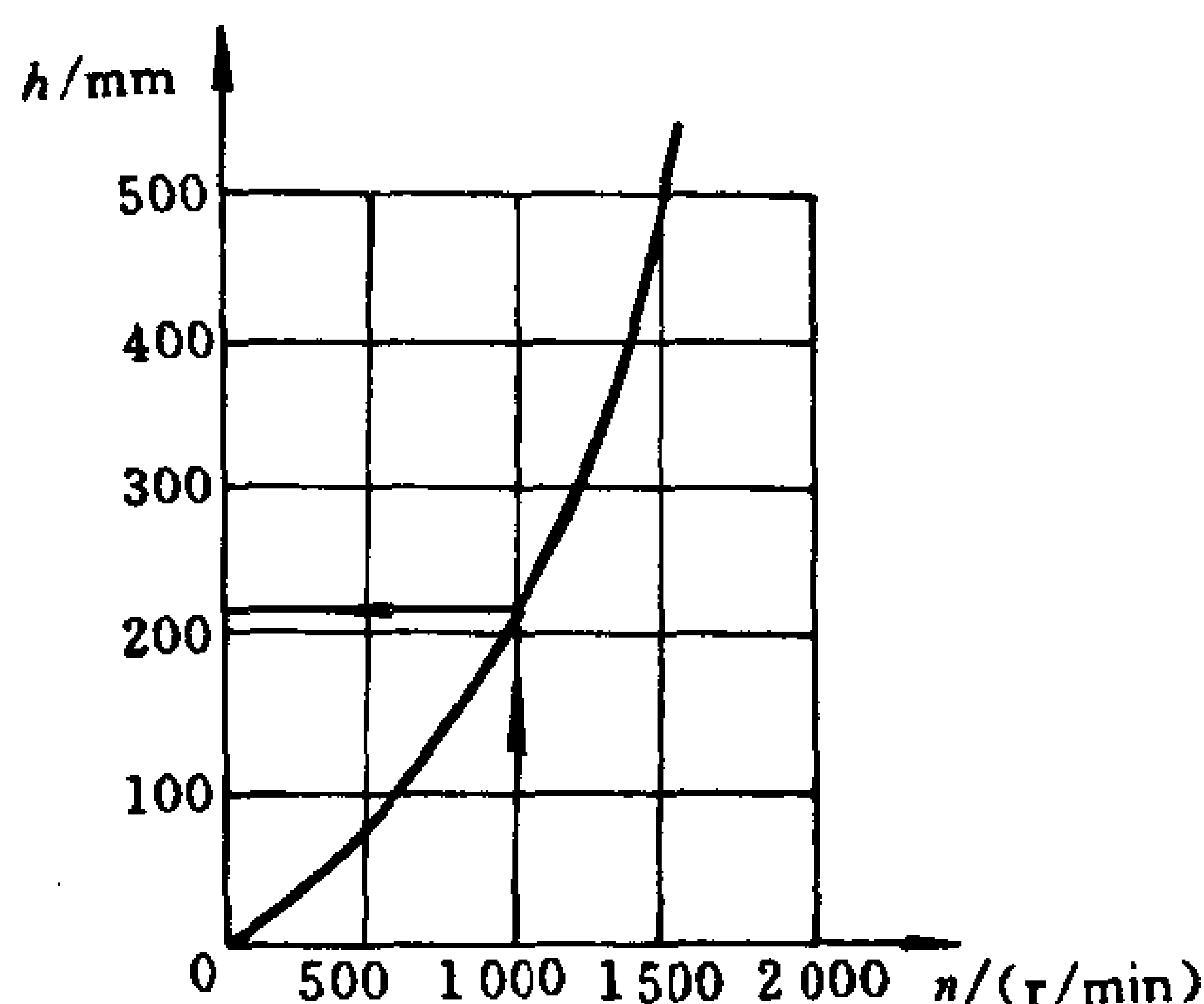


图 2－38　$h-n$ 曲线

$$mg = F = \int_0^{\frac{D}{2}} \left(p_0 + \rho \frac{\omega^2 r^2}{2}\right) 2\pi r \mathrm{d}r$$

$$= p_0 \frac{\pi D^2}{4} + \frac{\pi \rho \omega^2 D^4}{64}$$

由此解得

$$p_0 = \frac{4mg}{\pi D^2} - \frac{\rho \omega^2 D^2}{16} \tag{2-94}$$

从(2－93)及(2－94)式可得

$$\rho g h \left(1 + \frac{D^2}{2d^2}\right) = \frac{(8R^2 - D^2)\rho \omega^2}{16} = \frac{8R^2 - D^2}{4} \left(\frac{\pi}{60}\right)^2 \rho n^2$$

由此得

$$h = \frac{8R^2 - D^2}{4g\left(1 + \frac{D^2}{2d^2}\right)} \left(\frac{\pi}{60}\right)^2 n^2 = Cn^2 \tag{2-95}$$

式中常数 C 是仪器常数，它只与仪器结构尺寸 R、D、d 有关，而与工作介质及活塞质量无关，在本题中 $C = 0.000\ 21\ \mathrm{mm \cdot min^2}$。

所以 $$h = 0.000\ 21 n^2$$

据此可绘出 $h-n$ 曲线，如图 2－38，当

$$n = 1\ 000\ \mathrm{r/min}\ 时$$

可得 $h = 210\ \mathrm{mm}$。

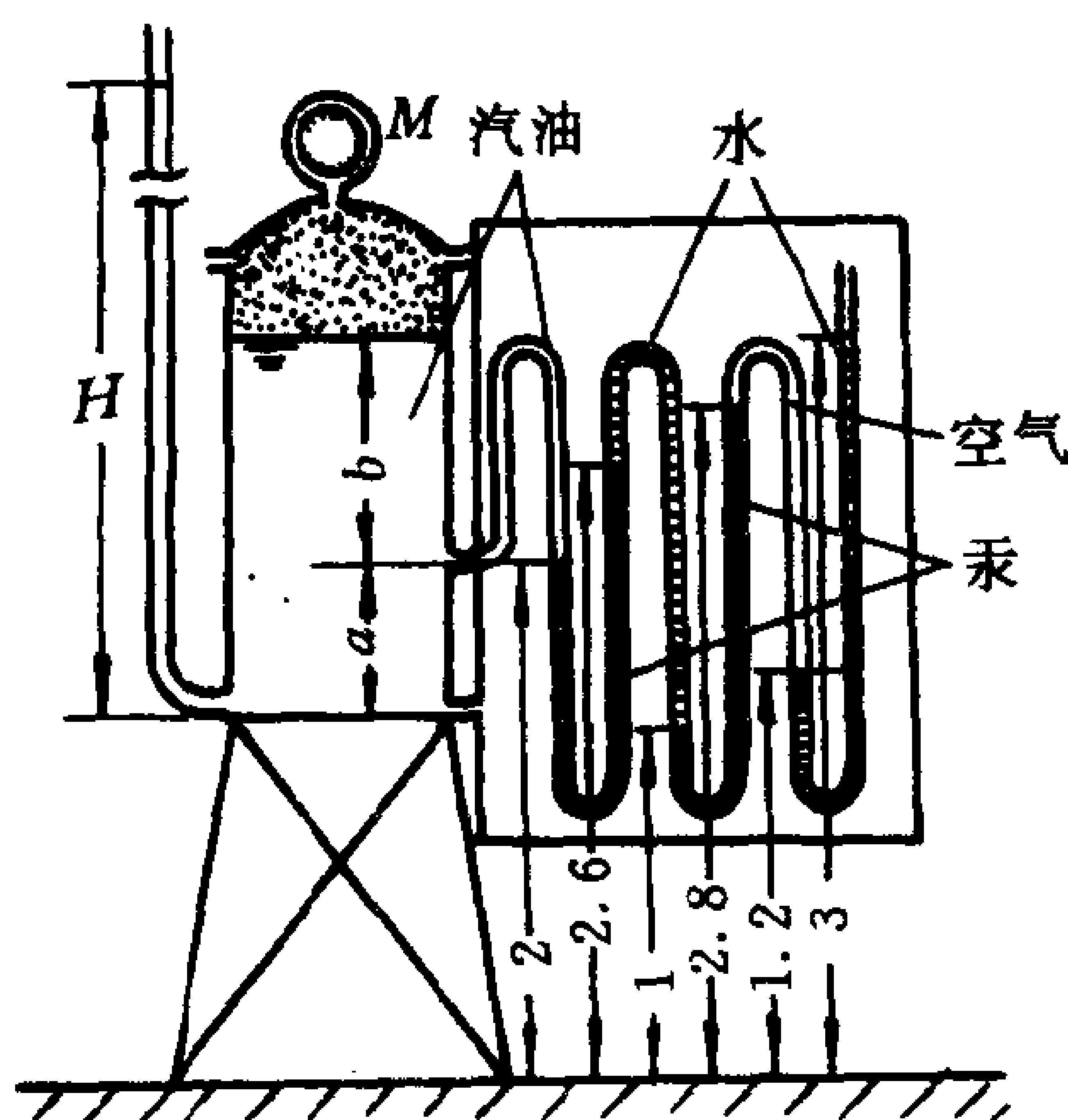
习　题

2-1. 已知海水的相对密度为 1.025，p_{atm} = 101 300 Pa。试求下列各深度处的海水计示压强和绝对压强。

海水深度(单位:m)	10	100	1 000	10 000
计示压强(单位:Pa)				
绝对压强(单位:Pa)				

2-2. 在汽油箱上装三种测压仪表如图所示，已知 $a = 0.6$ m，$b = 1.3$ m，各液面标高均以 m 计。汽油相对密度为 0.7，汞相对密度为13.6，空气相对密度近似为零。试求金属压强表上的读数及测压管高度 H。

[答：p_M = 313 kPa，H = 47.5 m]

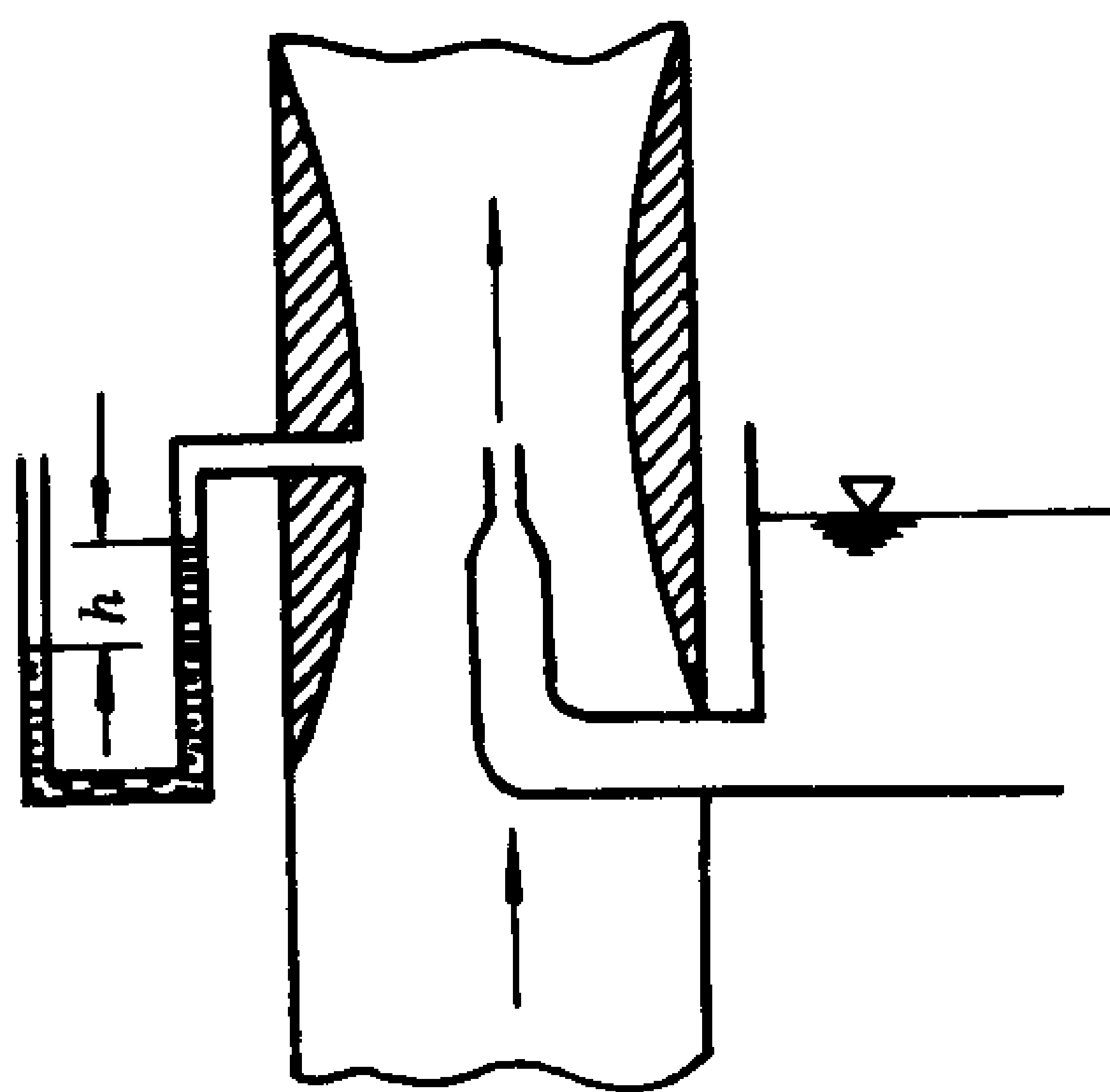


题 2-2 图

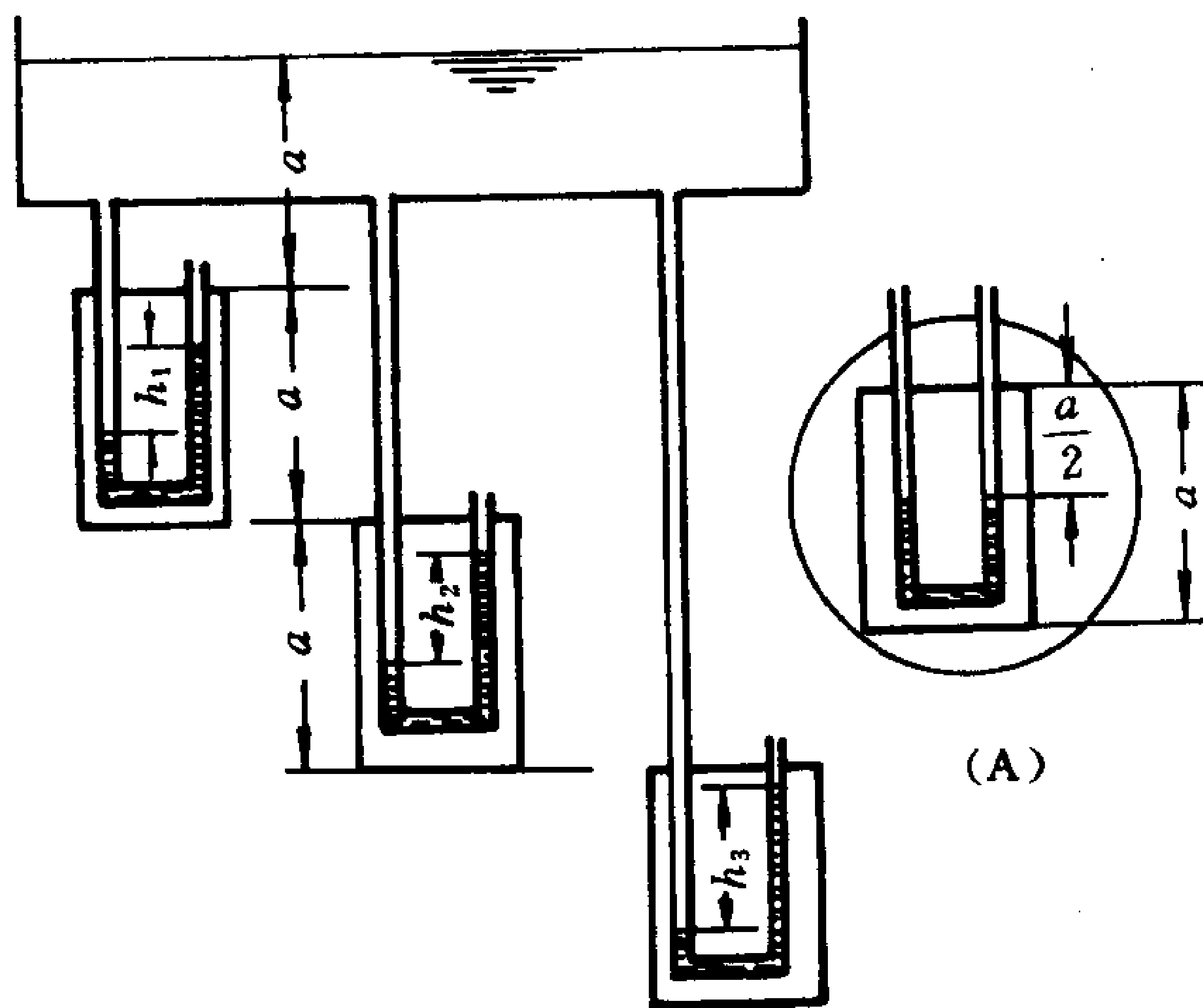
2-3. 汽化器喉部真空度用汞 U 型计测得 h = 70 mmHg，如果空气温度为 15 ℃，外界为 1 个标准大气压，试求汽化器喉部空气的绝对压强及密度。

[答：p = 91.8 kPa，ρ = 1.11 kg/m^3]

2-4. 用初始汞液面如(A)图所示的三个 U 型汞测压计装在同一个水箱底部，三个测压计顶边依次低下的距离为 $a = 1$ m，汞相对密度为 13.6，试求三个 U 型测压计中的读数 h_1、h_2 及 h_3 各为多少？



题 2－3 图



题 2－4 图

[答：$h_1=0.114\ 5a$，$h_2=0.190\ 8a$、$h_3=0.267\ 2a$]

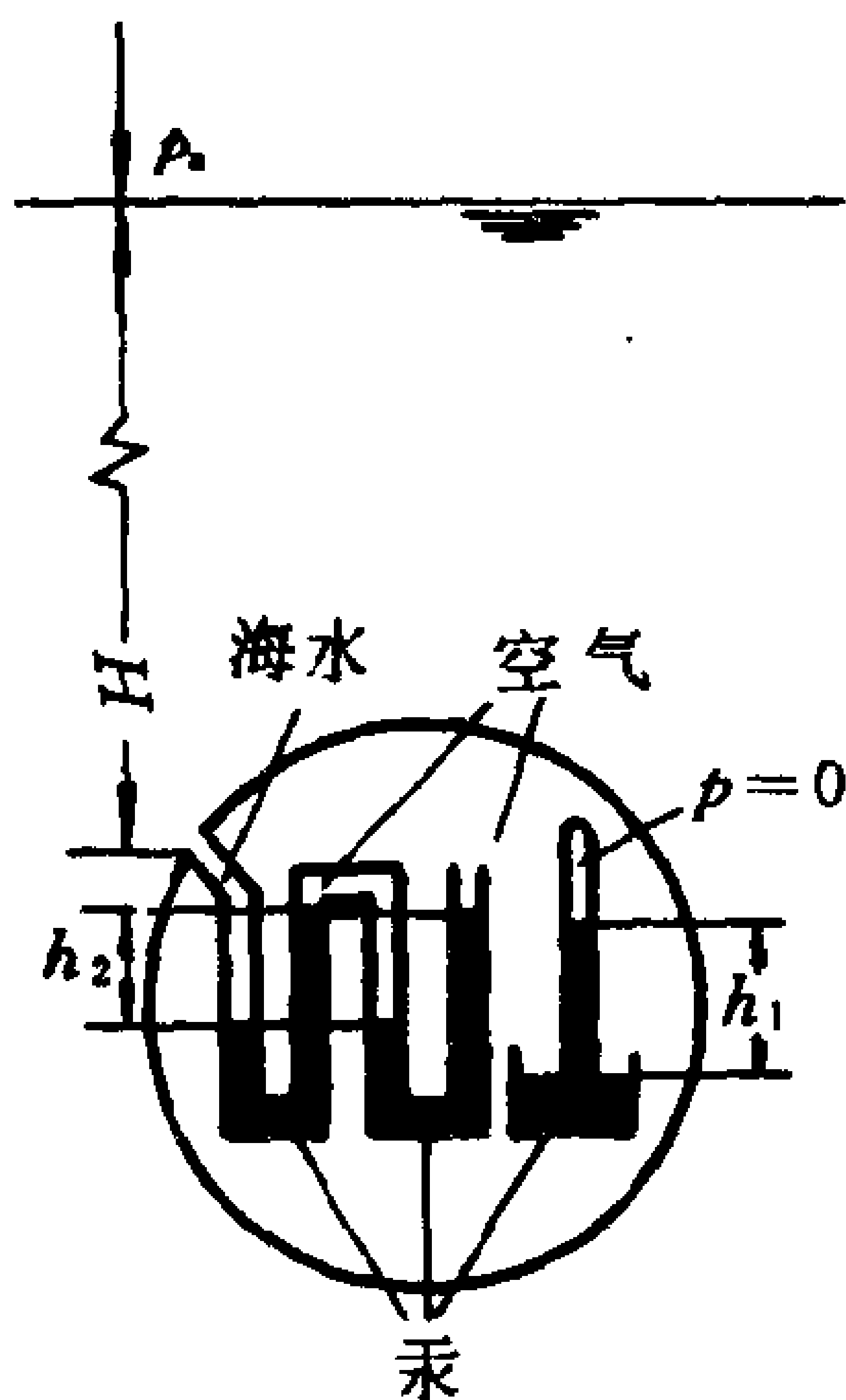
2－5．潜艇内的汞气压计读数 $h_1=800$ mm，多管汞差压计读数 $h_2=500$ mm，海平面上汞气压计读数为 760 mm，海水密度为 1 025kg/m^3，试求潜艇在海面下的深度 H。

[答：$H=13.8$ m]

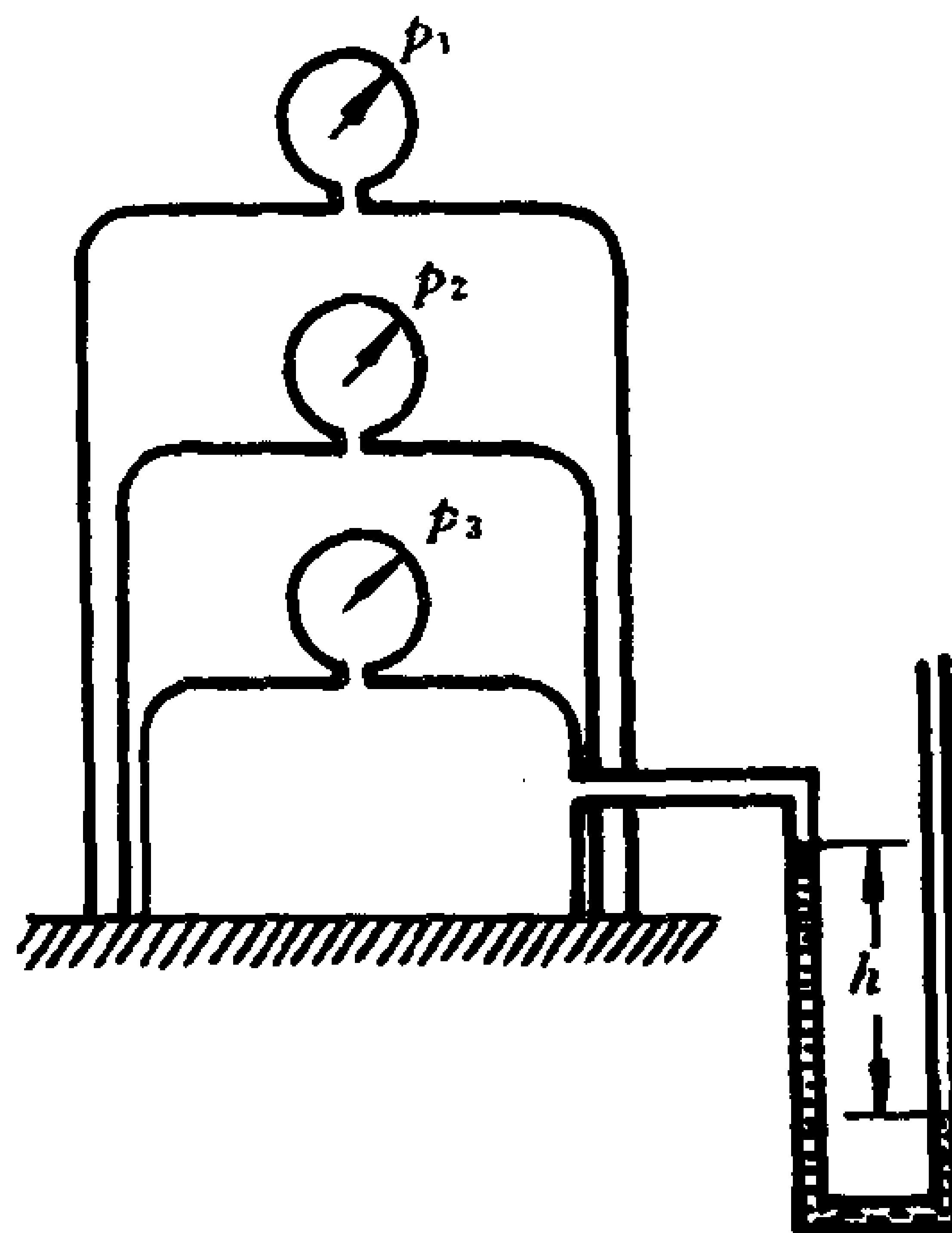
2－6．三重密封容器上都装有真空表，它们的读数均相同，$p_1=p_2=$

$p_3=20$ kPa(真空度),试求图示U型汞测压计上的高度 h 及最里边的容器中的气体压强 p。

[答:$h=449$ mmHg, $p=41\ 360$Pa(真空度)]



题2-5图



题2-6图

2-7. 灭火器内装有液体,从汞差压计上读得 $h_1=26.5$ mm, $h_2=40$ mm, $a=100$ mm,试求灭火器中液体的密度 ρ 及装液高度H。

[答:$\rho=1\ 619\text{kg/m}^3$, $H=296$ mm]

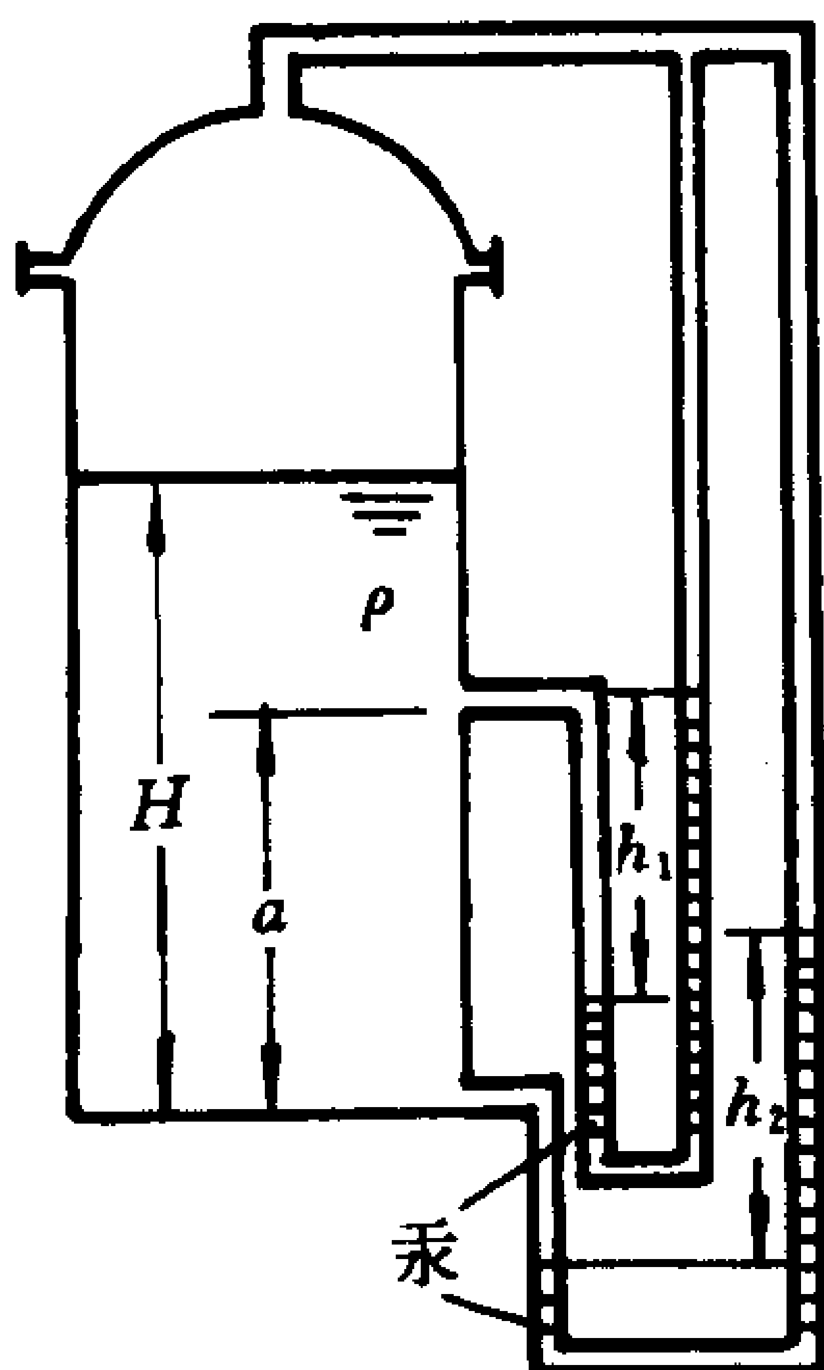
2-8. 油箱液面指示器的功用是:在较短尺寸的液面指示管上成比例地指出油箱中液面的下降情况。在图示的三液交叉式U型管中,装有汽油 ρ_1、汞 ρ_3 和水 ρ_2,汽油装满时,U型管中的汞面为1-1,液面指示管中的水位在刻度1处。当油箱液面下降 h_1 时,指示管中液面下降 h_2,试导出 h_2 与 h_1 的比例关系式。

$$\left[\text{答}:h_2=\frac{\rho_1}{2\rho_3-\rho_1}h_1\right]$$

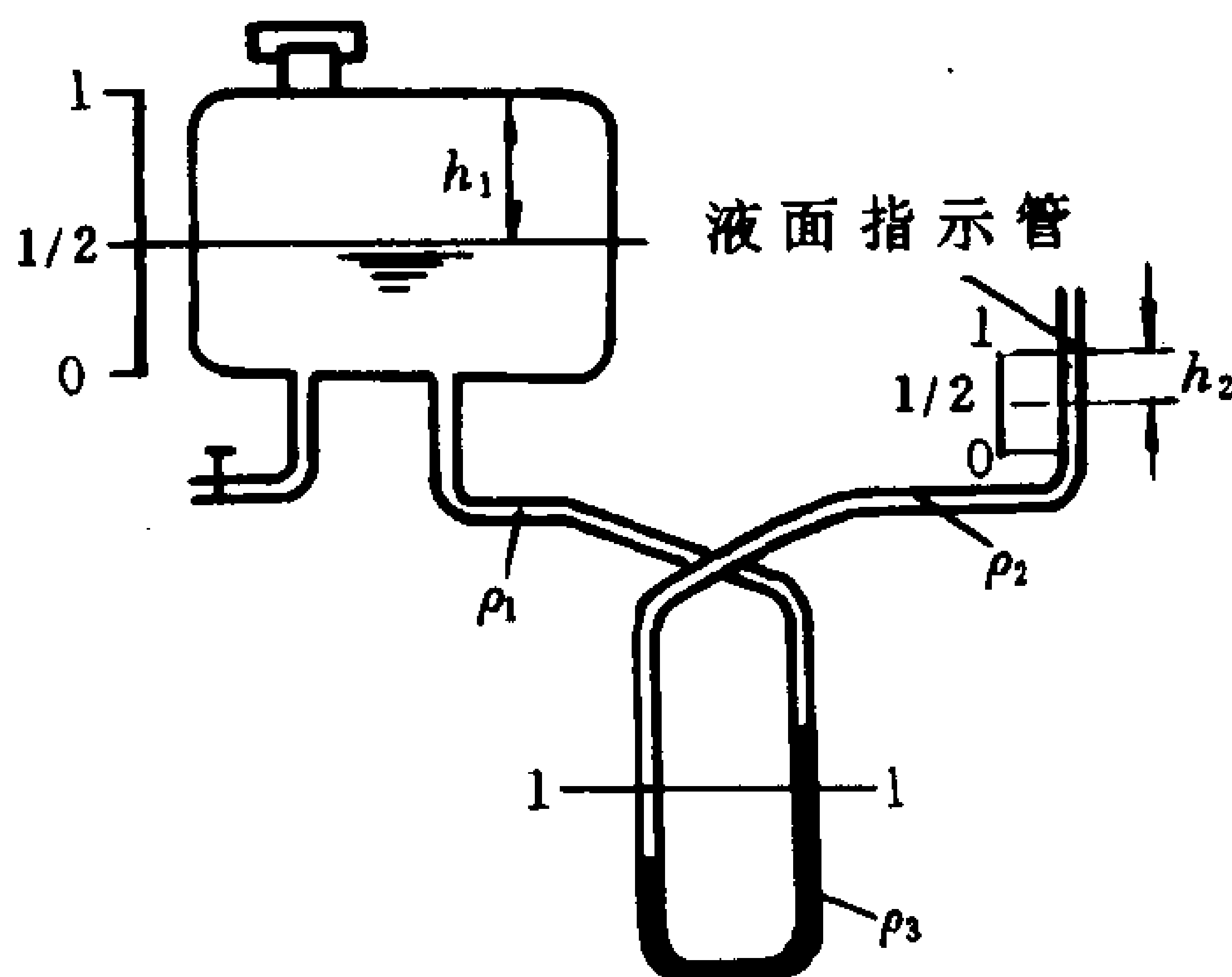
2-9. 试根据国际标准大气的规定求出下列三种情况下的海拔高度:

(1) 摄氏温度为0 °C,(2) 绝对压强为100 kPa,(3) 绝对压强为98.1 kPa。

[答:(1) $z=2.3$ km,(2) $z=109$ m,(3) $z=270$ m]



题2－7图



题2－8图

2－10. 试根据国际标准大气的规定求出下列各海拔高度处空气的绝对压强、温度和密度。

海拔高度 z/km	0	1	10	11	15	25
绝对压强 p/Pa						
温度 t/°C						
密度 ρ/(kg/m^3)						

[答：p：101 300　89 844　26 400　22 600　12 018　2 480

t：15　8.5　－50　－56.5　－56.5　－56.5

ρ：1.226　1.112　0.412 5　0.363 7　0.193 4　0.04]

2－11. 已知海平面处 $p_a = 101.3$kPa，$T_a = 288$ K，试问在多少海拔高度处它们的数值能各自减小1%？

[答：$z = 84.6$ m处 p_a 减小1%，$z = 443$ m处 T_a 减小1%]

2－12. 已知海平面处 $p_a = 101.3$ kPa，$T_a = 288$ K，$\rho_a = 1.226$ kg/m^3，$g = 9.81$ m/s^2，气体常数 $R_g = 288$ J/kg·K，试按下列四种假设求出海拔1 km处的绝对压强(取五位有效数字)。

(1) 国际标准大气($\beta = 0.006\ 5$ K/m)；

(2) 大气视为等温状态($T = 288$ K)；

(3) 大气视为绝热状态(绝热指数 $\gamma=1.4$);

(4) 大气视为不可压缩流体($\rho=1.226\ \mathrm{kg/m^3}$)

[答:(1) 89 844 Pa; (2) 89 963 Pa; (3) 89 774 Pa; (4) 89 273 Pa]

2-13. 已知标准大气压 1 atm=101 300Pa,水的相对密度 $d_{H_2O}=1$,汞的相对密度 $d_{Hg}=13.6$,油的相对密度 $d_{oil}=0.8$,空气的相对密度 $d_{air}=1.226\times10^{-3}$,试进行压强的换算,填写表中空白栏目(1)~(25)中的数值。

已知		求绝对压强(Pa)		已知		求计示压强(atm)	
计示压强	10 mH_2O	1		计示压强	9.81 mmHg	14	
	0	2			0.981 bar	15	
	2 atm	3		真空度	-10 atm	16	
	-10^4 Pa	4			-0.5 Pa	17	
	2 bar	5		绝对压强	10^6 Pa	18	
	10 moil	6			2 bar	19	
真空度	0.1 bar	7			1 mHg	20	
	1 mH_2O	8			1.013 bar	21	
	100 mmHg	9			20 mH_2O	22	
	-100 Pa	10			7.6 mHg	23	
	100 m air	11		已知			
绝对压强	10 m air	12		绝对压强	5mH_2O	24	
	0.981 bar	13			8km air	25	

[答:(1) 199 400;(2) 101 300; (3) 303 900; (4) 91 300; (5) 301 300; (6) 819 780; (7) 91 300; (8) 91 490; (9) 88 000; (10) 101 400; (11) 100 097; (12) 120; (13) 98 100; (14) 0.012 9; (15) 0.968; (16) 10; (17) 4.936×10^{-6}; (18) 8.87; (19) 0.974; (20) 0.32; (21)0; (22) 0.936; (23) 9; (24) 0.484; (25) 0.050 6]

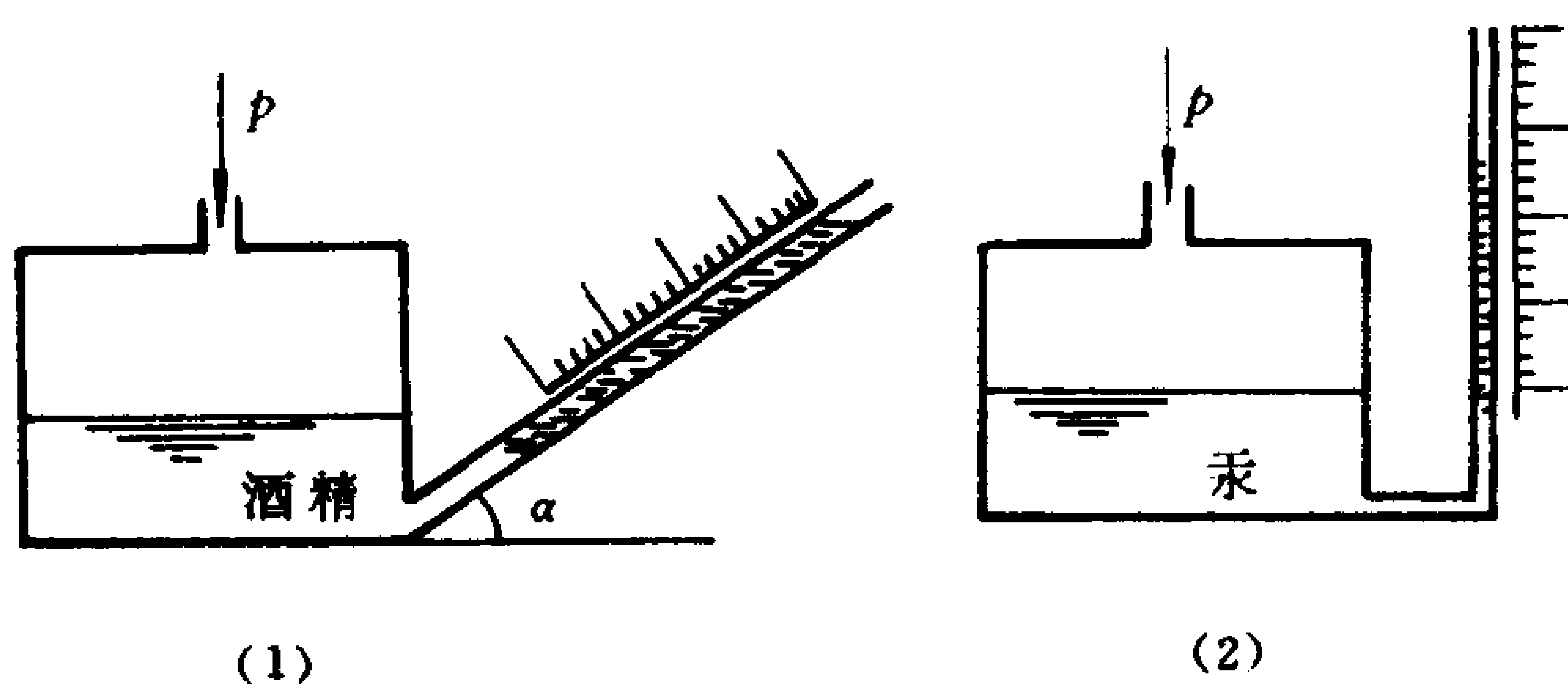
2-14. 用图(1)所示倾斜酒精微压计测量气体的微小压强。

(1) 设用目力观测标线的准确度为 0.5 mm,为使测量 $p=(100\sim200)$ mm 水柱的压强时,测量误差不超过 ±0.2%,试确定斜管与水平面间的夹角 α。

(2) 如果用图(2)的单管汞测压计测量同样压强,其最大测量误差是多少?

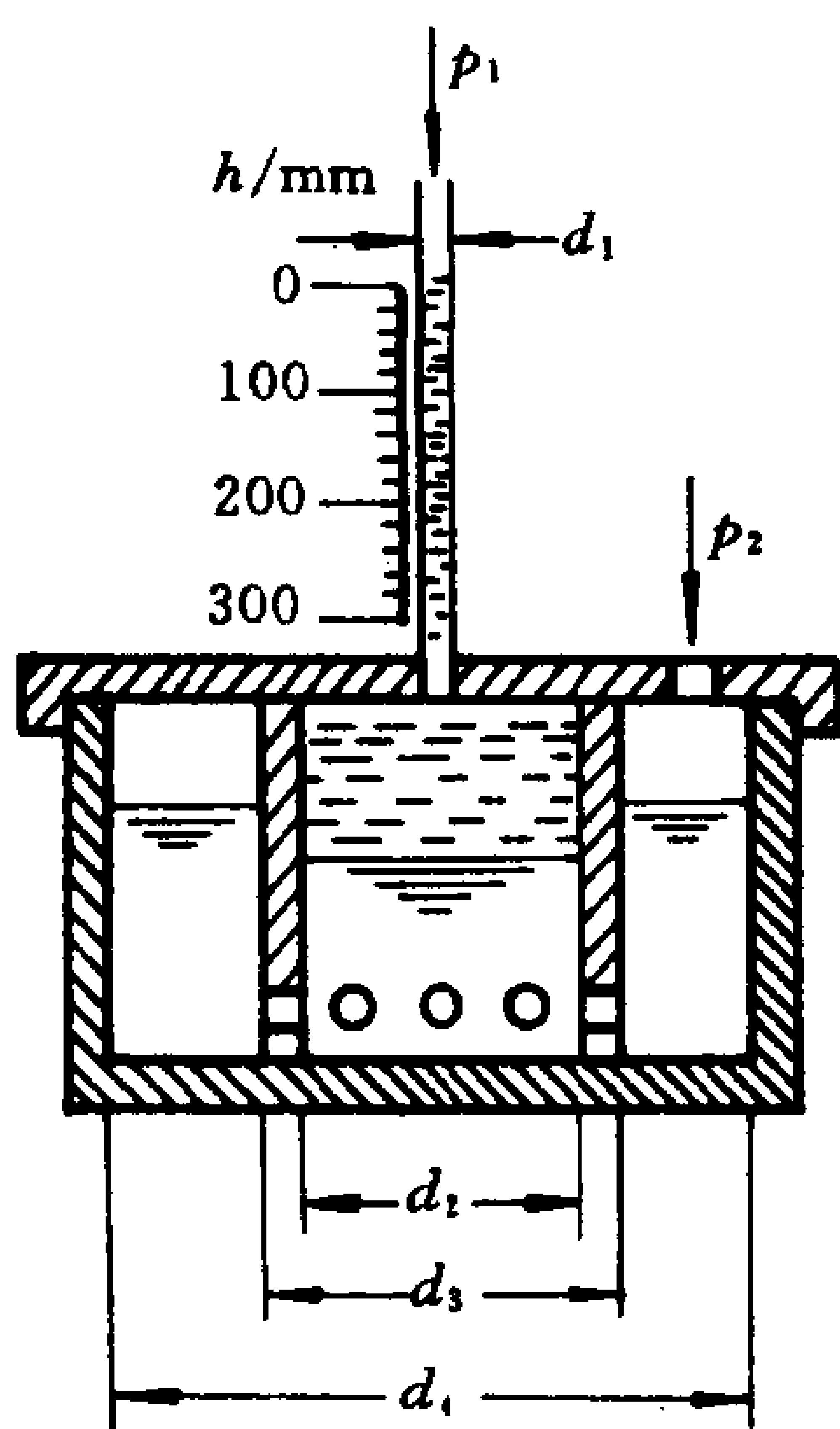
酒精的相对密度为 0.8,汞相对密度为 13.6,杯中液面可以认为不变。

[答：$\alpha \leqslant 30°$，6.8%]

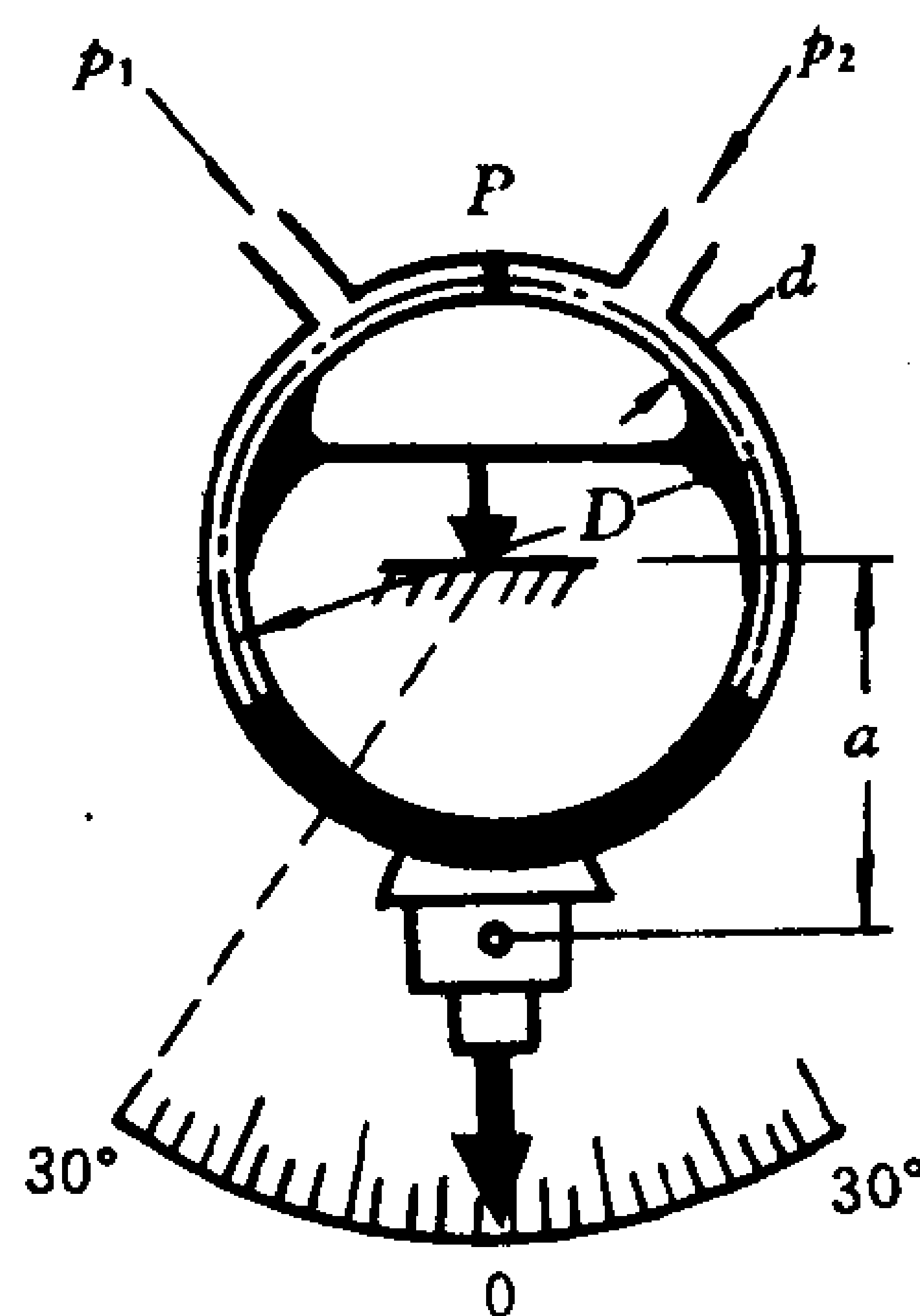


题 2－14 图

2－15. 气体微压计由两个同心套筒组成，两筒上部隔绝并分别引入气体压强 p_1 与 p_2，两筒下部有小孔连通，下部装有汞，内筒上部装入适量酒精（相对密度为 0.79），使气体压强差 $\Delta p = p_1 - p_2 = 0$ 时，酒精液面在小管中标尺 $h = 0$ 处。



题 2－15 图



题 2－16 图

(1) 试求使小管液面每下降 1 mm 的压强差 Δp 是多少？

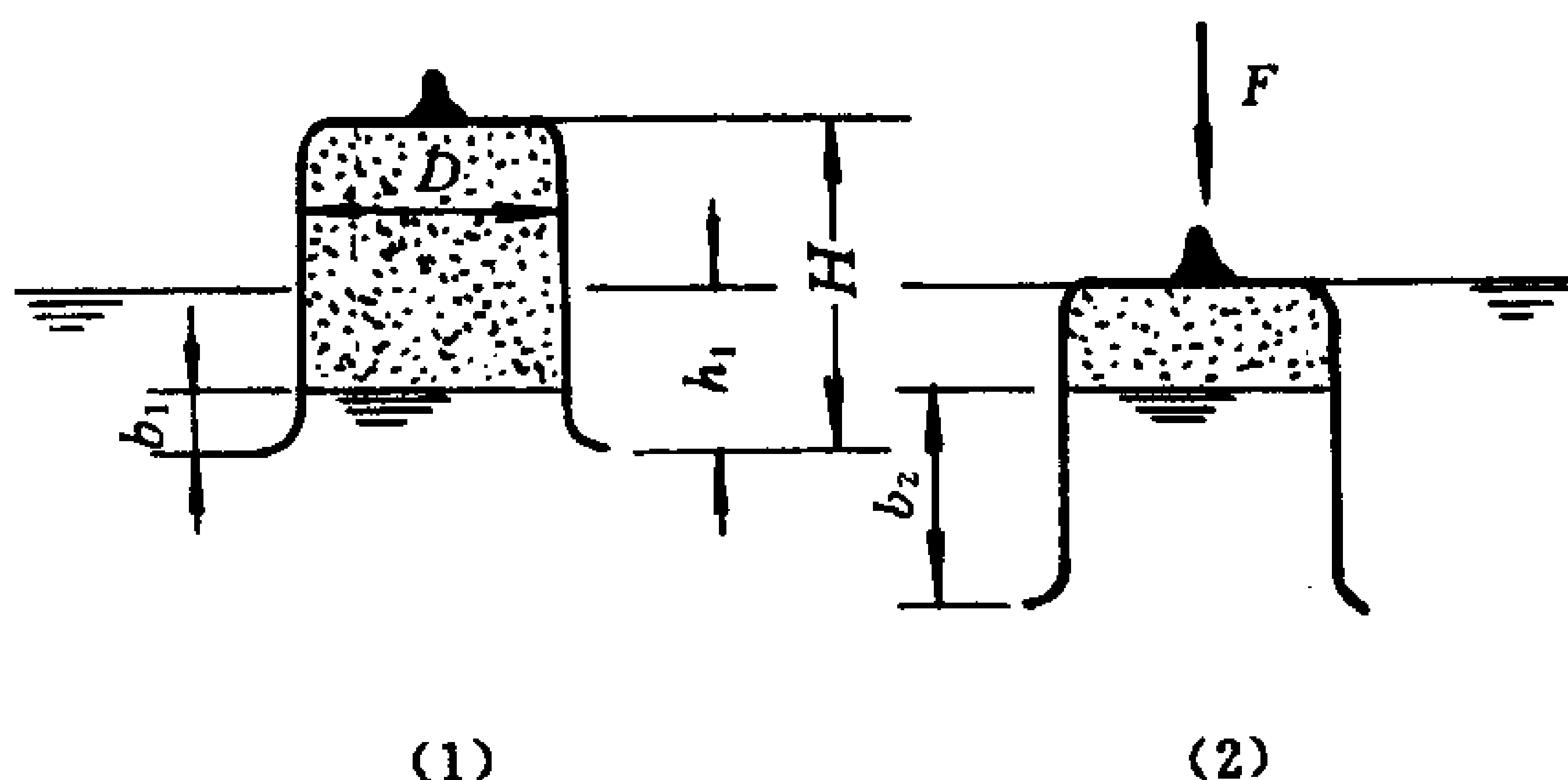
(2) 如果小管最大刻度是 300 mm，则能测量的最大压强差 Δp_{max} 是多少？已知 $d_1=10$ mm，$d_2=30$ mm，$d_3=32$ mm，$d_4=40$ mm。

[答：$\Delta p=44.88$Pa，$\Delta p_{max}=13.64$ kPa]

2-16. 图示的环型差压计是用来测量气体微小压强差的一种仪器，直径为 d 的圆管弯成平均直径为 D 的圆环形状，顶部 P 用隔板隔开，下部充入适量汞，圆环用刃口支承在环中心上，下部连接有配重和指针，当压强差 $\Delta p=p_1-p_2=0$ 时，指针指零。当 $\Delta p>0$ 时，环中汞被压向右边，而圆环与配重指针则顺时针偏转一定角 θ 以保持仪器的平衡。已知 $D=50$ mm，$d=6$ mm，配重重心的半径 $a=60$ mm，要求当 $\Delta p=30$ kPa 时，偏转角 $\theta=30°$，试计算配重应选取的质量是多少？

[答：$m=0.072$ kg]

2-17. 薄壁钟形容器的直径 $D=0.5$ m、高 $H=0.7$ m，质量 $m=101.94$ kg，在自重作用下铅直沉入水中，保持平衡，原来钟罩内的大气按等温规律被压缩在钟罩内部，如图(1)所示。已知大气压强 $p_a=10^5$ Pa。



题 2-17 图

(1) 试求钟的淹没深度 h_1 及钟内充水深度 b_1，

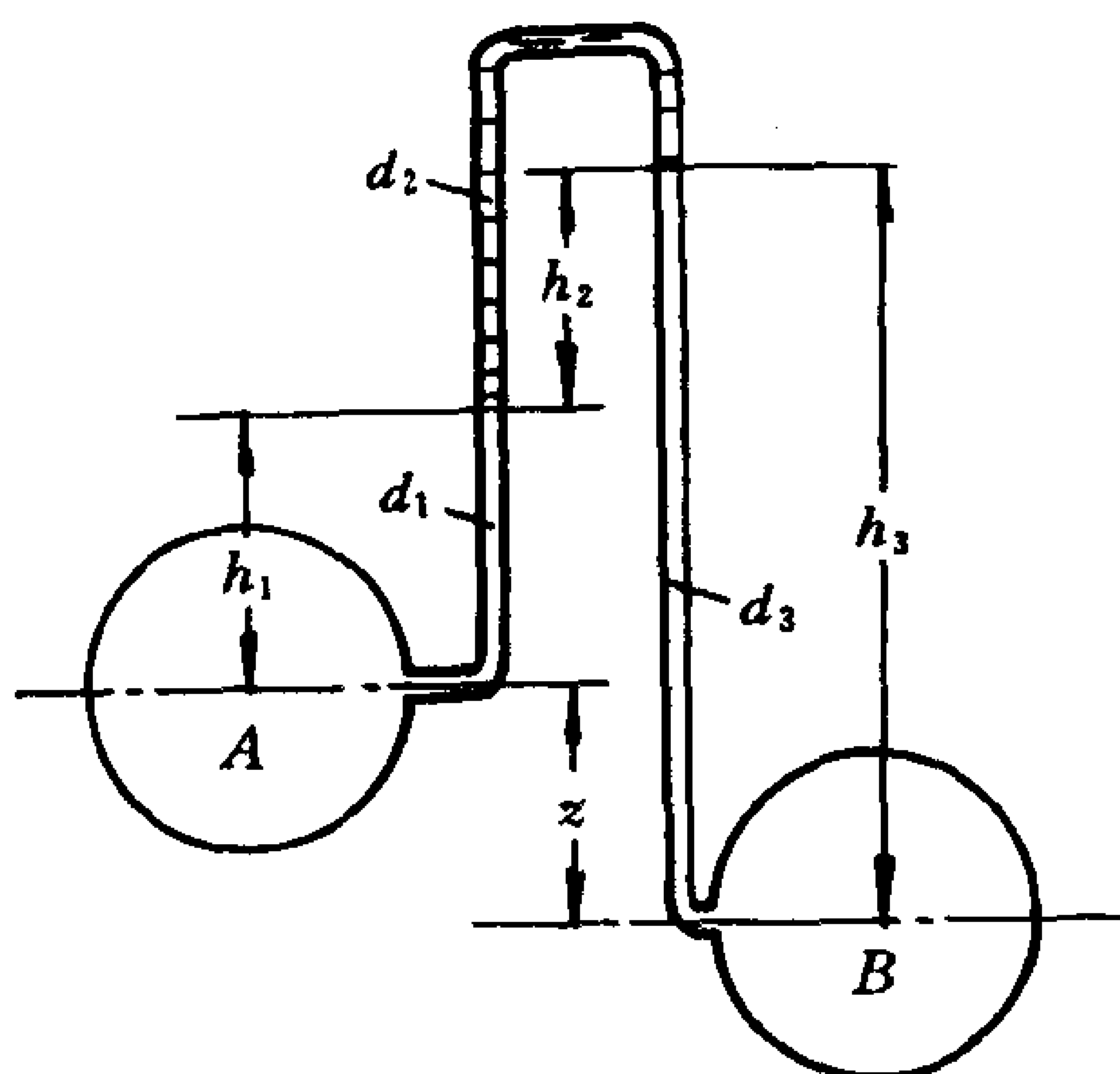
(2) 需加多大的力 F 才能使钟罩完全没入水中，如图(2)所示，此时钟置内的气体绝对压强及钟罩内的充水深度是多少？

[答：(1) $h_1=55.4$ cm，$b_1=3.4$ cm

(2) $F=256.6$ N，$p=106.4$ kPa，$b_2=4.2$ cm]

2-18. 为了测量高度差为 z 的两个水管中的微小压强差 p_B-p_A，用顶部充有较水轻而与水不相混合的液体的倒 U 形管。

(1) 已知 A、B 管中的液体相对密度 $d_1=d_3=1$，倒 U 形管中液体相对密度 $d_2=0.95$，$h_1=h_2=0.3$ m，$h_3=1$ m，试求压强差 p_B-p_A。



题 2－18 图

(2) 仪器不变，工作液体不变，但两管道中的压强差 $p_B - p_A = 3\ 825.9$Pa。试求此时液柱高度 h_1、h_2、h_3 及 z。

(3) 求使倒 U 形管中液面成水平，即 $h_2 = 0$ 时的压强差 $p_B - p_A$。

(4) 如果换成 $d_2 = 0.6$ 的工作液体，试求使 $p_B - p_A = 0$ 时的 h_1、h_2 及 h_3。

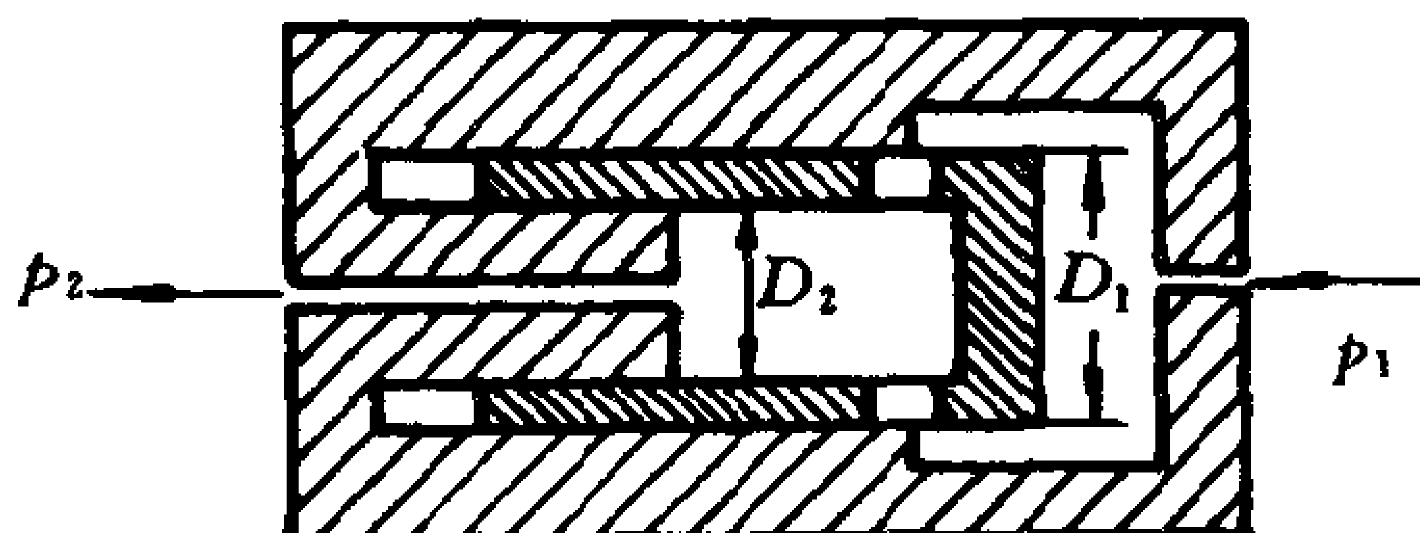
[答：(1) $p_B - p_A = 4\ 071$ Pa

(2) $h_1 = 0.55$ m, $h_2 = -0.2$ m, $h_3 = 0.75$ m, $z = 0.4$ m

(3) $p_B - p_A = 3\ 924$ Pa

(4) $h_1 = 0.95$ m, $h_2 = -1$ m, $h_3 = 0.35$ m]

2－19. 液力倍压器中活动柱塞的外径 $D_1 = 40$ mm，内径 $D_2 = 20$ mm，



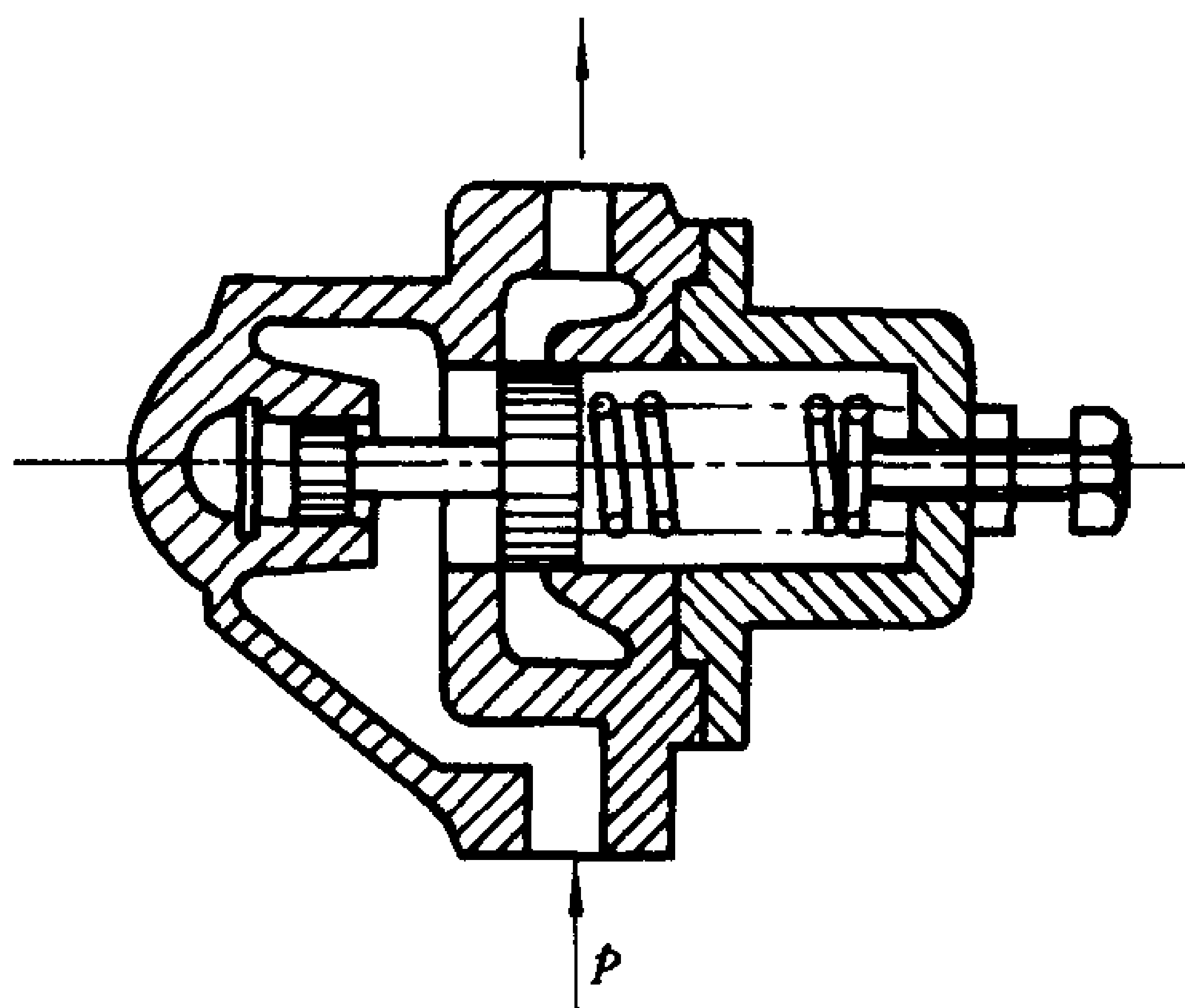
题 2－19 图

已知 $p_1 = 10^6$ Pa，试求由倍压器输出的液体压强 p_2。

[答：$p_2 = 3\ 000$kPa]

2－20. 差动滑阀上有直径为 $D_1 = 22$ mm 及 $D_2 = 20$ mm 的两个相连的

活塞,大活塞上的弹簧预紧力使油路切断。已知弹簧刚度为 $k = 8$ N/mm,弹



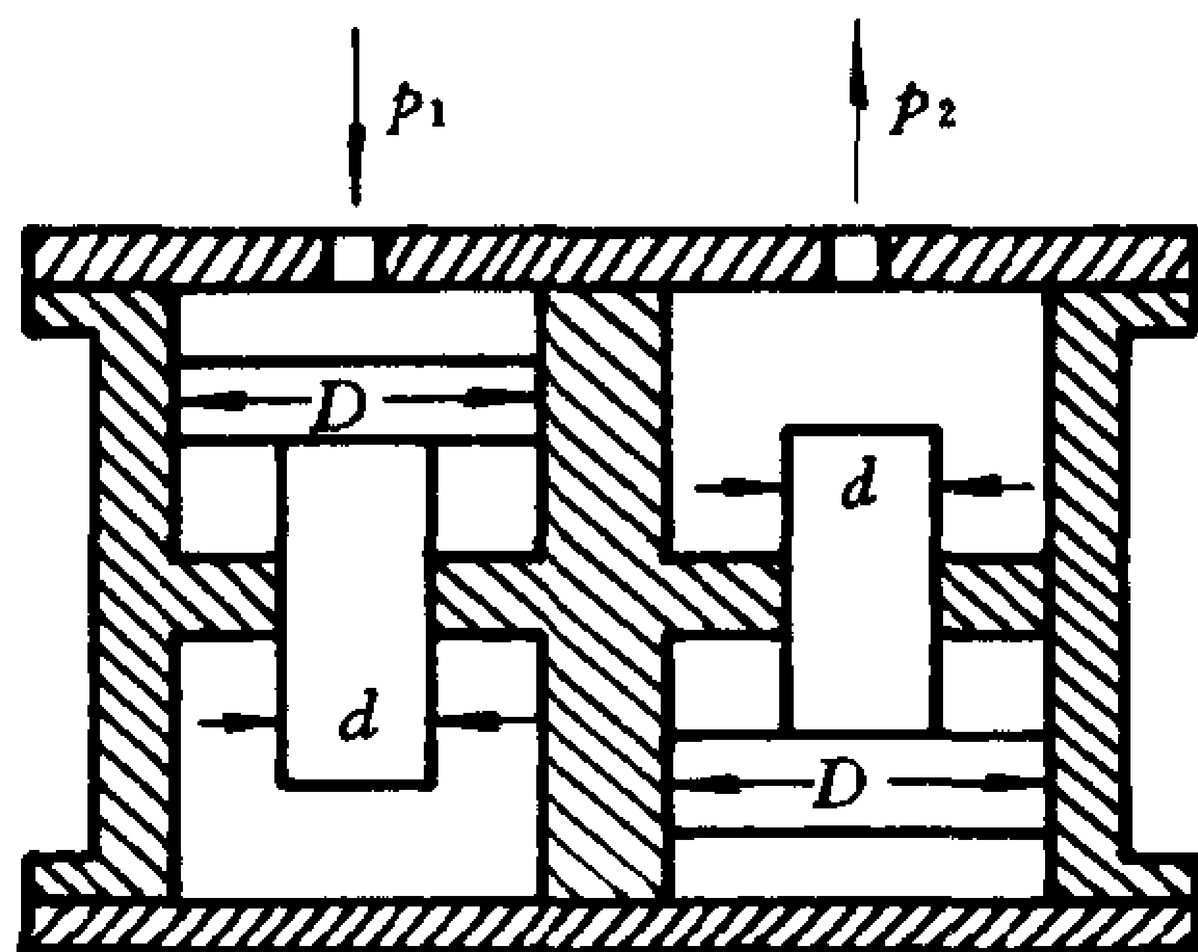
题 2-20 图

簧预紧压缩长度为 10 mm,试求接通油路所需的油压压强。

[答:$p = 1\ 213$kPa]

2-21. 二级液压放大器如图所示,两个柱塞直径均为 $D = 2$cm, $d = 1$ cm。已知 $p_1 = 10$ kPa, $p_2 = 10^6$ Pa,忽略摩擦力,试求每个柱塞的质量。

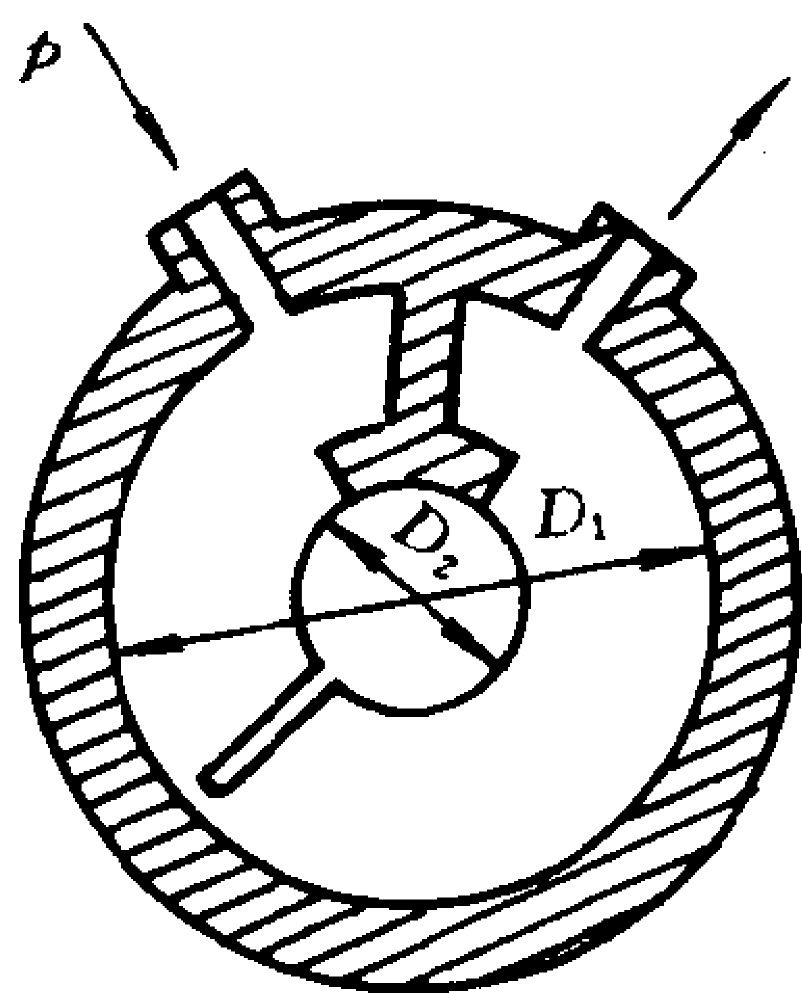
[答:$m = 2.24$ kg]



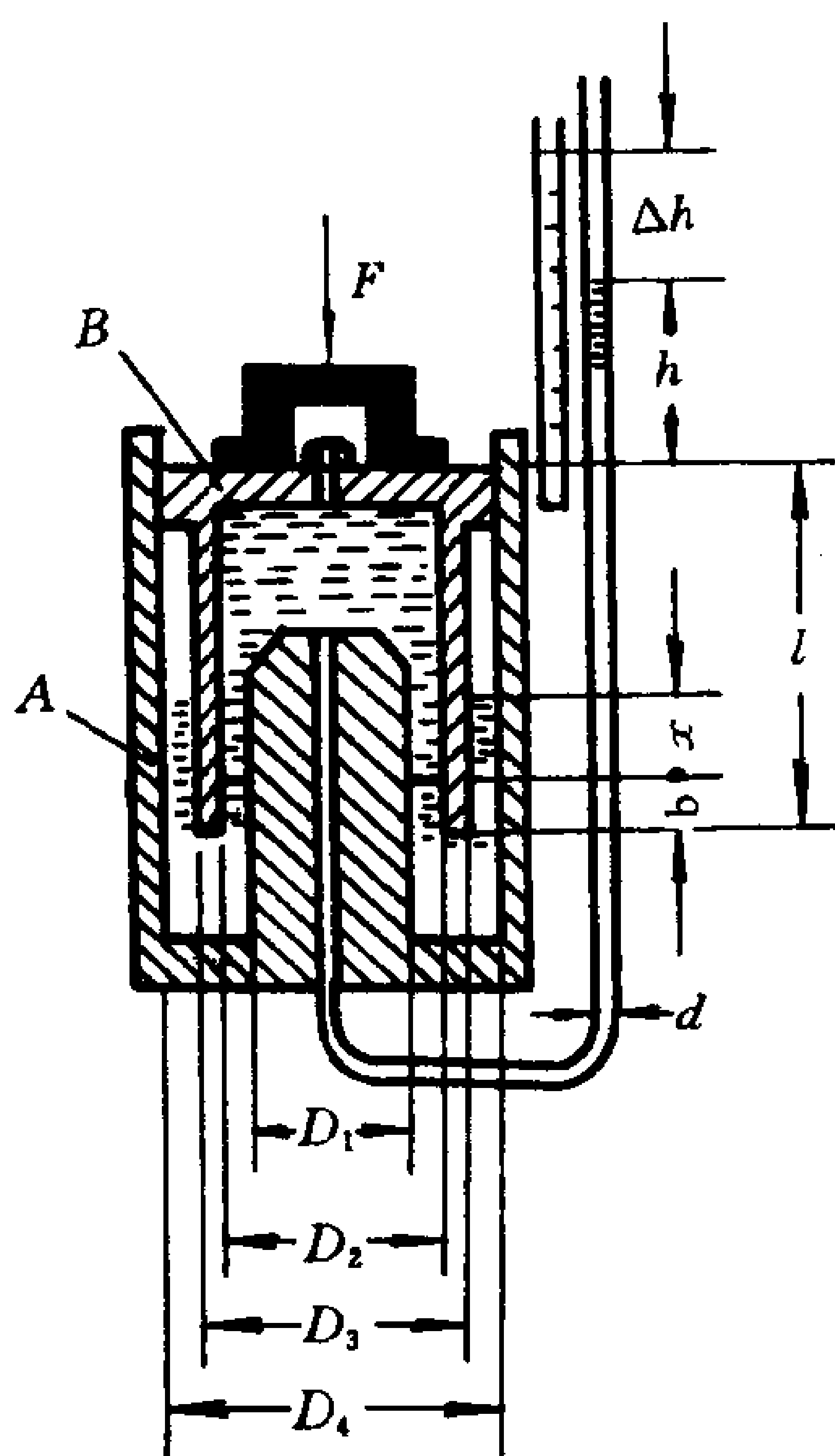
题 2-21 图

2-22. 如图所示的摆动油马达,由固定外壳及连接在转子上的叶片所组成。当左右油口交替进入高压油时,叶片连同转子产生摆动运动。已知壳体内径 $D_1 = 10$ cm,转子直径 $D_2 = 4$ cm,叶片垂直于纸面的宽度 $b = 4$ cm,油的计示压强 $p = 6\ 000$ kPa,试求摆动油马达的力矩。

[答：$M = 252$ Nm]



题 2－22 图



题 2－23 图

2－23．液柱式测力计如图所示，在侧壁有通气孔的容器 A 中装入适量汞，罩形的封闭容器 B 内充满酒精，罩盖与容器 A 的内壁可作无摩擦的滑动接触，由于罩盖 B 有一定的质量 $m = 14.27$ kg，于是罩内酒精受到压缩，测压管中酒精液面比罩盖高出 h 距离，同时罩盖内外的汞液面形成一定的高度差 x。已知：$d = 0.01$ m，$D_1 = 0.1$ m，$D_2 = 0.2$ m，$D_3 = 0.21$ m，$D_4 = 0.24$ m，罩盖高度 $l = 0.8$ m，酒精相对密度为 0.8。

(1) 罩盖上未受外力，在其自重作用下淹没于汞中的深度为 $b = 0.2$ m，试求此时酒精柱高度 h 及汞液面差 x 是多少？

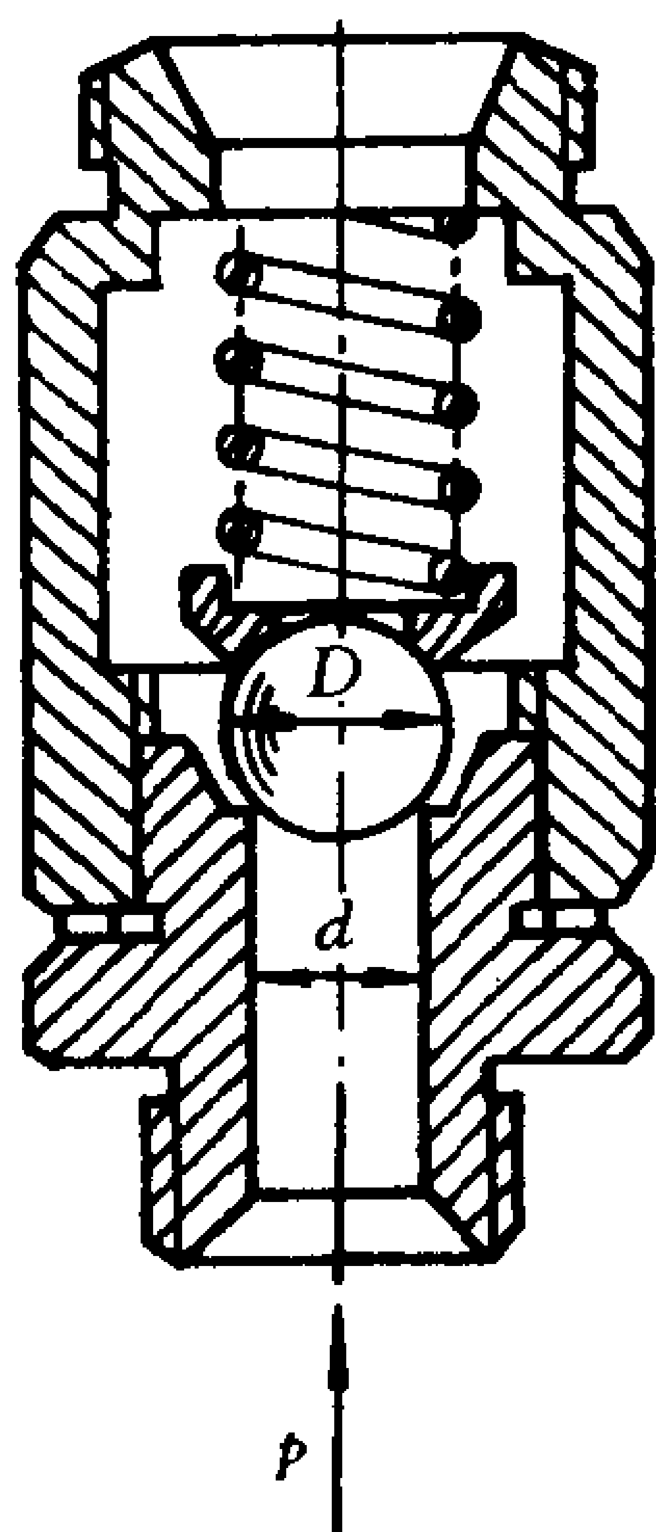
(2) 如果罩盖受外力 F 作用时，测压管中的酒精柱又上升了 $\Delta h = 0.2$ m，试求①罩在汞中的淹没深度 t；②罩内外汞液面差 ΔH；③外力 F。

[答：(1) $h = 0.22$ m，$x = 48$ mm

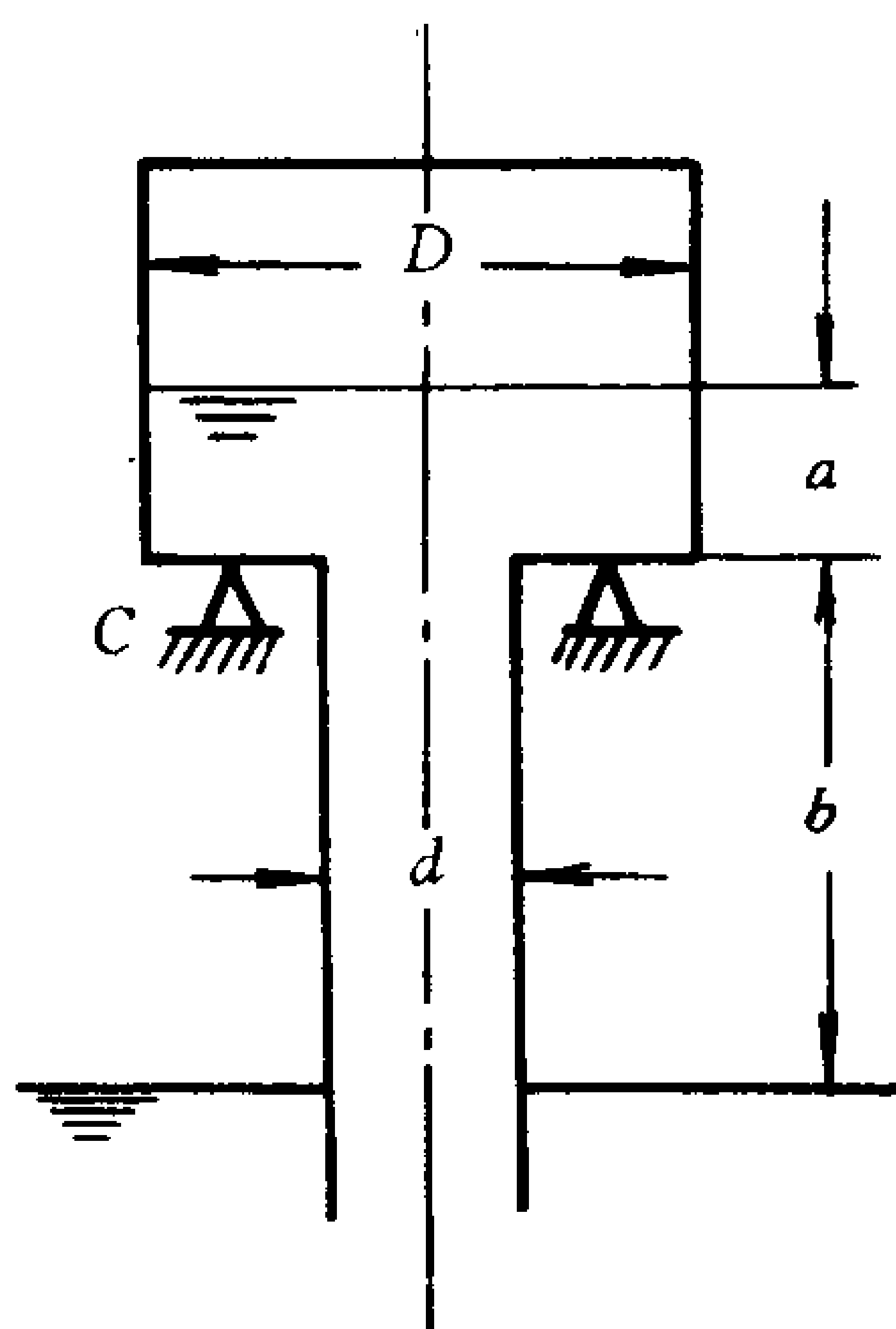
(2) $t = 199.6$ mm；$\Delta H = 60.2$ mm；$F = 49.9$ N]

2－24．单向阀弹簧刚度为 $k = 6$ N/mm，预压缩量为 $x = 5$ mm，钢球直径 $D = 24$ mm，入口管道直径 $d = 10$ mm，钢球相对密度是 7，试求接通油路

所需要的计示压强 p。



题 2－24 图



题 2－25 图

[答：$p=388$ kPa]

2－25．直径 $D=0.8$ m，$d=0.3$ m 的圆柱形容器质量为 102 kg，支承在距离液面为 $b=1.5$ m 的支架 C 上，由于容器内部建立真空，将水吸入容器。容器内液面高度为 $a+b=1.9$ m，试求支架上的支承力 F。

[答：$F=4\,013$ N]

2－26．直径 $D=12.5$ m，高 $H=4.5$ m，质量 $m=44.85$ kg 的煤气罐中充满相对密度为 0.54×10^{-3} 的煤气。忽略摩擦，为了在煤气罐中心处保持 $p=2\,000$ Pa 的计示压强，试确定所必需的荷重 W，并求出煤气罐内外的水位差 h。

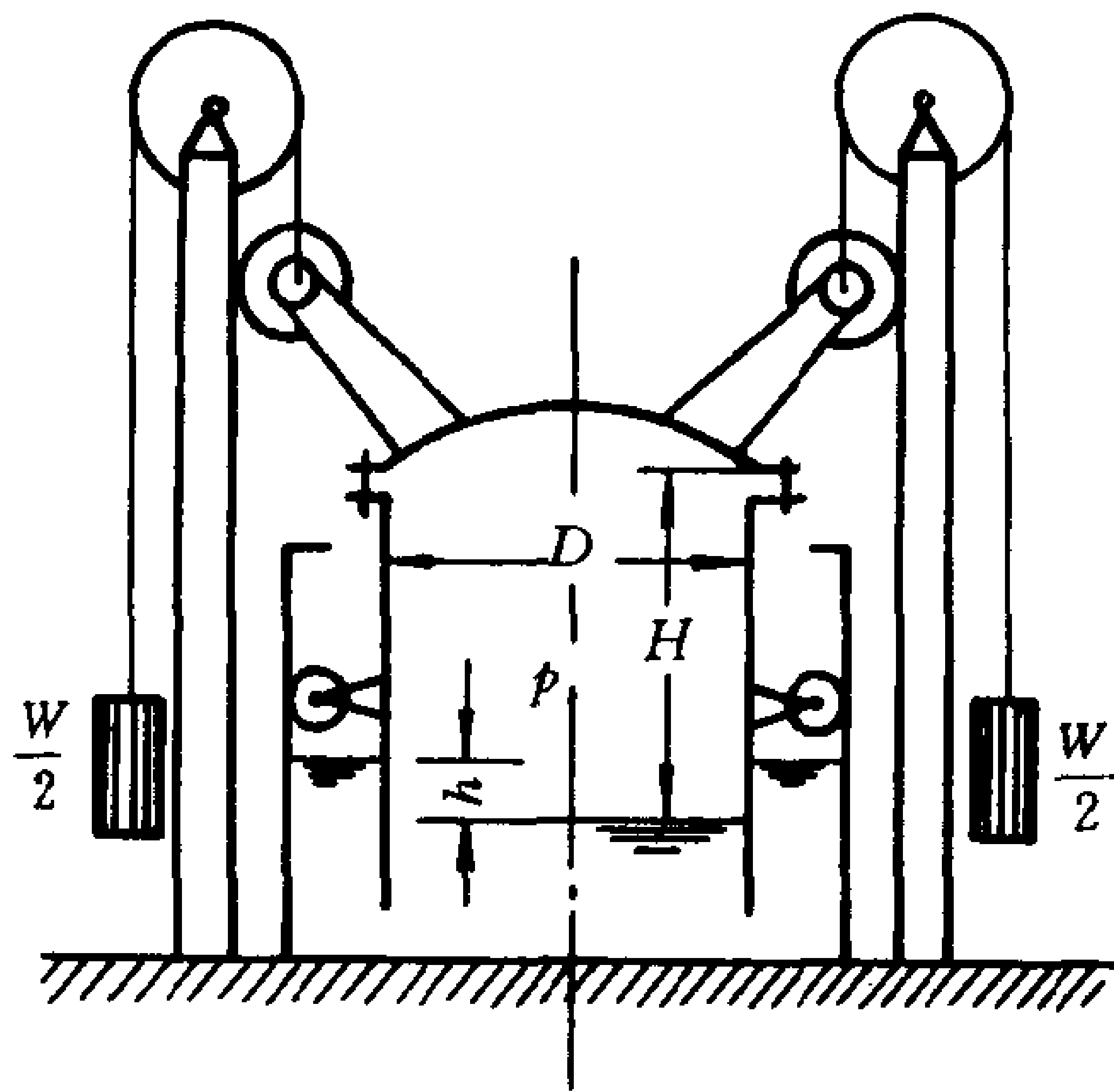
[答：$W=19.6\times10^{4}$ N，$h=0.205$ m]

2－27．图示一种双杯天秤式微真空压差计，两个直径为 $D=0.1$ m 的薄壁圆筒用 $l=0.26$ m 的吊杆悬挂在支点上，吊杆中间有一个长为 $a=0.4$ m、端头装有配重 W 的摆杆，薄壁圆筒下端浸入水中，而被测的压强则用细管引入圆筒内。当两端压强相等时，吊杆成水平位置，摆杆指零。当两端有微小压强差时，圆筒微移，吊杆微斜，而摆杆示出倾斜角 α。

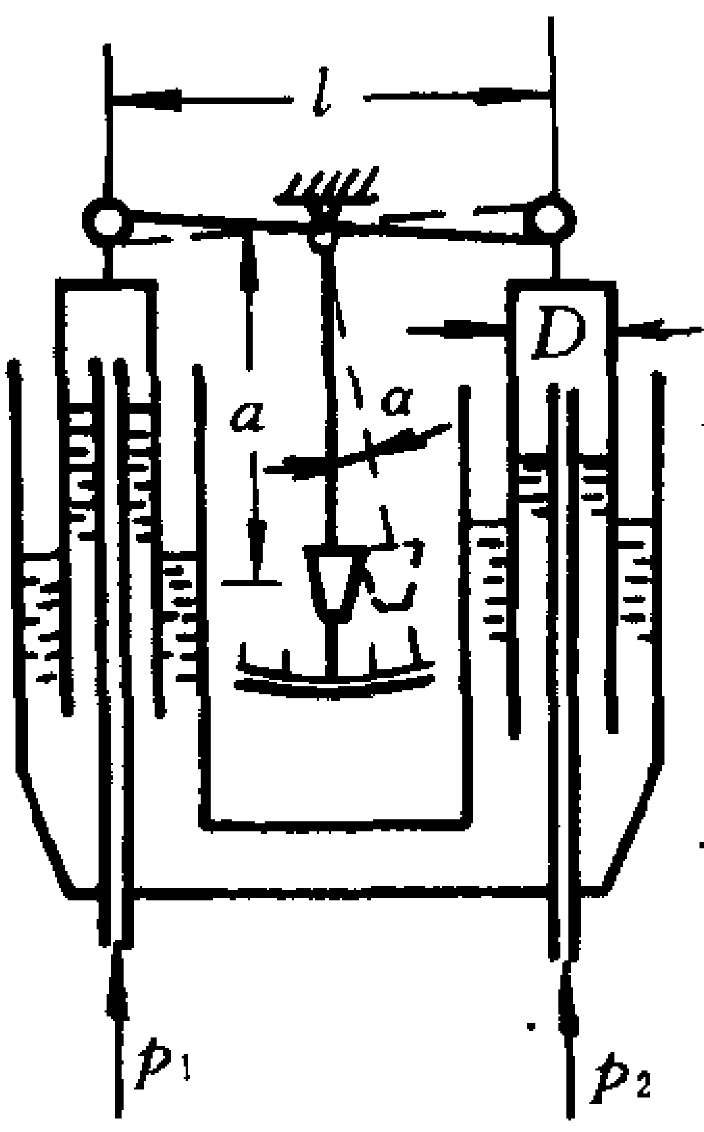
为了使压强差 $\Delta p=1\,000$ Pa 时，杆的倾斜角不超过 10°，试求配重 W 应

该是多大?

[答:$W=14.48$ N]



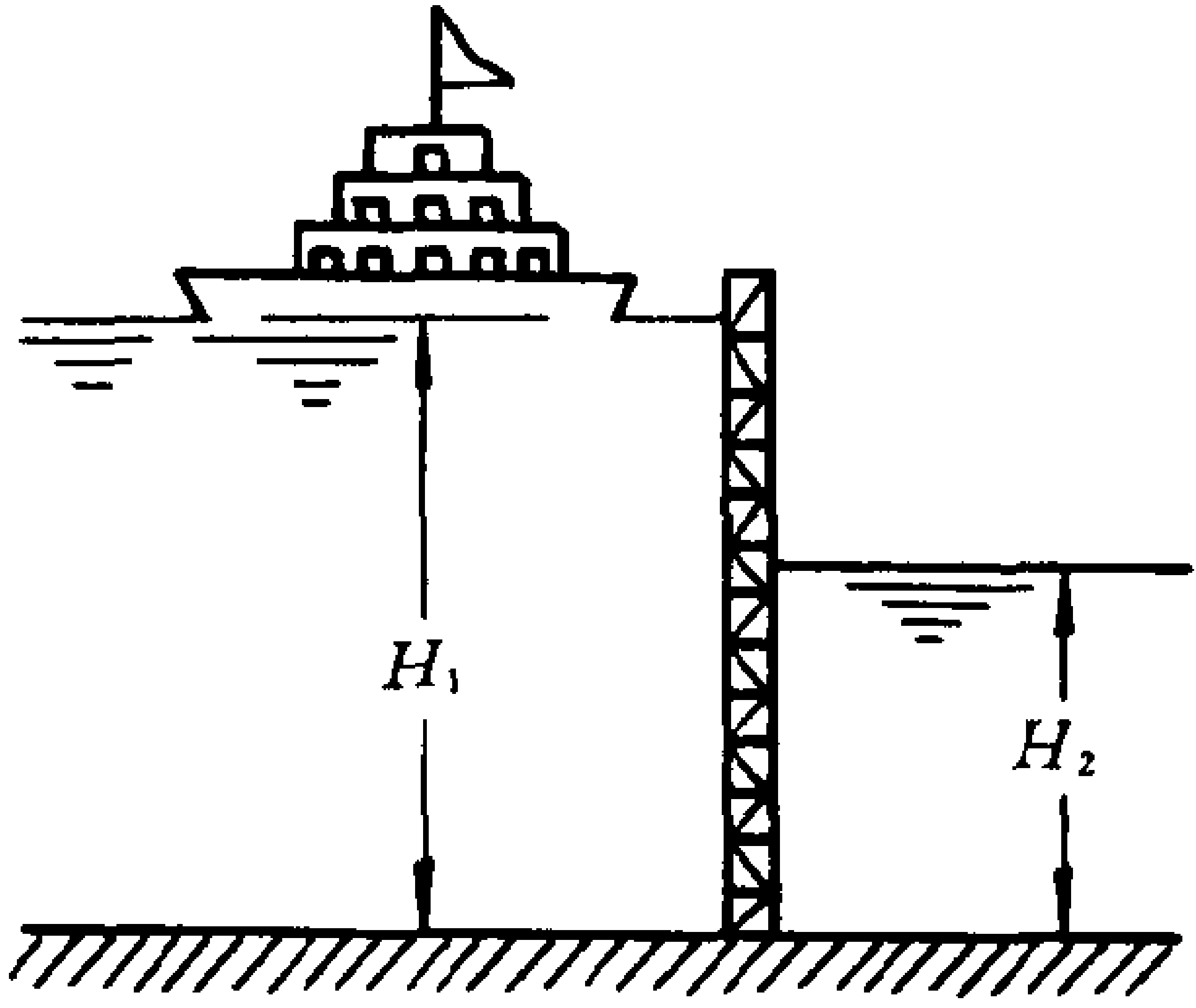
题 2－26 图



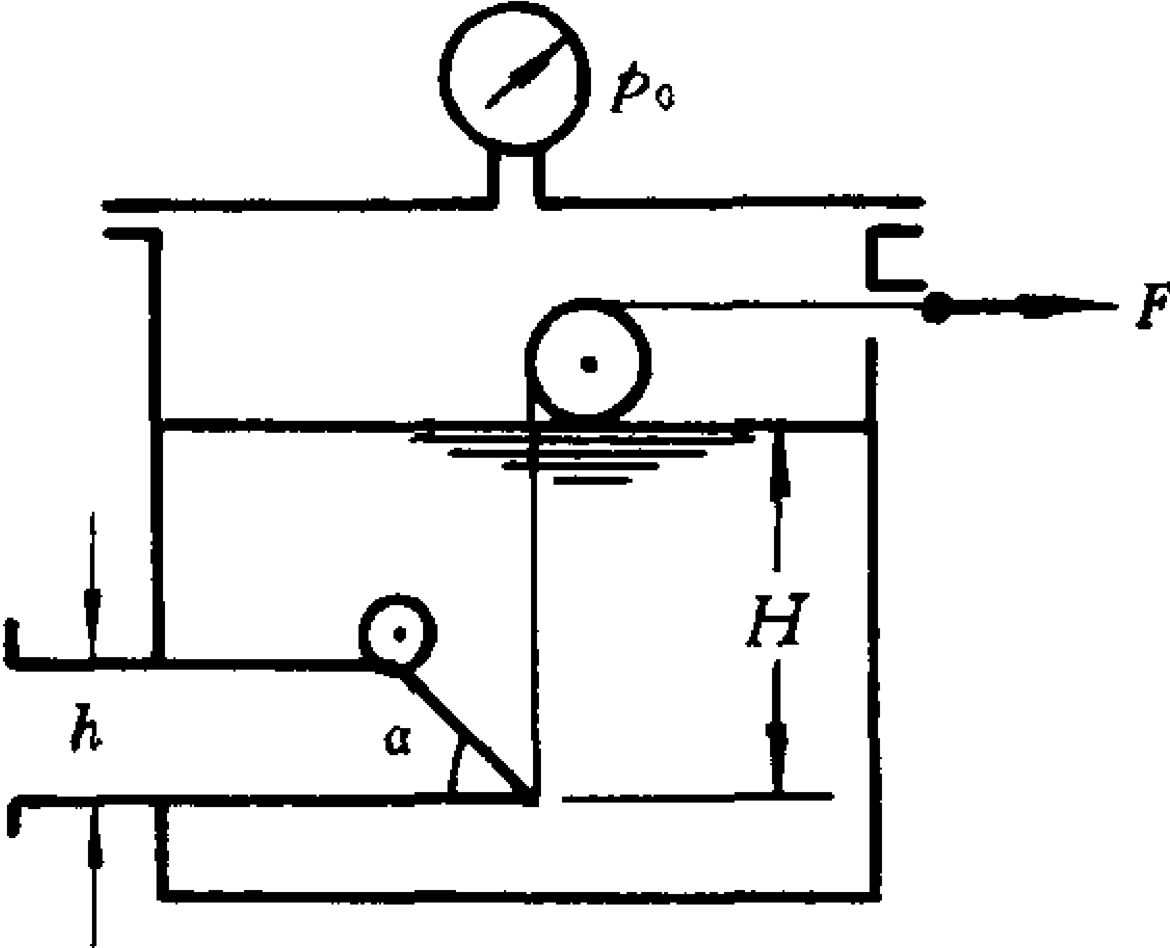
题 2－27 图

2－28. 船闸宽度 $B=25$ m,上游水位 $H_1=63$ m,下游水位 $H_2=48$ m,船闸用两扇矩形闸门开闭,试求作用在每个闸门上的水静压力大小及压力中心距基底的标高。

[答:$F=1.02\times10^8$ N, $Y=27.9$ m]



题 2－28 图



题 2－29 图

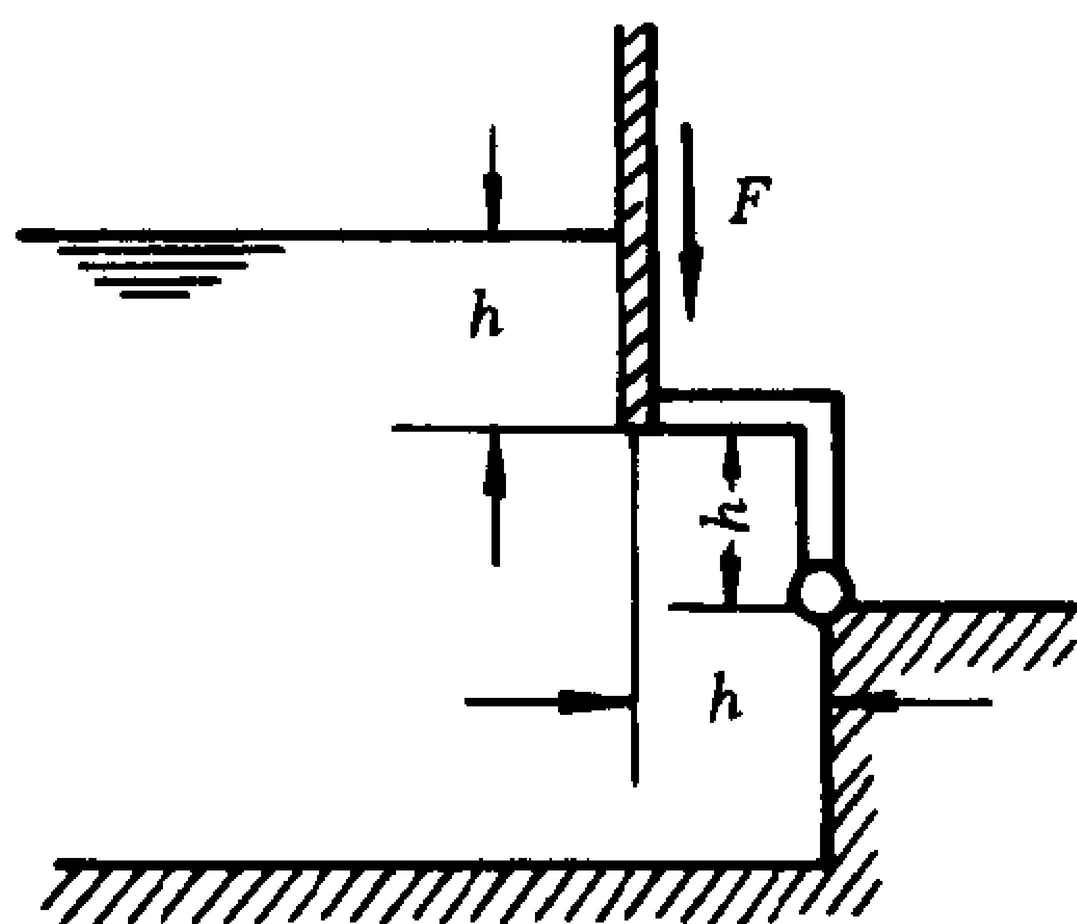
2－29. 用转动平板闸门控制汽油箱通向边长 $h=0.3$ m的正方形管道出口,汽油相对密度为0.69,汽油箱内的计示压强 $p_0=5\ 000$ Pa, $H=$

0.85 m，$\alpha=45^{\circ}$，忽略摩擦，试求开启闸门所需的绳索的张力 F。

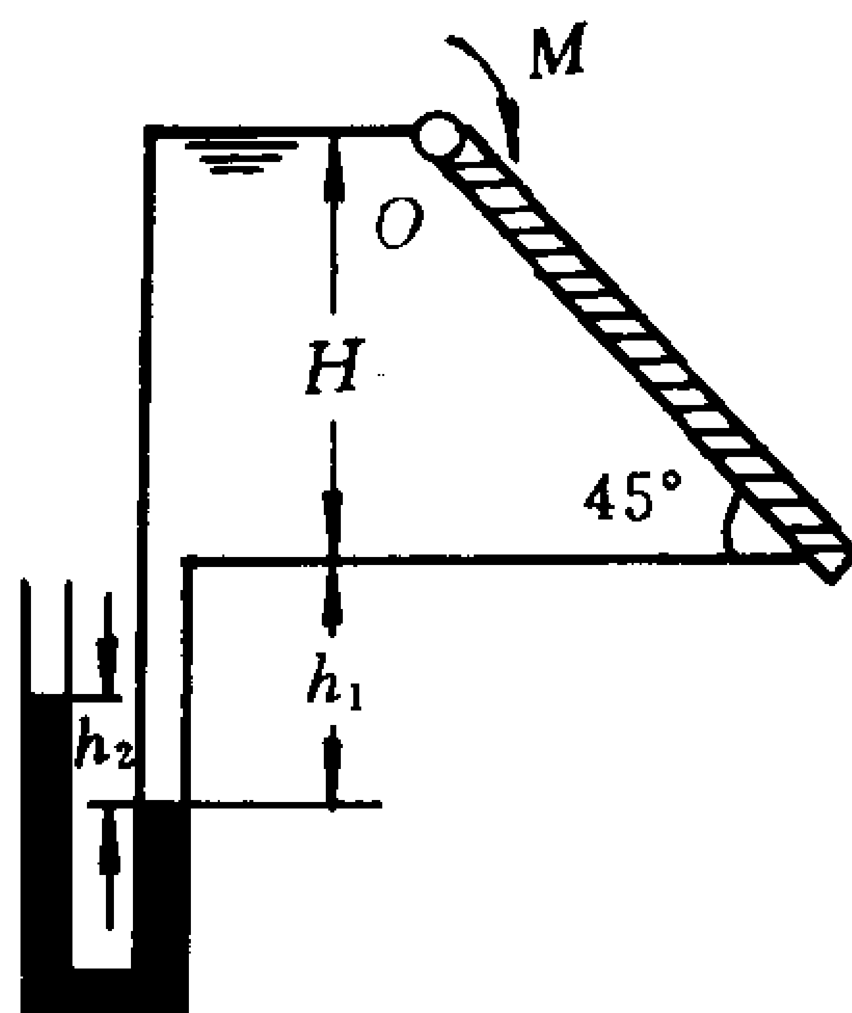
[答：$F=907$ N]

2-30. 如图所示的直角形的闸门，垂直纸面的宽度为 B，试求关闭闸门所需的力 F 是多少？已知 $h=1$ m，$B=1$ m。

[答：$F=11\ 445$ N]



题 2-30 图



题 2-31 图

2-31. 在高度 $H=3$ m，宽度 $B=1$ m 的柱形密闭高压水箱上，用汞 U 形管连接于水箱底部，测得水柱高 $h_1=2$ m，汞柱高 $h_2=1$ m，矩形闸门与水平方向成 45°角，转轴在 O 点，为使闸门关闭，试求在转轴上所需施加的锁紧力矩 M。

[答：$M=9.36\times10^5$ Nm]

2-32. 如图所示的密封容器内盛有油(相对密度为 0.8)和水两层液体，在油层中有一个弧形闸门，其半径 $R=0.2$ m，容器垂直于纸面的宽度 $B=0.4$ m，油水层厚度均为 $h=0.2$ m，汞测压计中的液柱高也是 $h=0.2$ m，弧形闸门的铰链在 O 点，试求封闭液体所需的力 F 为多少？

[答：$F=1\ 758$ N]

2-33. 内径 $D=3$ m 的薄壁钢球贮 $p=14.7\times10^5$ Pa 的气体，已知钢球的许可拉应力是 $\sigma=6\times10^7$ Pa，试求钢球的壁厚 δ。

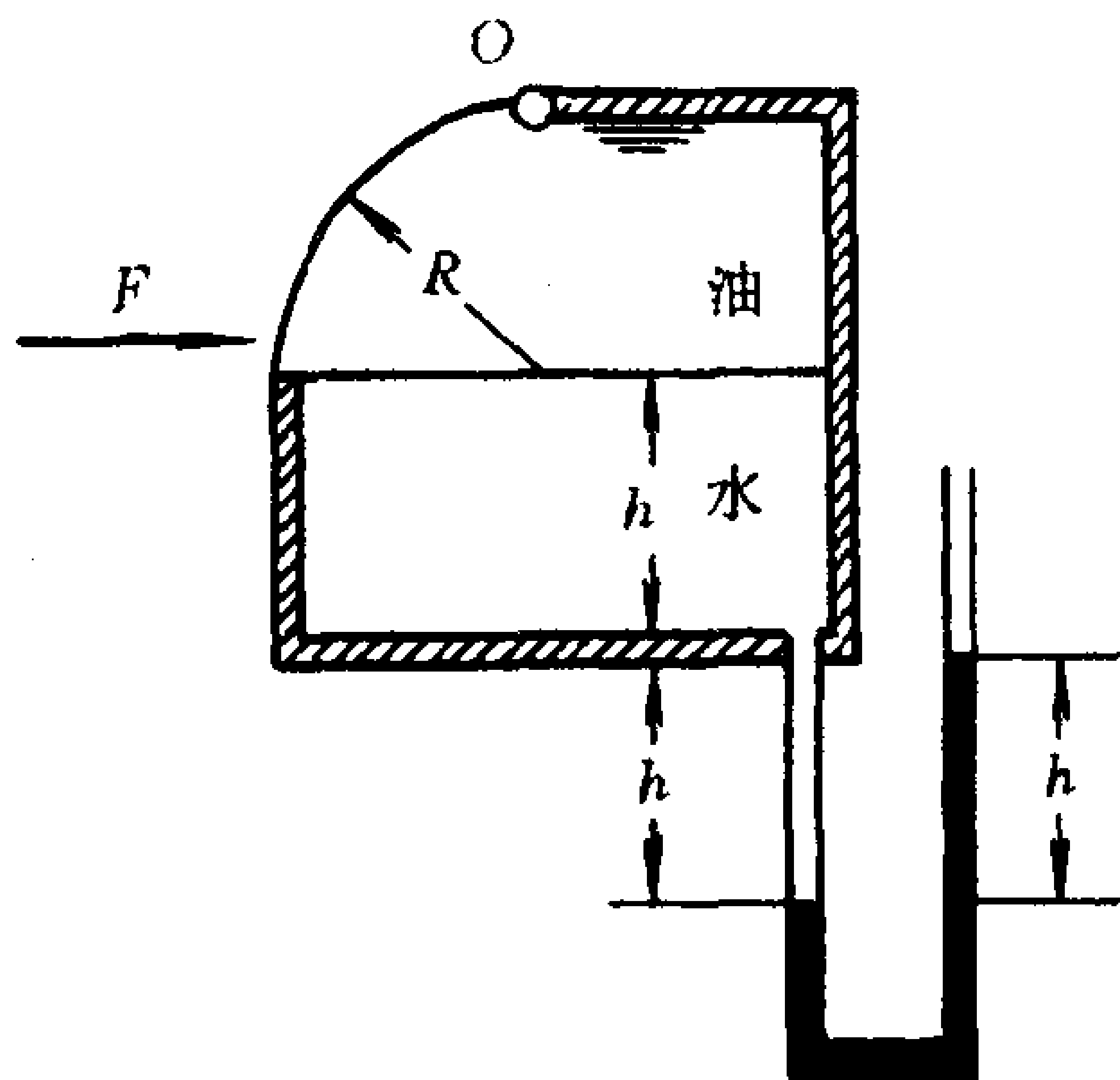
[答：$\delta=18.5$ mm]

2-34. 用熔化铁水(相对密度为 7)铸造带凸缘的半球形零件，试求铁水作用在型箱上的力。

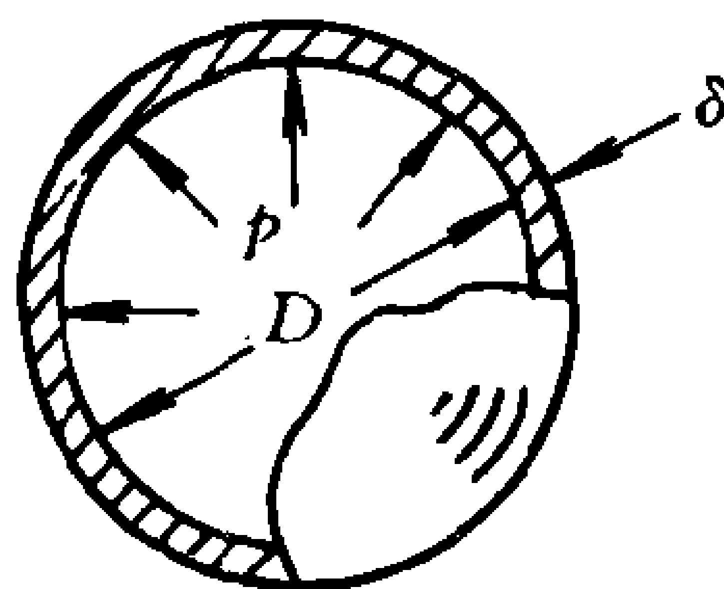
已知 $H=0.5$ m，$D=0.8$ m，$R=0.3$ m，$d=0.05$ m，$\delta_1=0.02$ m，$\delta_2=$

0.05 m。

[答：$F=12\ 366$ N，方向向上]

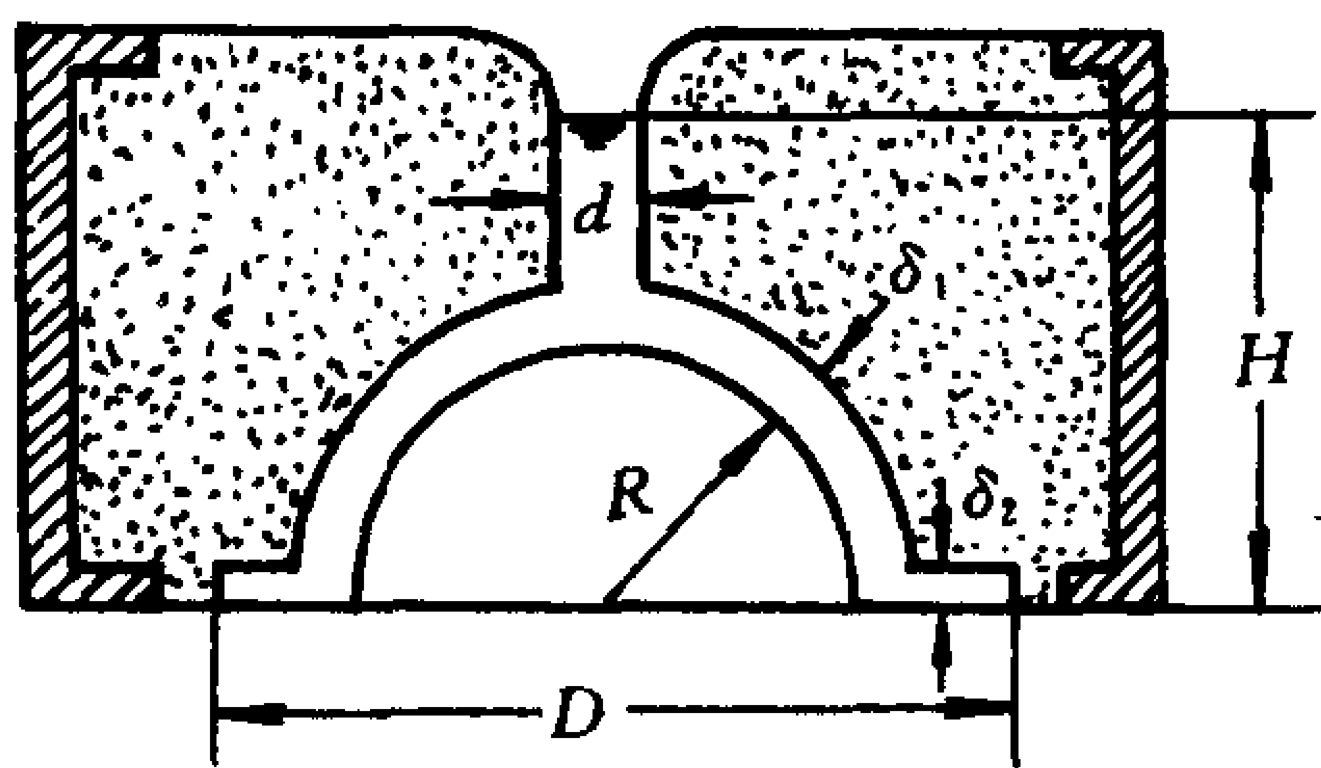


题 2－32 图

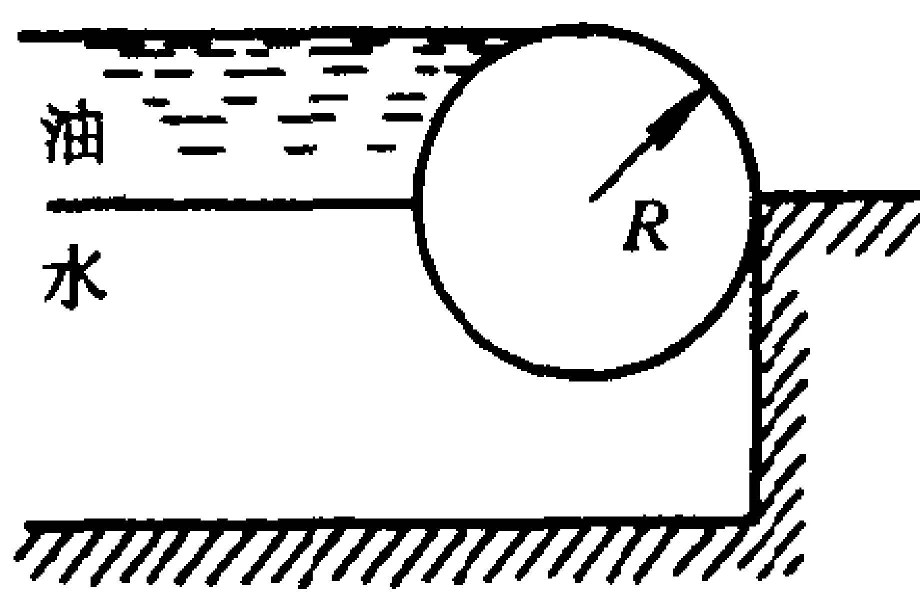


题 2－33 图

2－35. 半径 $R=0.2$ m，长度 $l=2$ m 的圆柱体与油(相对密度为 0.8)、水接触情况如图所示，圆柱体右边与容器顶边成直线接触，试求：



题 2－34 图



题 2－35 图

(1) 圆柱体作用在容器顶边上的力；

(2) 圆柱体的质量与相对密度。

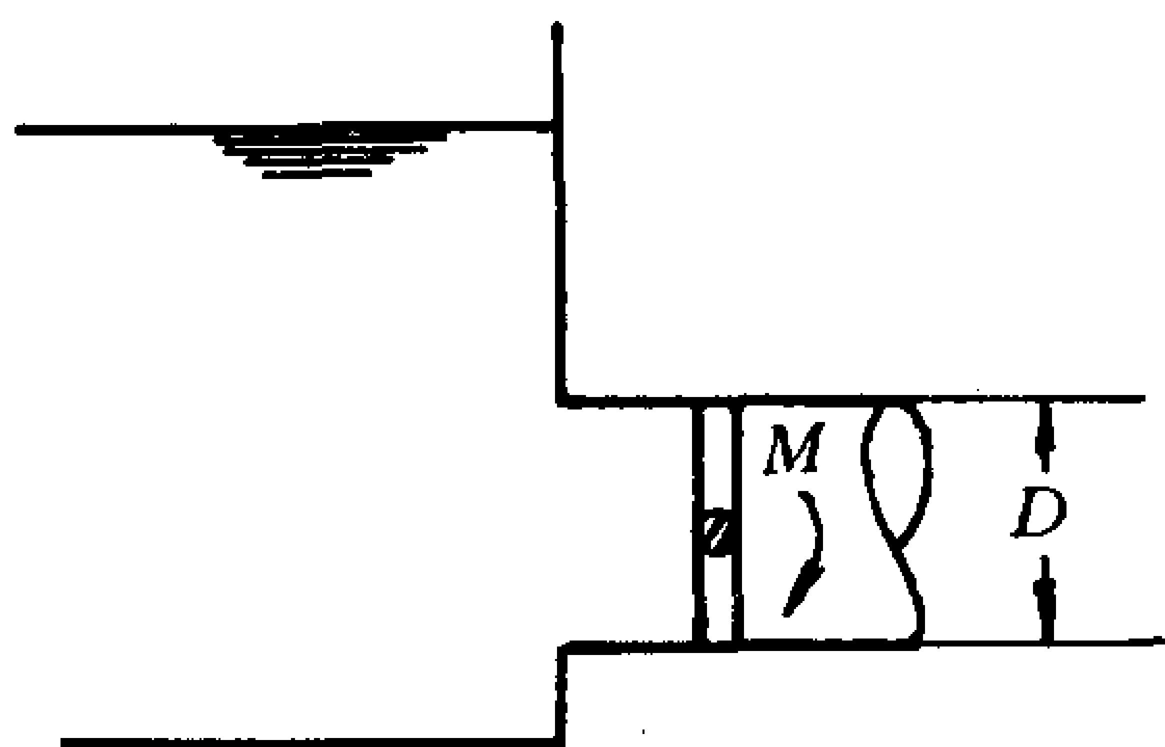
[答：(1) $F=314$ N，(2) $m=240$ kg；$d=0.954\ 6$]

2－36. 在水池导管上装有一个蝶形阀，它可以绕其过中心的水平轴旋转，已知阀的直径 $D=50$ cm，试求用阀断水的锁紧力矩 M。

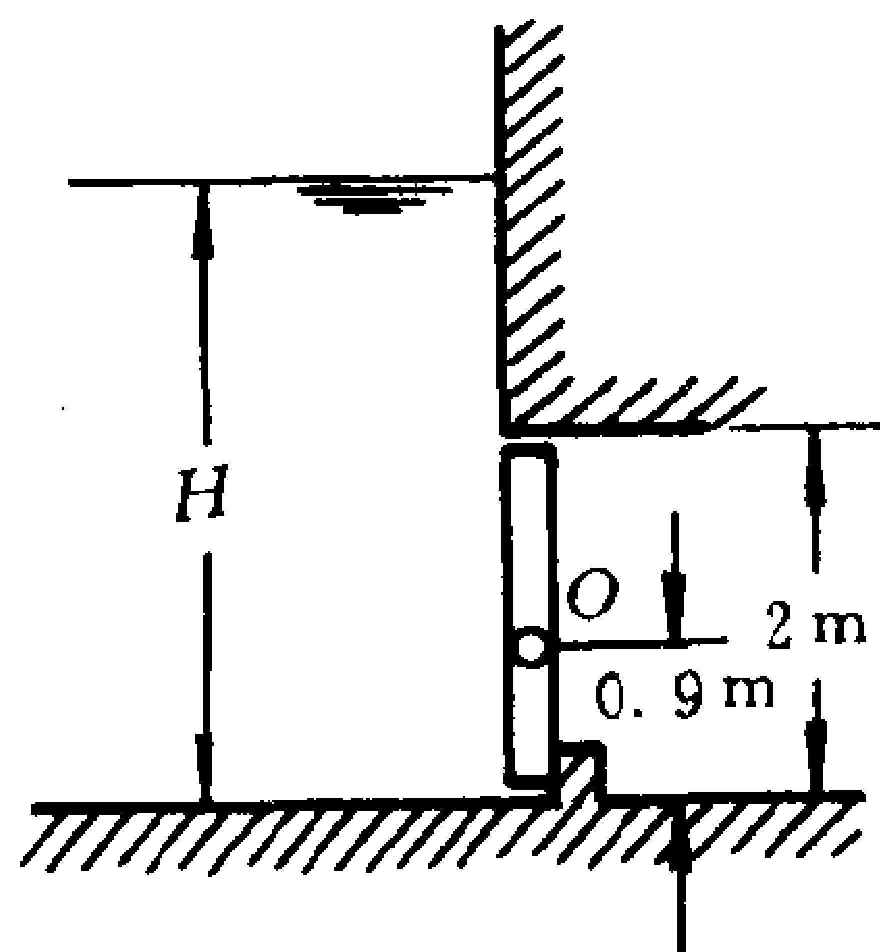
[答：$M=30$ Nm]

2-37. 水池中方形闸门每边长均为 2 m,转轴 O 距离底边为 0.9 m,试确定使闸门自动开启的水位高度 H。

[答:$H=4.33$ m]



题 2-36 图



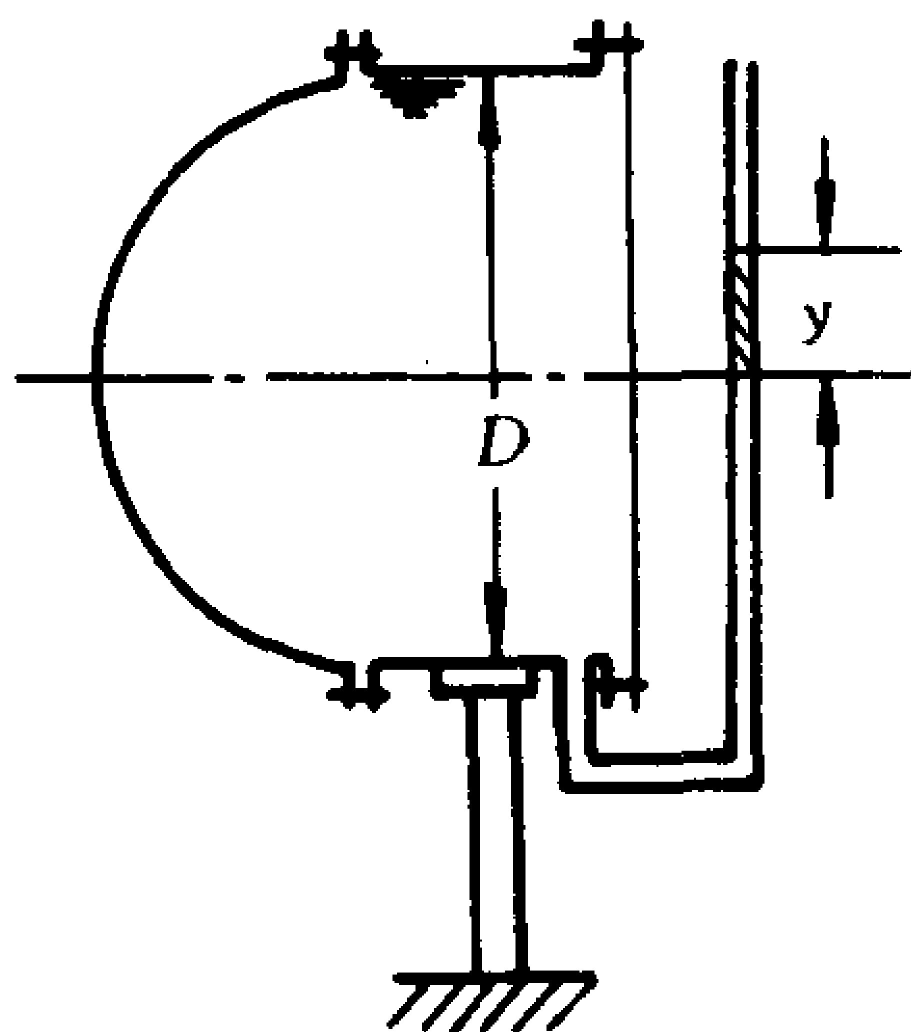
题 2-37 图

2-38. 直径 $D=1$ m 的圆柱形容器,一端用平板堵头,一端用半球形堵头密封,容器内充满水,测压管中的液面分别有三种情况:

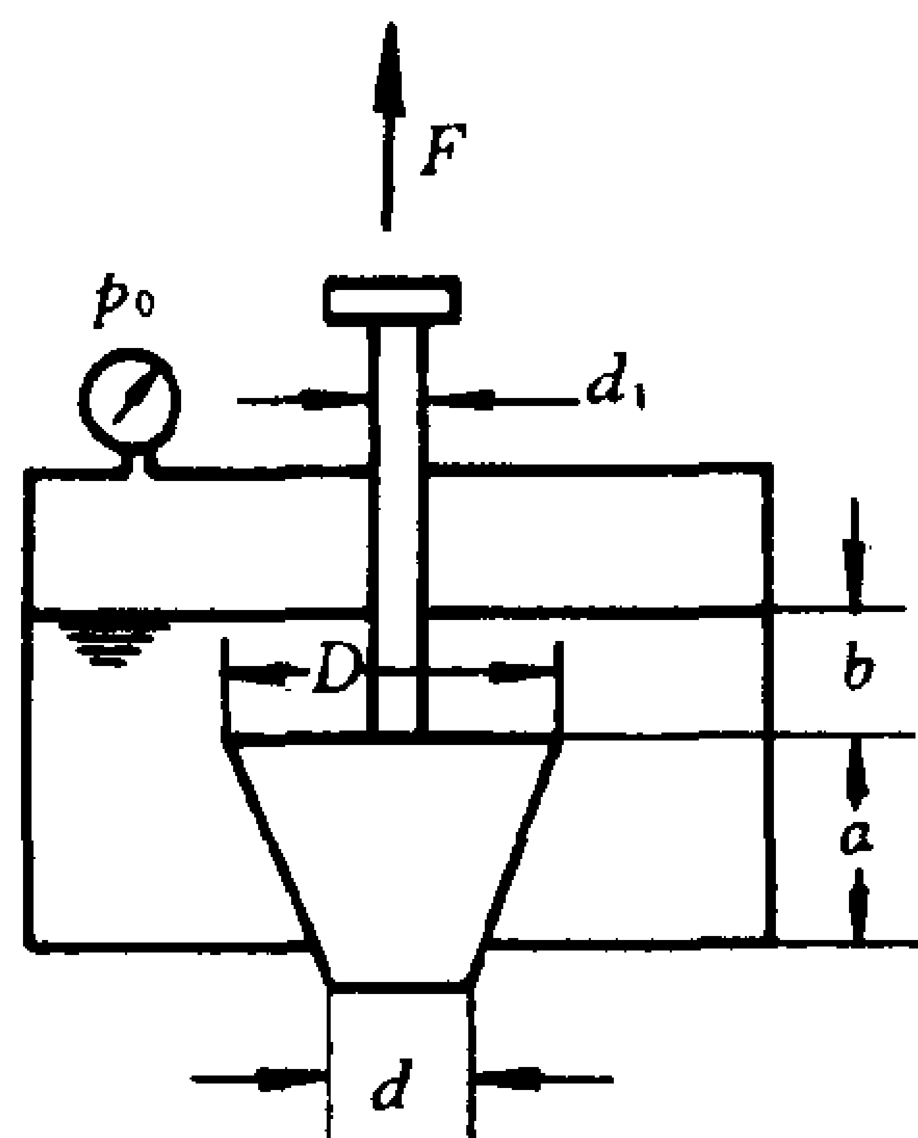
(1) 液面与容器中心线等高,$y=0$;

(2) 液面在中心线之上,$y=\frac{D}{5}$;

(3) 液面在中心线之下,$y=-\frac{D}{5}$。



题 2-38 图



题 2-39 图

试求液体作用在平板堵头和半球形堵头上的静水压力。

[答:(1) 平板 $F=0$; 半球面 $F=0$;

(2) 平板 $F=1\ 541$ N; 半球面 $F=-1\ 541$ N;

(3) 平板 $F=-1\ 541$ N; 半球面 $F=1\ 541$ N]

2-39. 汽油箱和底部装有一截头圆锥形阀门,其尺寸为 $D=100$ mm, $d=50$ mm, $d_1=25$ mm, $a=100$ mm, $b=50$ mm,汽油相对密度为 0.7,忽略阀重。

(1) 当压强表 $p_0=10$ kPa 时,求提起阀门所需的力 F;

(2) 如果 $F=0$,求压强表读数 p_0 应是多少?

[答: $F=13.4$ N, $p_0=8.8$ kPa]

2-40. 直径 $D=0.4$ m,质量 $m=50.97$ kg 的圆柱形容器,其中充水深度 $a=0.3$ m,悬挂在直径 $d=0.2$ m 的柱塞上,柱塞淹没深度为 $h=0.1$ m,忽略柱塞与容器间的摩擦,试确定:

(1) 使容器保持平衡所需要的真空度 p_a-p_0;

(2) 螺栓组 A、B 所受的力;

(3) 分析栓塞淹没深度 h 对计算结果的影响。

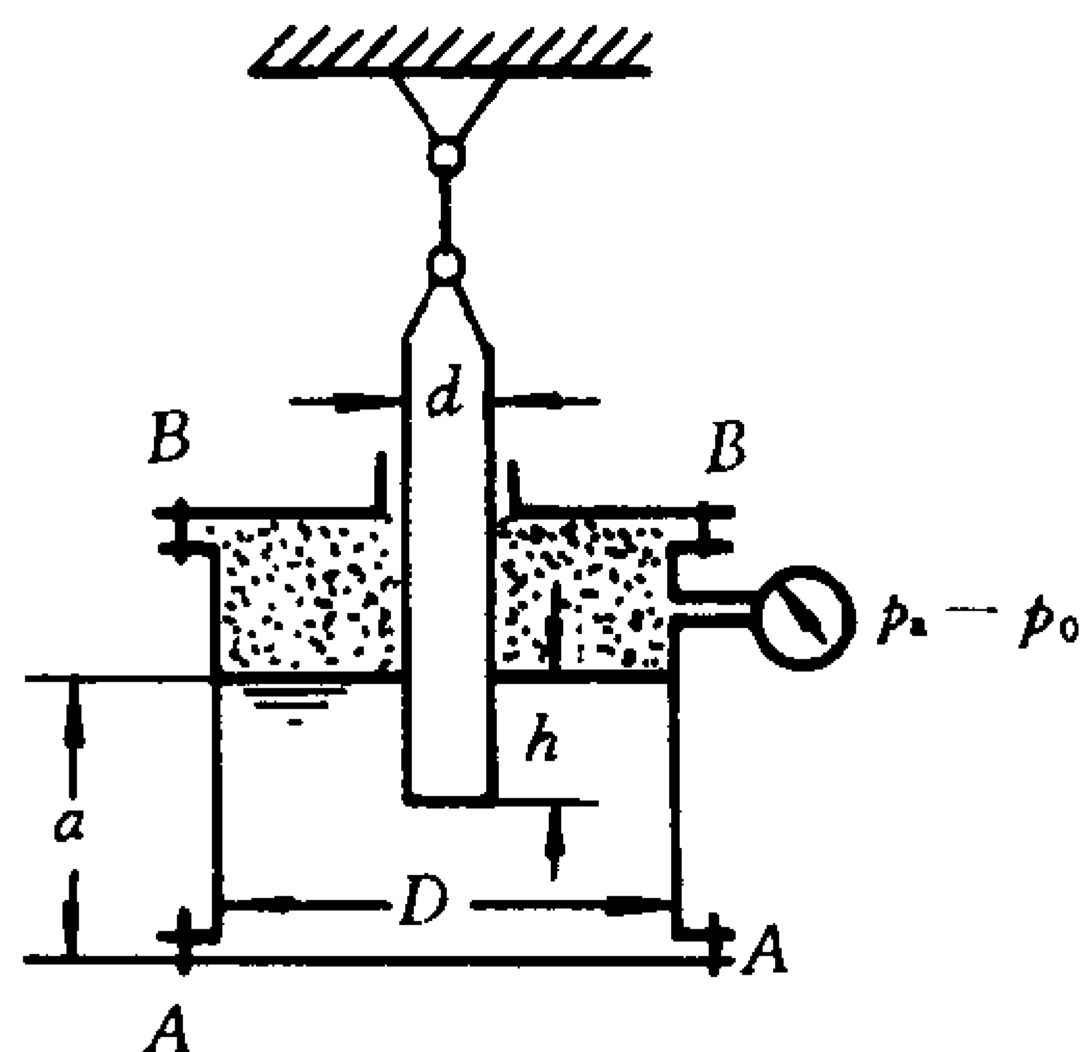
[答:(1) $p_a-p_0=27\ 900$Pa,

(2) $F_A=2\ 629.5$ N, $F_B=3\ 136$ N,

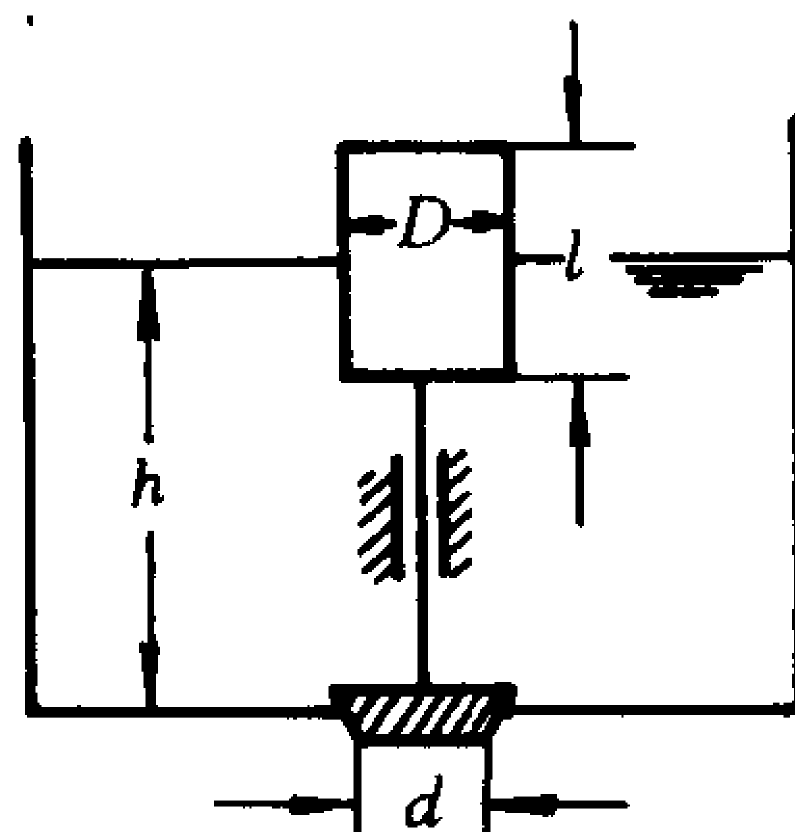
(3) 如果 h 变化而 a 不变,则对计算结果没有影响;

如果 h 变化, a 变大,真空度越小, F_A、F_B 均减小;

如果 h 变化, a 变小,真空度加大, F_A、F_B 均加大。]



题 2-40 图



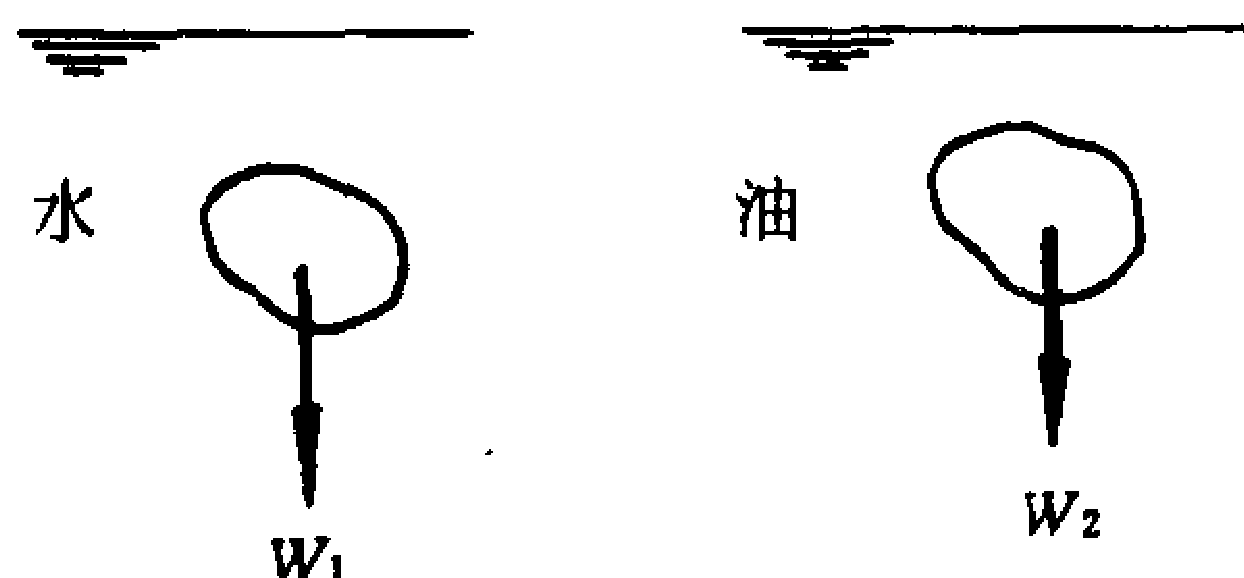
题 2-41 图

2-41. 设计自动泄水阀要求当水位 $h=25$ cm 时,用沉没一半的圆柱形浮标将细杆所连接的堵塞自动提起。已知堵塞直径 $d=6$ cm,浮标长 $l=20$ cm,活动部件的质量 $m=0.08$ kg,试求浮标直径 D,如果浮标改用圆球形,则其半径 R 应是多少?

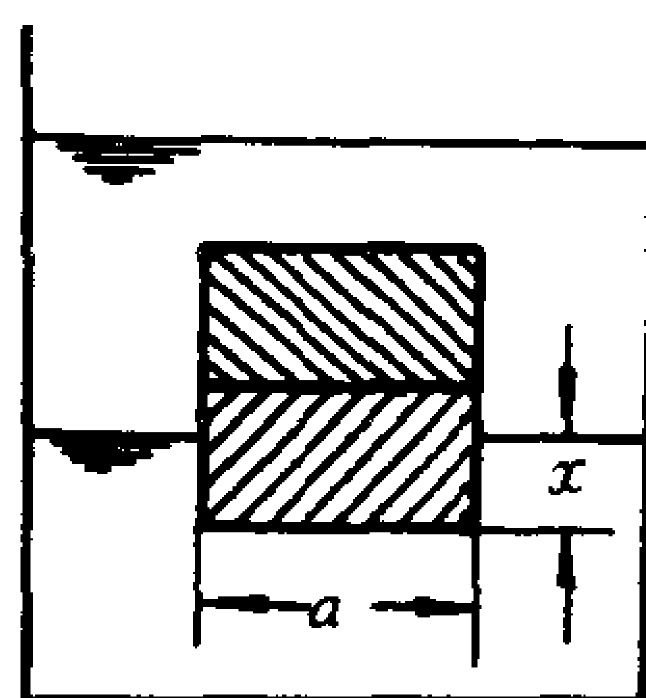
[答:$D=10$ cm,$R=6.2$ cm]

2-42. 一个物体在水中重量 $W_1=3$ N,在相对密度为 0.8 的油中重量 $W_2=4$ N,试求该物体的体积、质量、密度和相对密度。

[答:$V=510\ \text{cm}^3$,$m=0.815$ kg,$\rho=1\ 599\ \text{kg/m}^3$,$d=1.599$]



题 2-42 图



题 2-43 图

2-43. 每边长为 $a=1$ m 的正立方体(上半部分的相对密度是 0.6,下半部分的相对密度是 1.4)平衡于两层不相混合的液体中,上层液体相对密度是 0.9,下层液体相对密度是 1.3,试求立方体底面在两种液体交界面下面的深度 x。

[答:$x=0.25$ m]

2-44. 边长 b 的敞口立方水箱中原来装满水,当容器以匀加速度向右运动时,试求:

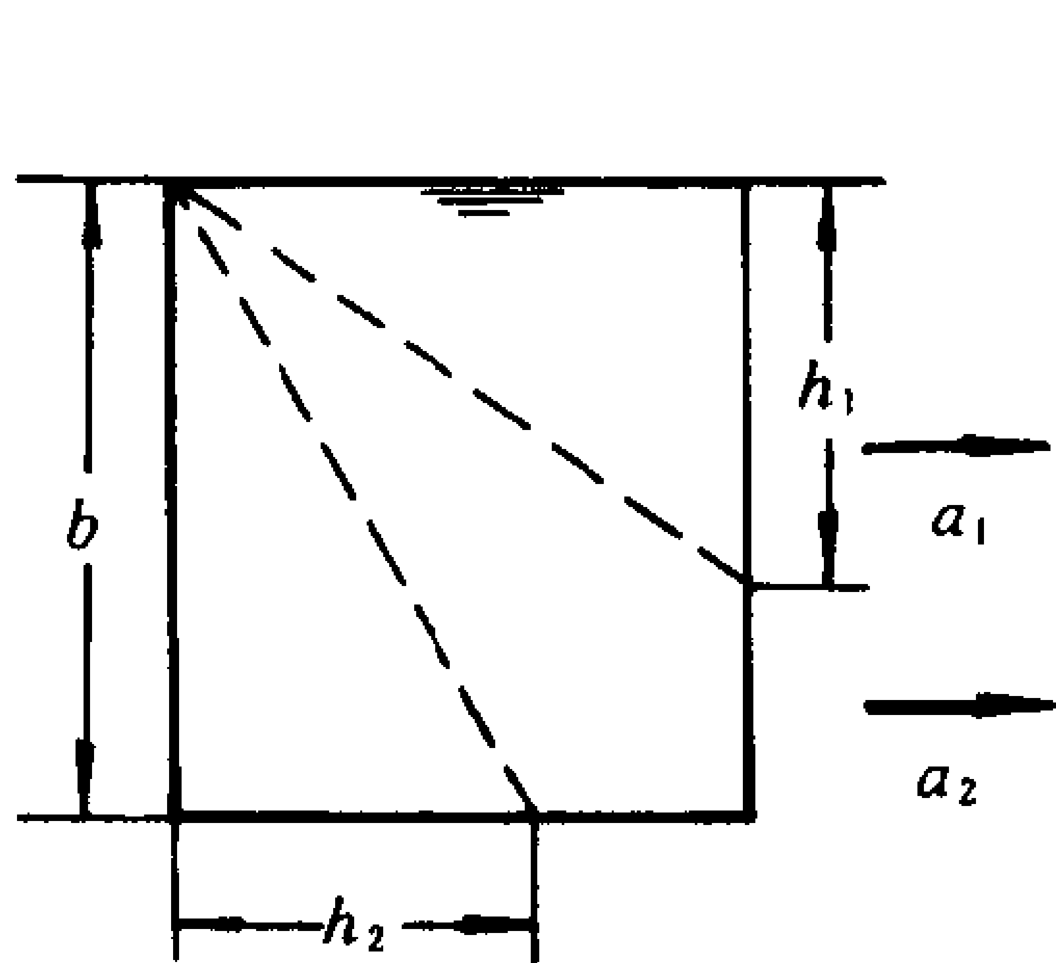
(1) 水溢出$\frac{1}{3}$时的加速度 a_1,

(2) 水剩下$\frac{1}{3}$时的加速度 a_2。

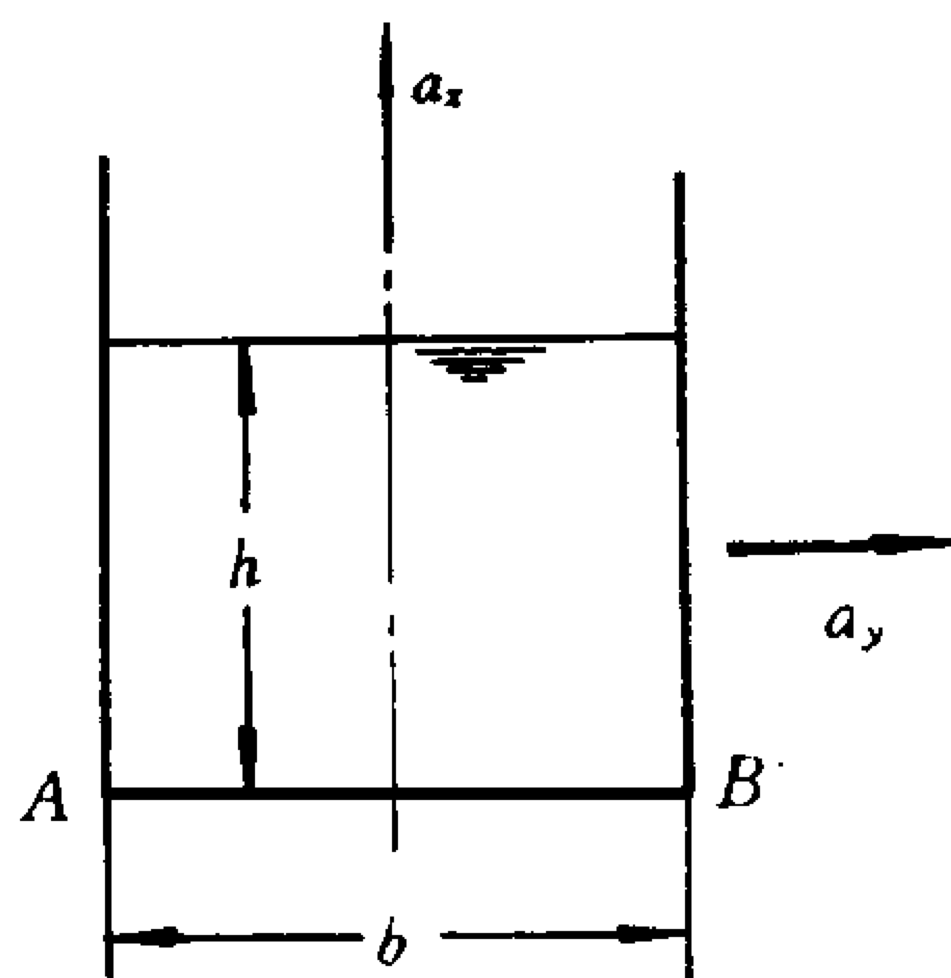
[答:$a_1=6.54\ \text{m/s}^2$,$a_2=14.715\ \text{m/s}^2$]

2-45. 边长 $b=1$ m 的顶部敞口立方水箱中盛水深度 $h=0.75$ m,容器有水平向右、铅直向上的两部分匀加速度(a_y 及 a_z),其大小相等,并使水达到即将外溢的极限状态。试求加速度的大小及容器底角上 A、B 两点的计示压强。

[答：$a_y = a_z = 9.81\ \text{m/s}^2$，$p_A = 19\ 620\ \text{Pa}$，$p_B = 9\ 810\ \text{Pa}$]



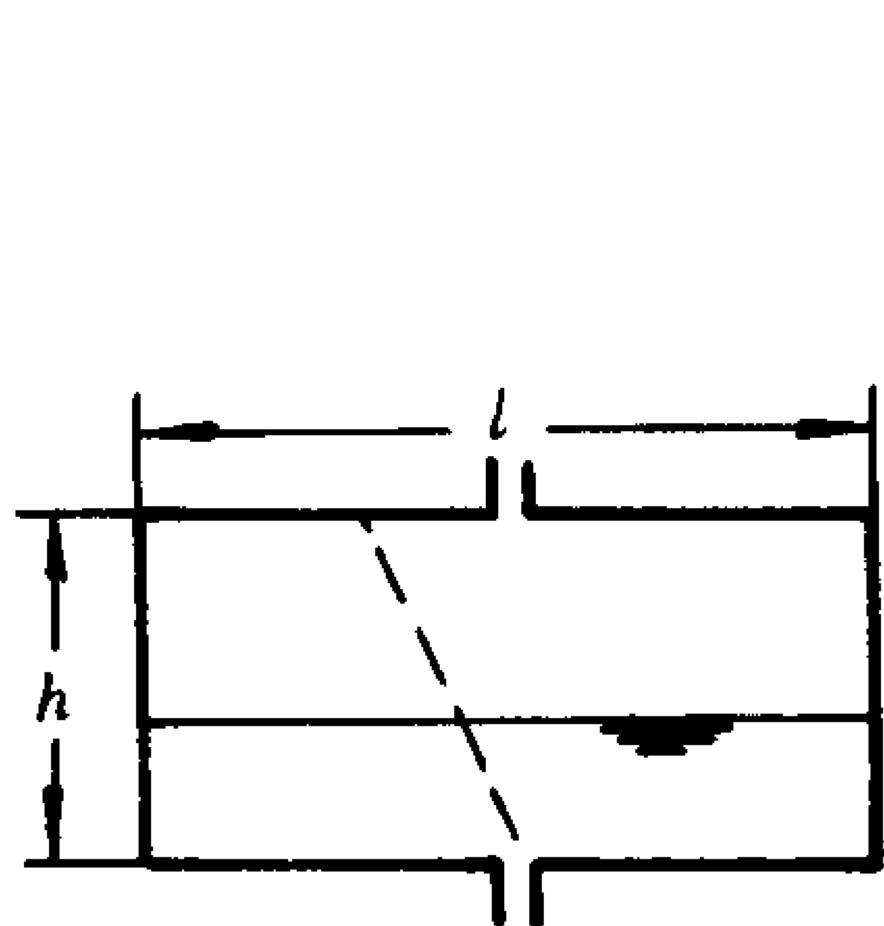
题 2－44 图



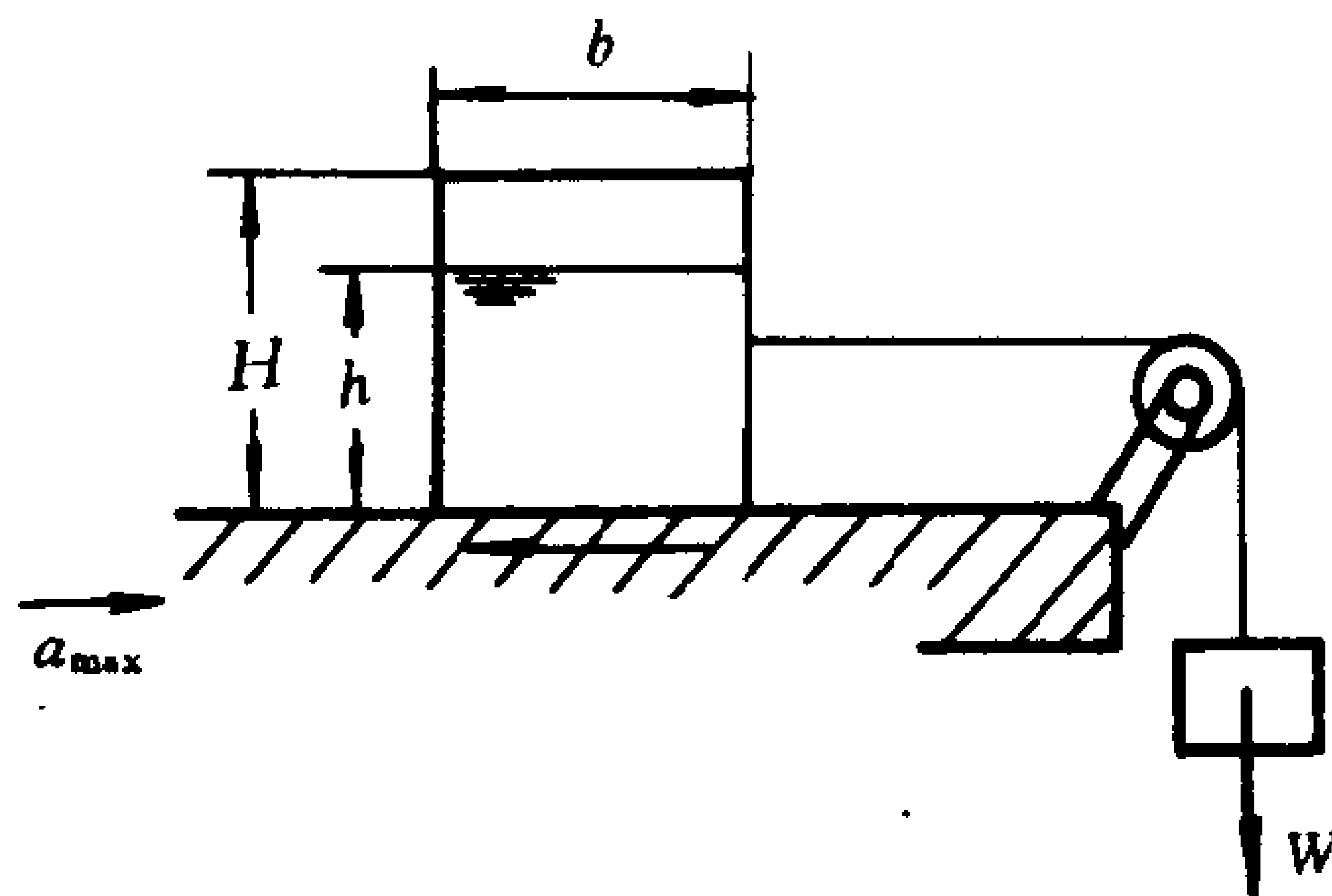
题 2－45 图

2－46．飞机油箱的尺寸为高 $h=0.4$ m，长 $l=0.6$ m，宽 $b=0.4$ m，装油占油箱体积的$\frac{1}{3}$，出油口在底部中心处，试求使油面处于出油口中心时的水平飞行的极限加速度 $a_{max}$$\left(\text{此时箱内油量仍为}\frac{1}{3}\right)$。

[答：$a_{max} = 19.62\ \text{m/s}^2$]



题 2－46 图



题 2－47 图

2－47．正方形底 $b \times b = 0.2\ \text{m} \times 0.2\ \text{m}$、自重 $W' = 40$ N 的容器装水高度 $h = 0.15$ m，容器在重锤 $W = 250$ N 的牵引下沿水平方向匀加速运动，设容器底与桌面间的摩擦系数 $f = 0.3$，滑轮摩擦忽略不计，为使水不外溢试求容器应有的高度 H。

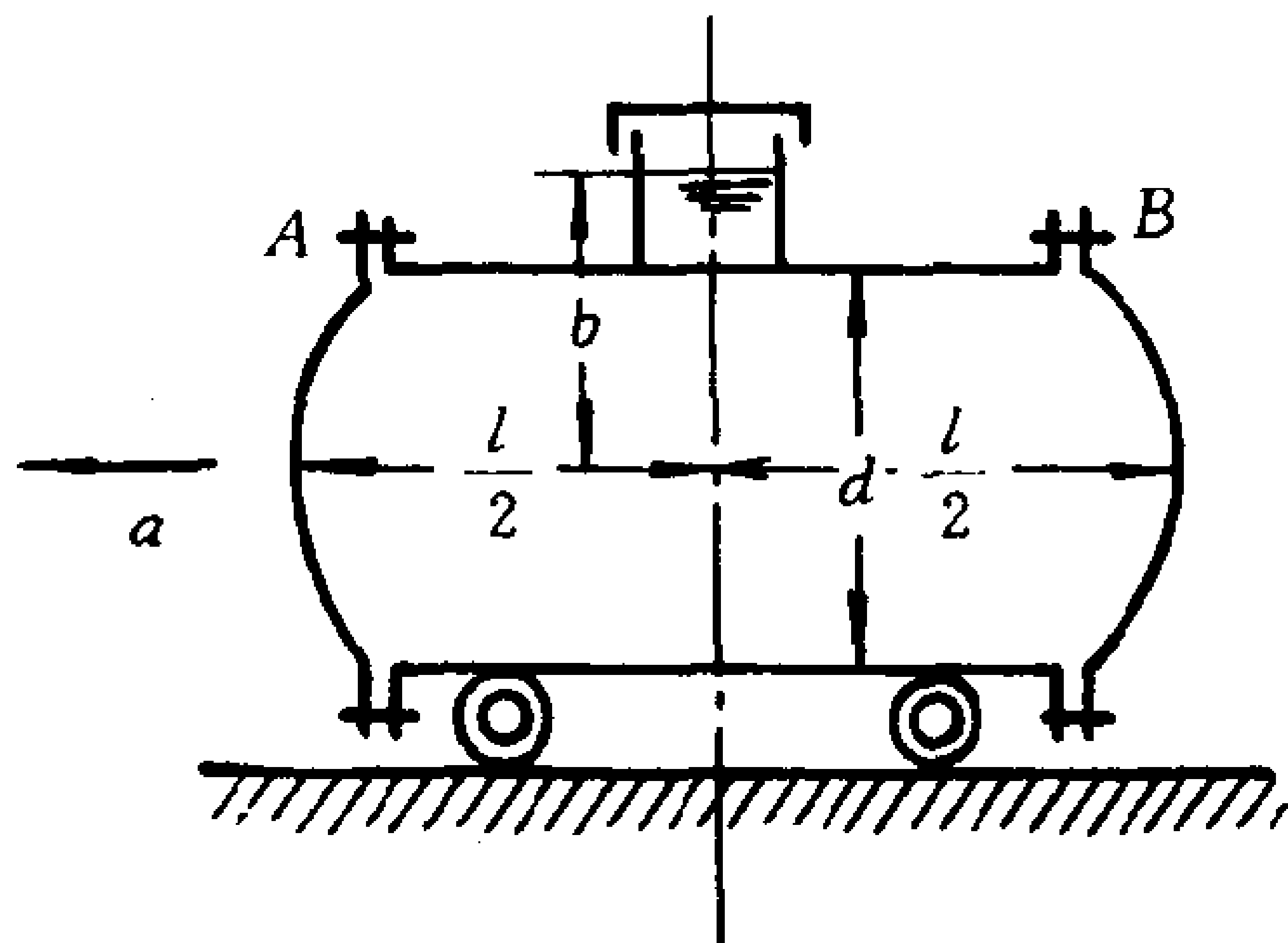
[答：$H=0.213\ \text{m}$]

2－48．油槽车的圆柱直径 $d=1.2\ \text{m}$，最大长度 $l=5\ \text{m}$，油面高度 $b=1\ \text{m}$，油的相对密度为0.9。

(1) 当水平加速度 $a=1.2\ \text{m/s}^2$ 时，求端盖 A，B 所受的轴向压力；

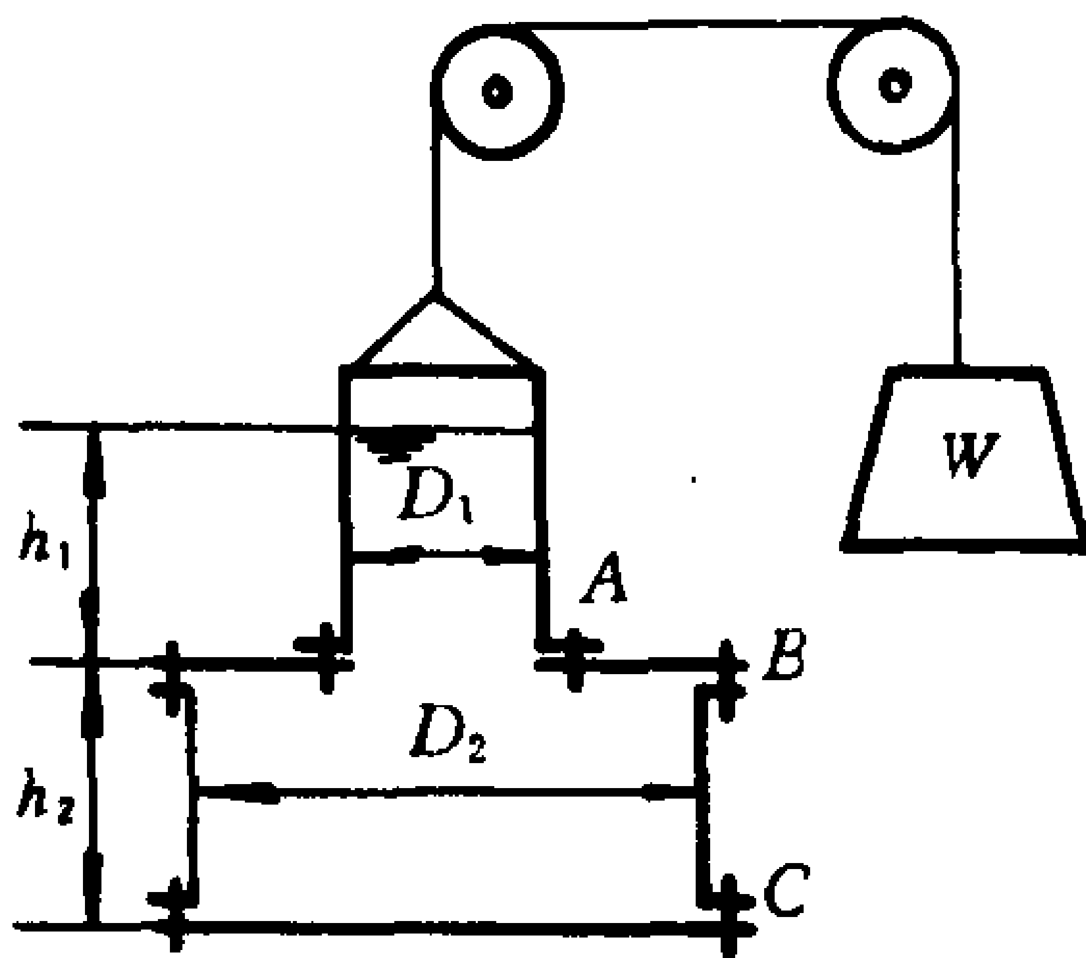
(2) 当端盖 A 上受力为零时，求水平加速度 a 是多少。

[答：$F_A=6\ 932\ \text{N}$，$F_B=13\ 039\ \text{N}$，$a=3.924\ \text{m/s}^2$]



题 2－48 图

2－49．复合圆柱形容器的尺寸是 $D_1=0.4\ \text{m}$，$D_2=0.6\ \text{m}$，$h_1=0.5\ \text{m}$，$h_2=0.3\ \text{m}$，容器经过绳索、滑轮与另一端重力为 $W=2\ 000\text{N}$ 的重物相连，忽略容器自重及滑轮摩擦，试求容器发生加速运动时，作用在螺栓组 A、B 和 C 上的拉力。



题 2－49 图

[答：$F_A=1\ 680\ \text{N}$，$F_B=2\ 574\ \text{N}$，$F_C=2\ 574\ \text{N}$]

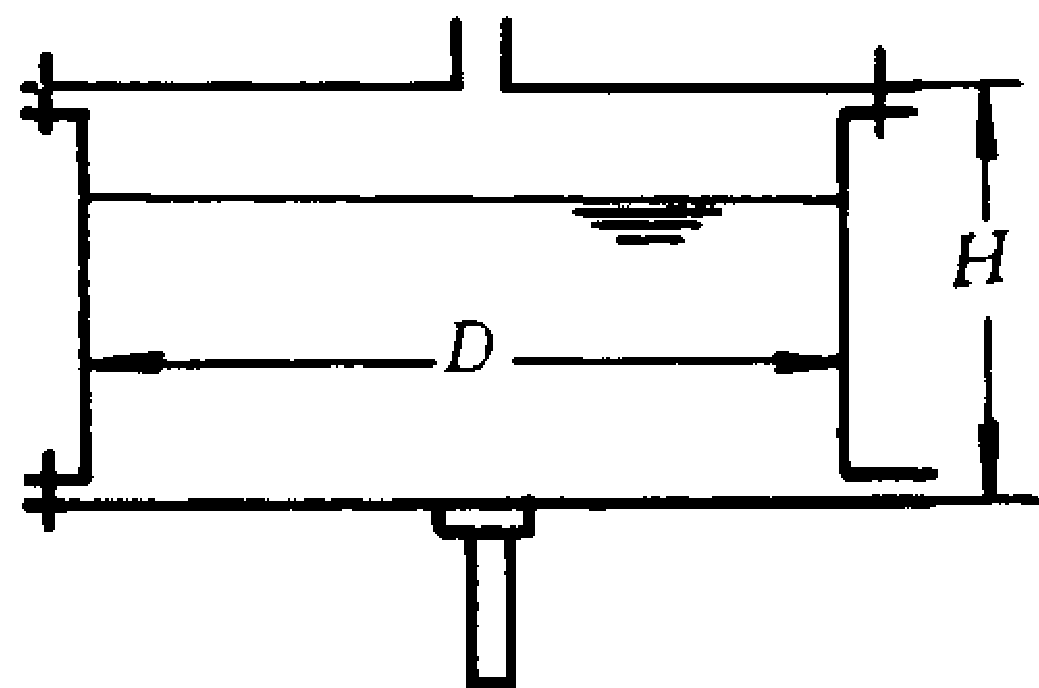
2－50．直径 $D=0.2\ \text{m}$，高度 $H=0.1\ \text{m}$ 的圆柱形容器，装水 $\frac{2}{3}$ 容量后，

绕其垂直轴旋转。

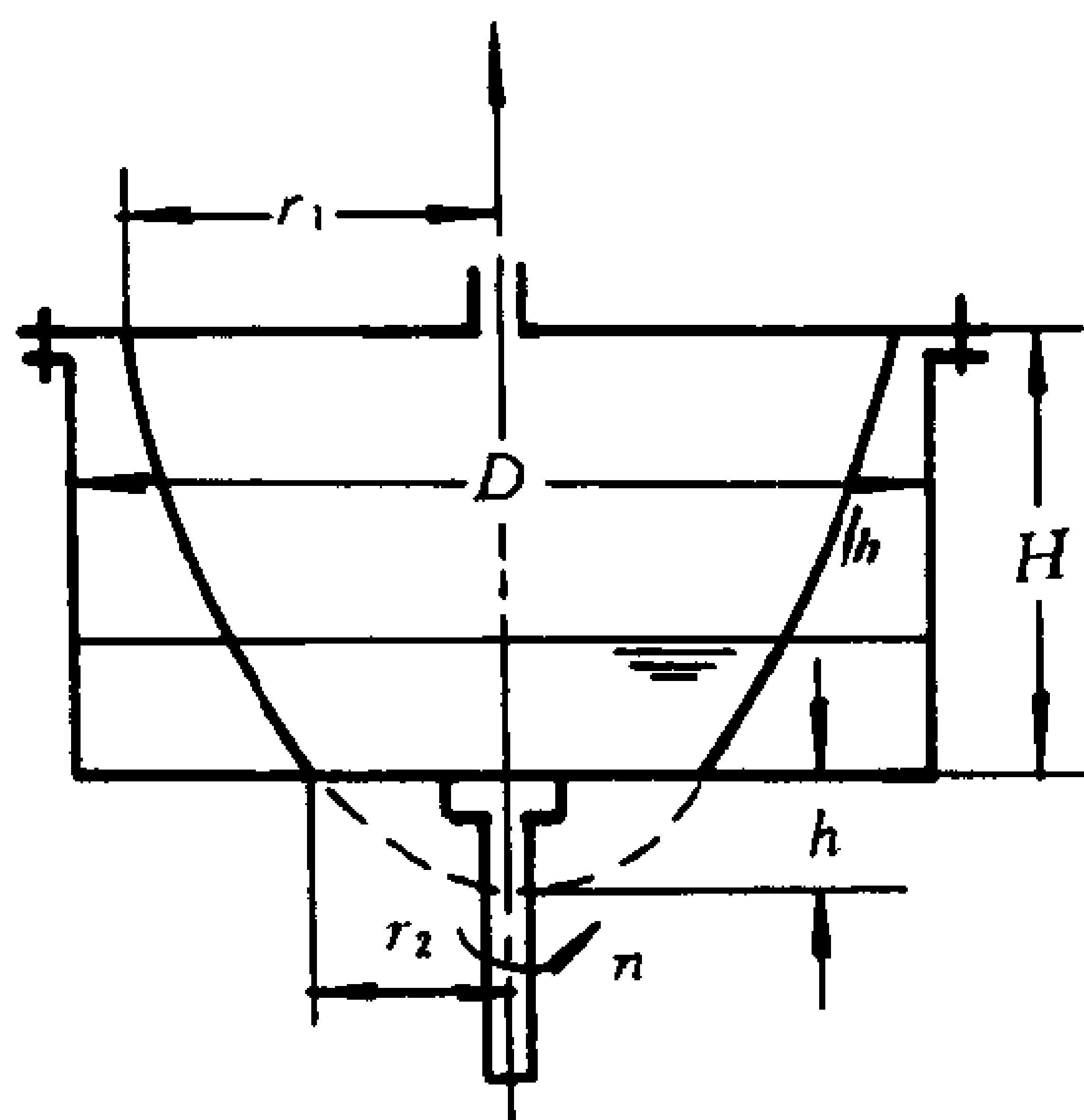
(1) 试求自由液面到达顶部边缘时的转速 n_1。

(2) 试求自由液面到达底部中心时的转速 n_2。

[答：$n_1 = 109.2$ r/min，$n_2 = 163.8$ r/min]



题 2-50 图



题 2-51 图

2-51. 直径 $D=0.2$ m，高 $H=0.1$ m 的圆柱形容器装 $\frac{1}{3}$ 容积水后，绕垂直轴旋转，当转速 $n=200$ r/min 时形成如图所示的抛物面，试求液面与顶盖及底盖接触处的半径 r_1 及 r_2，并求液面抛物面顶点在底面以下的距离 h。

[答：$r_1 = 0.094$ m，$r_2 = 0.067$ m，$n = 0.1$ m]

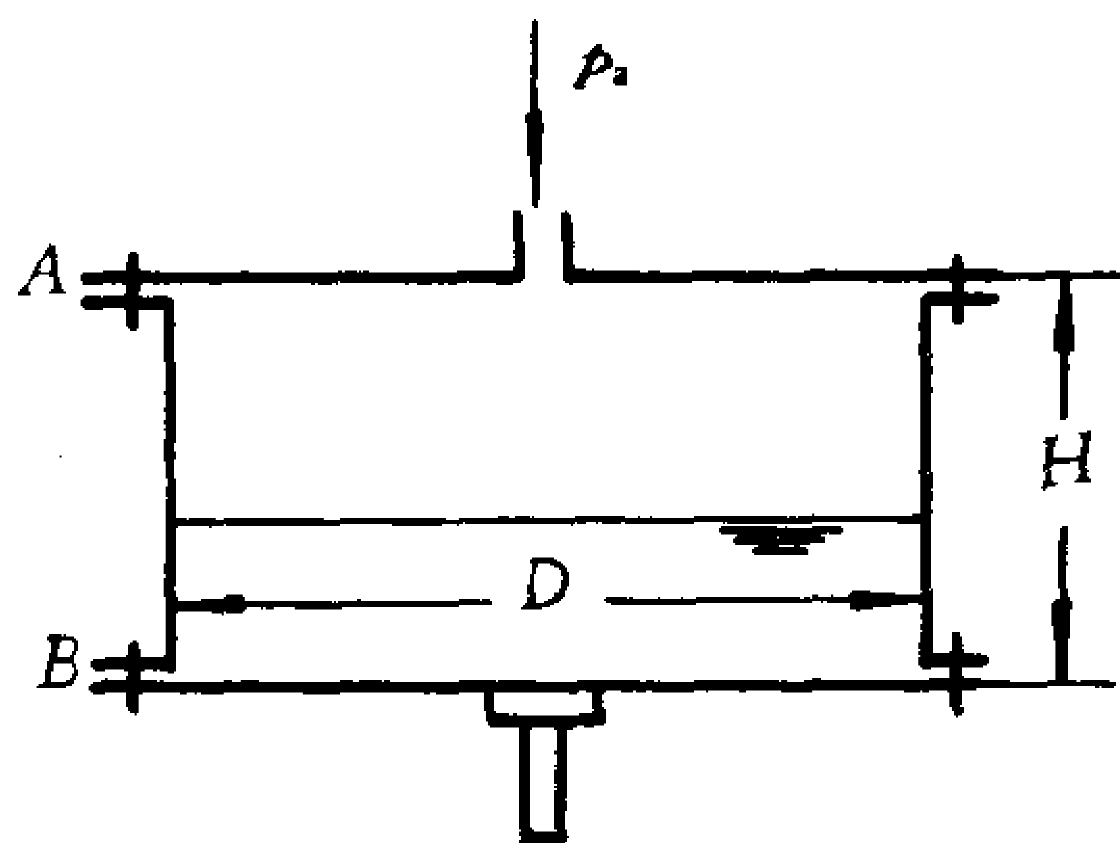
2-52. 承前题数据，$D=0.2$ m，$H=0.1$ m，装水 $\frac{1}{3}$ 容积。

(1) 当 $n=200$ r/min 时，试求液体作用在顶盖、底盖上压力 F_1、F_2 各是多少？顶盖与底盖螺栓组 A，B 上的拉力 F_A、F_B 是多少？容器重量忽略不计。

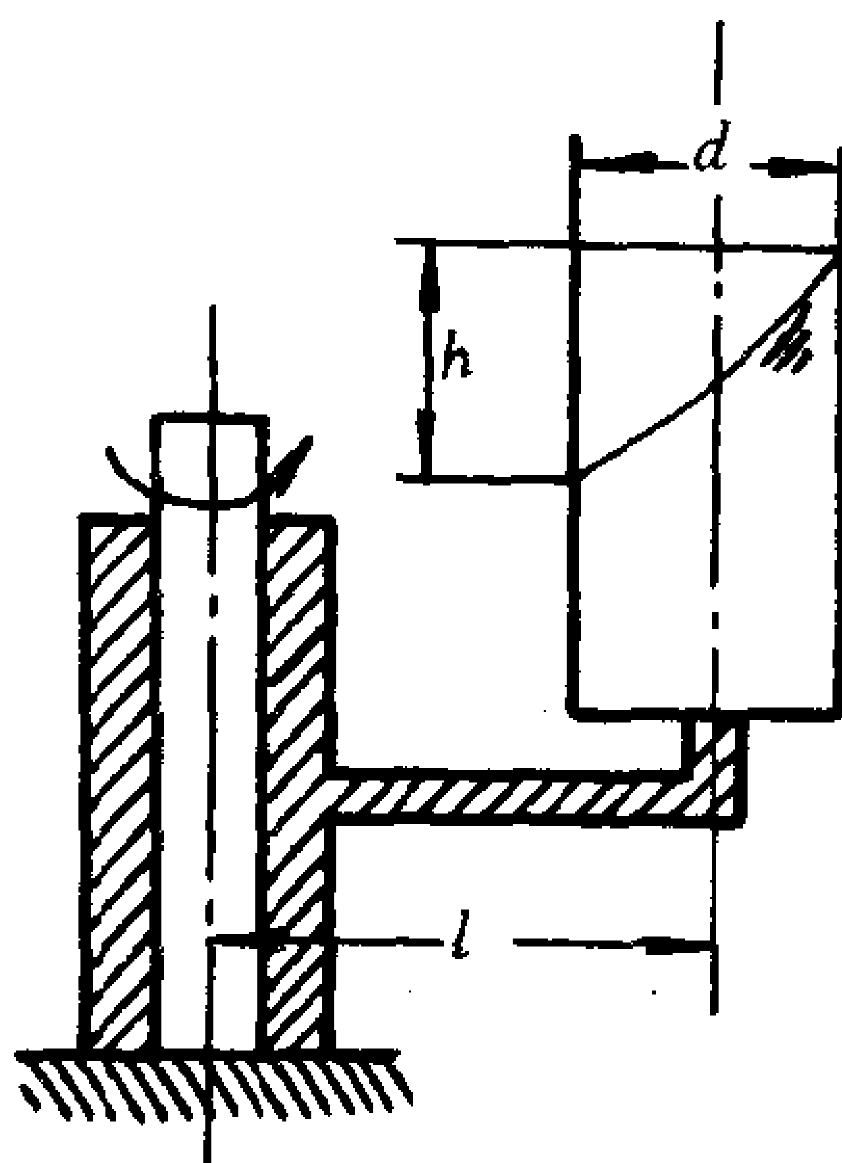
(2) 当 $n=100$ r/min 时，试求液体作用在顶盖、底盖上的压力 F_1、F_2，螺栓组 A，B 上的拉力 F_A、F_B。

[答：(1) $F_1 = 0.415\,6$ N，$F_2 = 10.7$ N，$F_A = 10.69$ N，$F_B = 10.7$ N，

(2) $F_1 = 0$，$F_2 = 10.27$ N，$F_A = F_B = 10.27$ N]



题 2－52 图

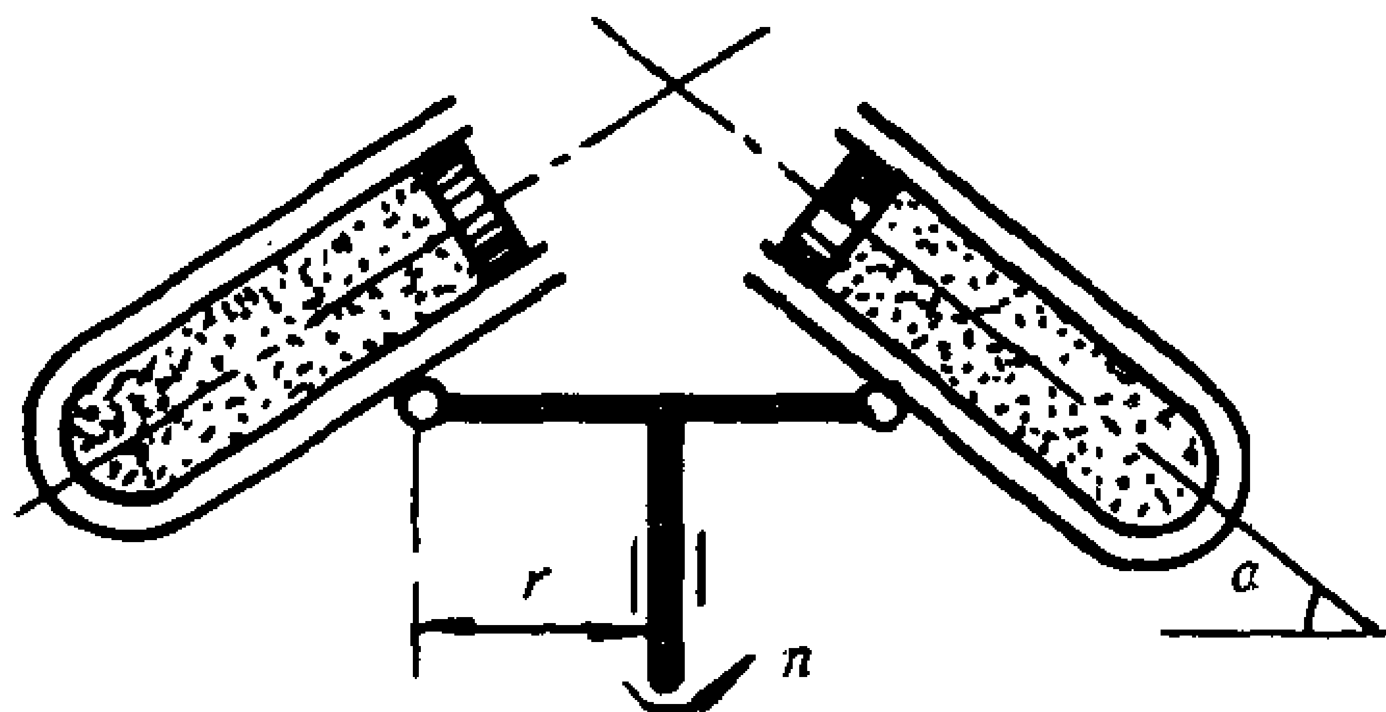


题 2－53 图

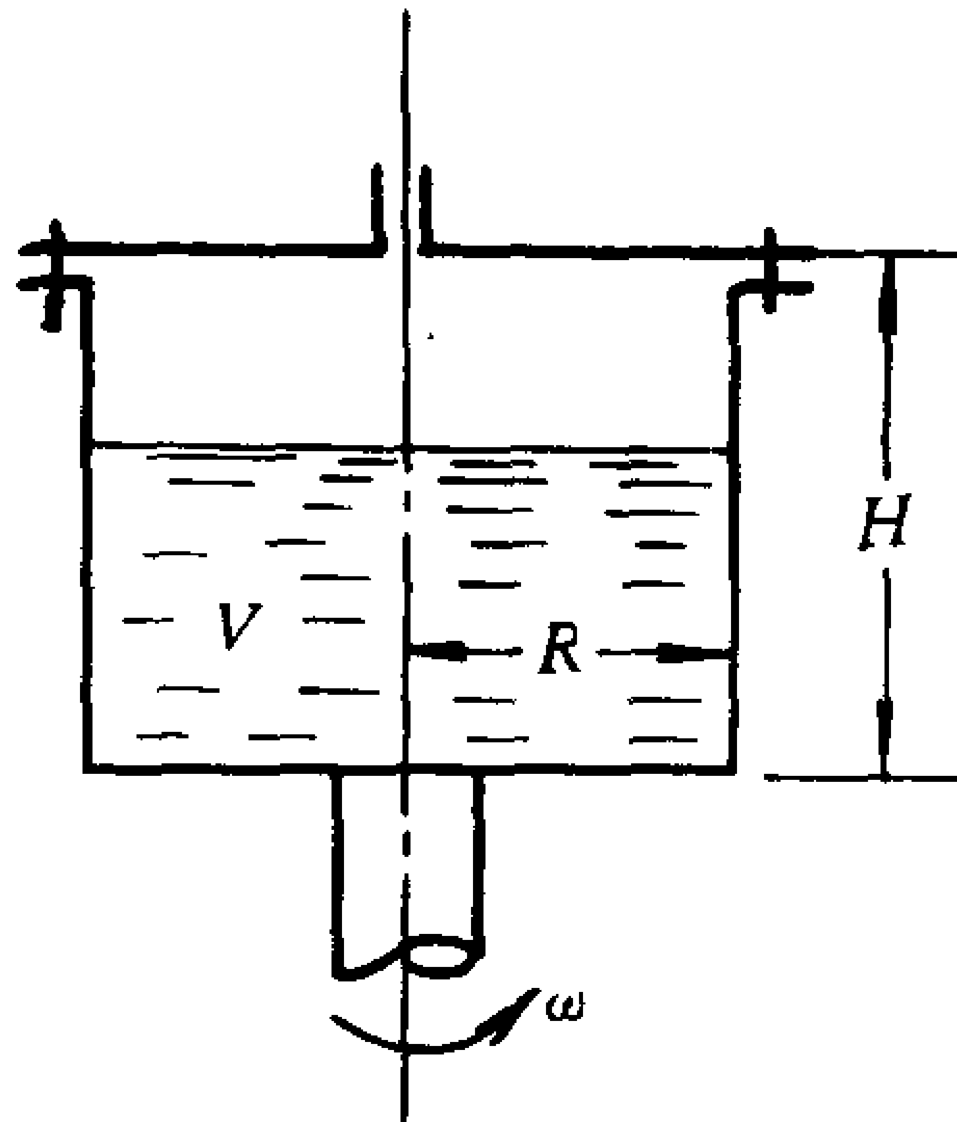
2－53. 直径为 $d=0.2$ m 的开口容器连接在半径为 $l=0.46$ m 的旋转臂上，当旋臂转速为 $n=60$ r/min 时，求容器中的液面差 h。

[答：$h=0.37$ m]

2－54. 医用手摇离心机当立轴转动时，铰接于横杆上的试管架一方面



题 2－54 图



题 2－55 图

转动，一方面由于离心力作用而成倾斜状态。已知离心机转速为 $n=400$ r/min，$r=250$ mm，试求试管中液体的质量力比重力大多少倍？此时管轴线与水平线的夹角 α 是多少？

[答：$\dfrac{F_m}{W}=44.73,\alpha=1°17'$]

2－55. 顶盖中心开口的圆柱形容器半径为 $R=0.4$ m，高度为 $H=0.7$ m，顶盖质量为 $m=5.1$ kg，装入 $V=0.25$ m^3 的水，然后以匀角速度 $\omega=10s^{-1}$绕垂直轴转动，试求作用在顶盖螺栓组上的拉力。

［答：$F=124.86$ N］

2－56. 制动轮内腔直径 $D_1=0.8$ m，高 $H=0.2$ m，上盖开口 $D_2=0.5$ m，当轮绕垂直轴的转速超过规定极限时，内腔的水形成左半部所示的抛物面，液体对制动轮上下盖产生足够的压力差，推轮向下，使轮与刹车带接触而产生制动作用。

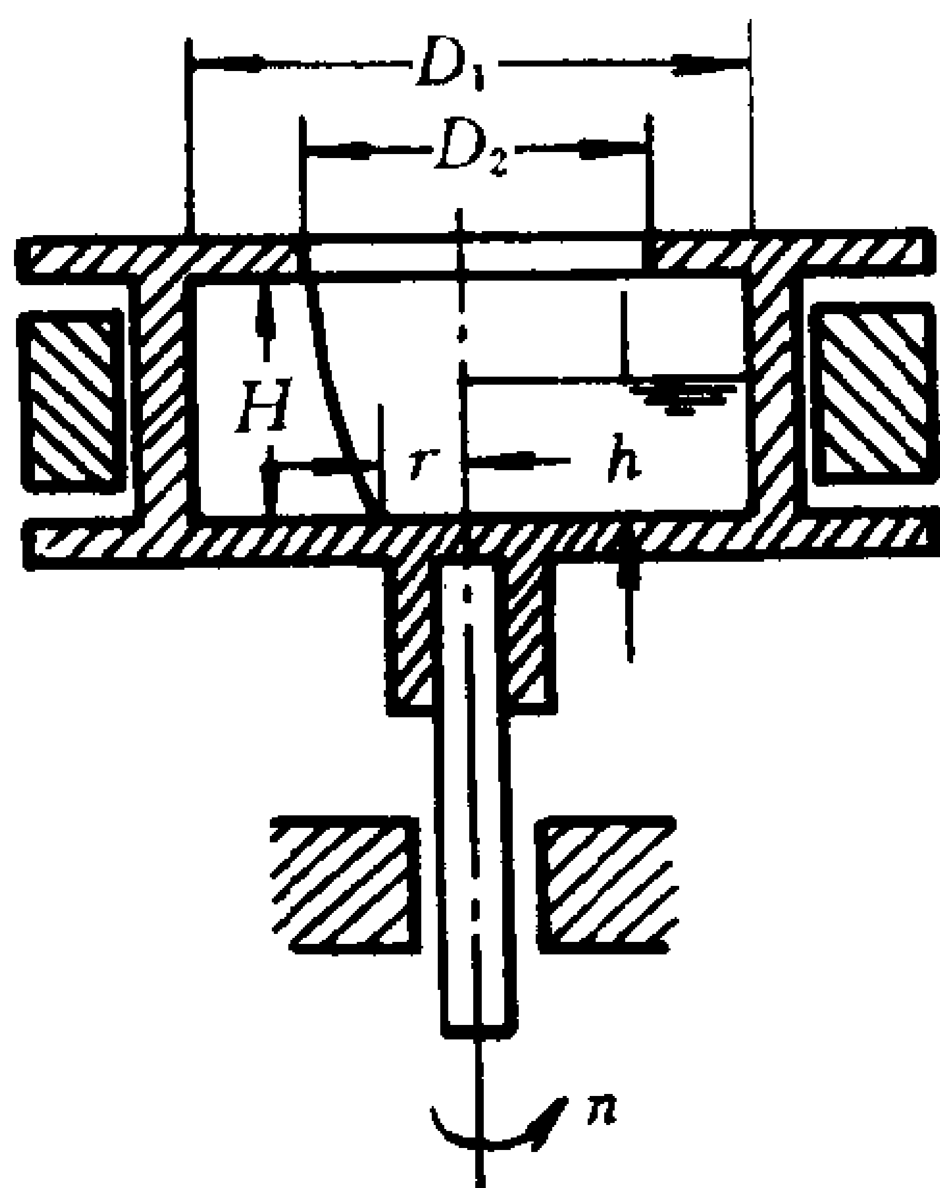
现规定极限转速为 $n=120$ r/min。

试求：(1) 自由液面与下盖接触处的半径 r，

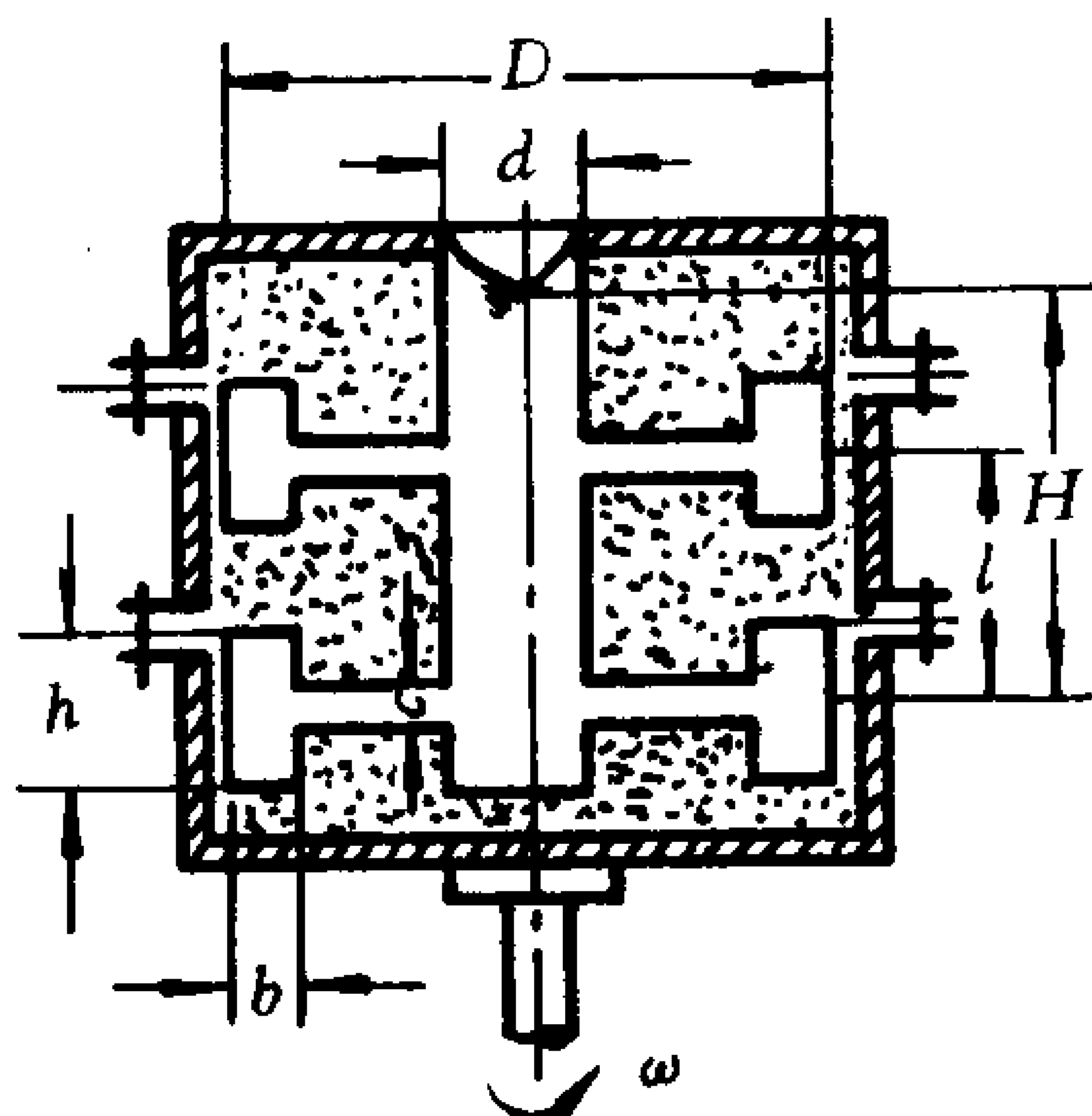
(2) 液体对上、下盖的压力及向下的压力差，

(3) 刹车后，轮内腔中的液位高度 h。

［答：(1) $r=0.194$ m，(2) $F_2-F_1=683.58$ N，(3) $h=0.1374$m］



题 2－56 图



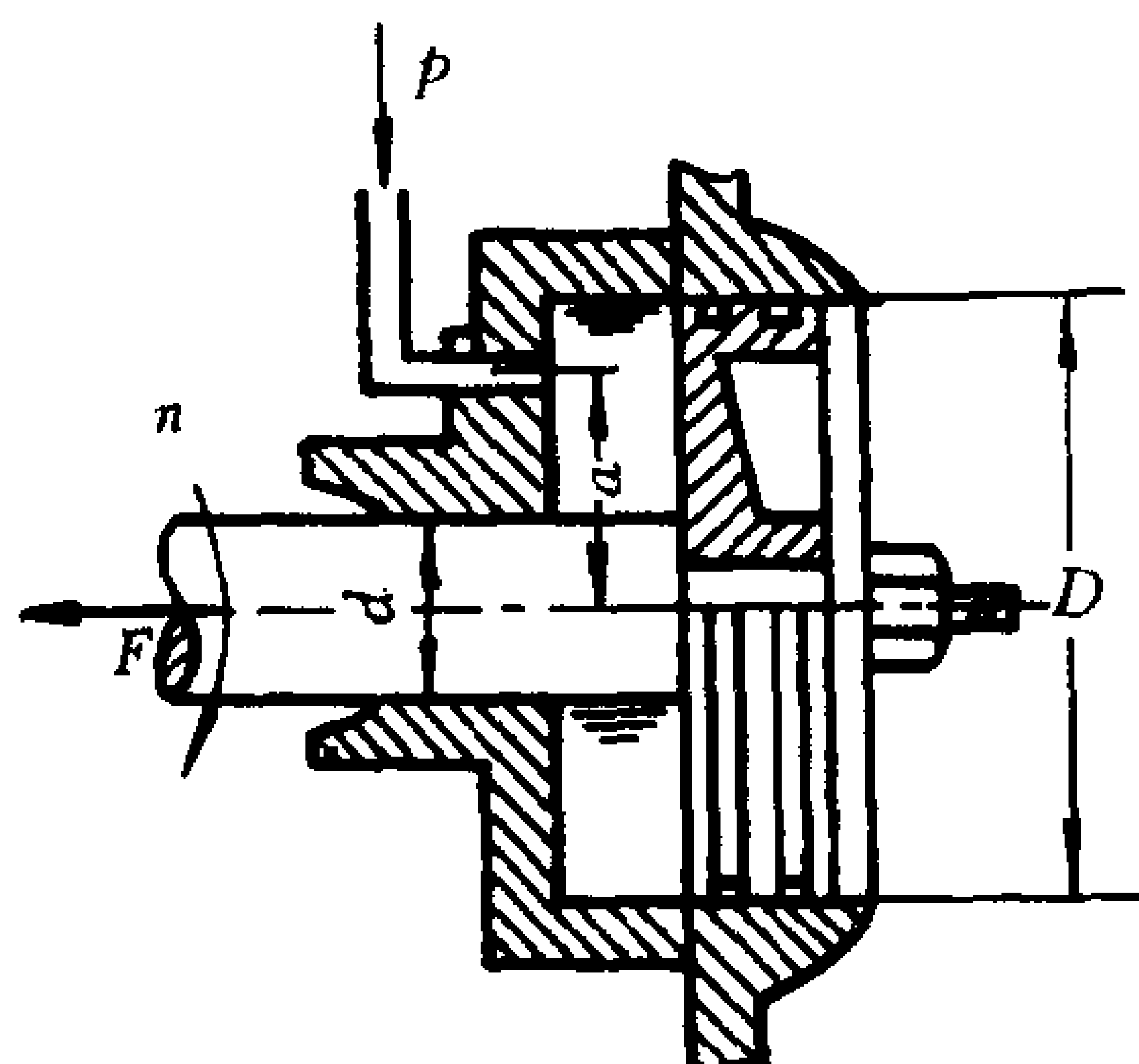
题 2－57 图

2－57. 在旋转砂型中铸造两个生铁轮子的尺寸如图所示，$D=1$ m，$h=0.2$ m，$b=0.08$ m，$c=0.04$ m，$H=1$ m，$d=0.2$ m，$l=0.5$ m，$n=200$ r/min。生铁相对密度为 7.34，不计砂箱及砂的重力，试求上下两组螺栓上的拉力 F_A 和 F_B。

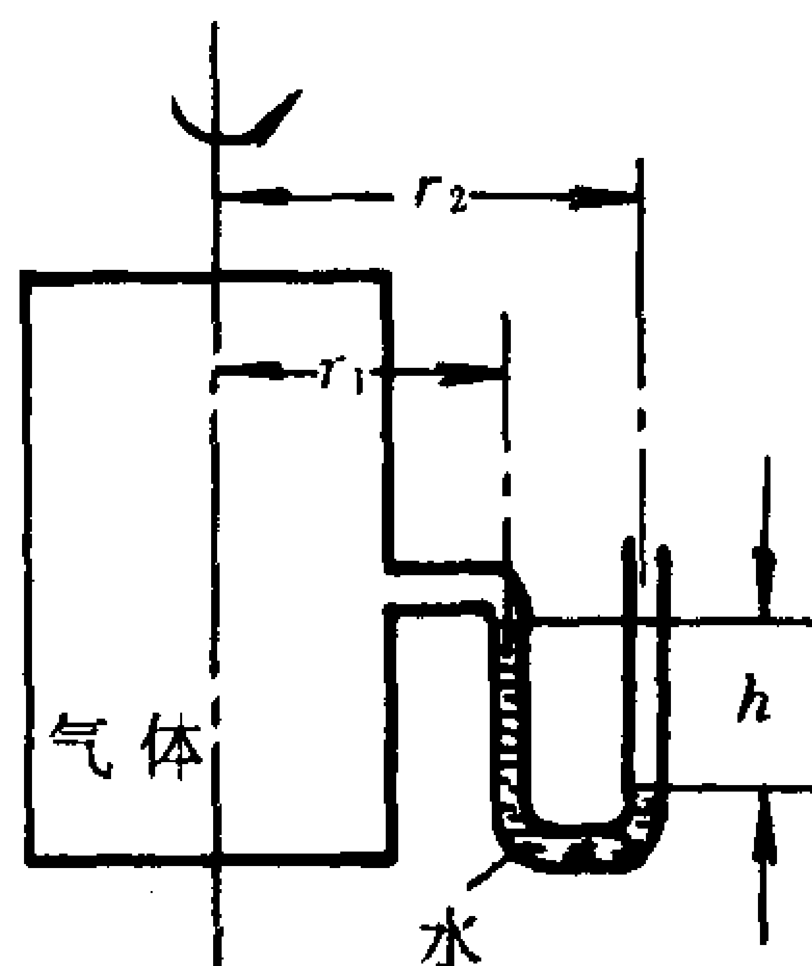
［答：$F_A=182.5$ kN，$F_B=204.8$ kN］

2－58. 试确定图示装置所能平衡的轴向力 F，已知轴的转速 $n=3\,000$

r/min,旋转活塞直径 $D=0.32$ m,轴径 $d=0.05$ m,在距轴 $a=0.07$ m 处供



题 2－58 图



题 2－59 图

水的计示压强 $p=10^6$ Pa,水的转速为轴转速的一半。

[答:$F=86.4$ kN]

2－59. 在图示的真空容器上,水柱 U 形管中 $h=1$ m,$r_1=1$ m,$r_2=1.1$ m,试求下列八种情况下容器中的真空度 p。

(1) 容器固定;

(2) 容器以 $\frac{g}{2}$ 的加速度向上运动;

(3) 容器以 $\frac{g}{2}$ 的加速度向下运动;

(4) 容器以 $\frac{g}{2}$ 的加速度向左运动;

(5) 容器以 $\frac{g}{2}$ 的加速度向右运动;

(6) 容器绕其中心轴以 $\omega=1\ \mathrm{s}^{-1}$ 的角速度旋转,$h=1$ m;

(7) 容器绕其中心轴以 $\omega=1\ \mathrm{s}^{-1}$ 的角速度旋转,$h=0$;

(8) 容器绕其中心轴以 $\omega=1\ \mathrm{s}^{-1}$ 的角速度旋转,液柱右高左低,但其差值仍为 $h=1$ m。

[答:(1) 9.81 kPa; (2) 14.715 kPa; (3) 4.905 kPa; (4) 10.3 kPa; (5) 9.32 kPa; (6) 9.915 kPa; (7) 0.105 kPa; (8) 9.705 kPa。以上数值均为真空度]

第三章　流体动力学基础

从本章开始直到书末均为流体动力学的内容，流体动力学问题范围广泛，内容繁多，需要分章一一论述。本章是流体动力学的基础知识、基本原理和基本方程。这些内容非常重要，它与工程流体力学的各部分均有一定的关联，因而本章是整个课程的重点。

§3-1　描述流体运动的两种方法

表征运动流体的物理量，诸如流体质点的位移、速度、加速度、密度、压强、动量、动能等等统称为流体的流动参数。描述流体运动也就是要表达这些流动参数在各个不同空间位置上随时间连续变化的规律。从理论上说，解决这种问题有两种可行的方法，即拉格朗日(Lagrange)法和欧拉(Euler)法。

一、拉格朗日法与质点系

最容易想到的是直接将理论力学中描述质点或质点系运动的方法移植到流体力学中来。流体力学中的质点系在运动中极易变形。因而首先需要将不同流体质点加以标志识别，不然在流体运动中，我们就无法跟踪所需研究的那一个流体质点了。如图3-1，在选定的 $Oxyz$ 坐标系上，在时间 $t=0$ 的运动初始时刻，每一个流体质点应该有一组唯一的坐标($x_0=a$，$y_0=b$，$z_0=c$)，用这种质点的初始坐标(a，b，c)作为不同质点的区别标志。在流体运动过程中，每一个质点(a，b，c)的运动坐标(x，y，z)随时间 t 有一定的变化规律，不同质点这种规律又不尽相同。如果用质点初始坐标(a，b，c)与时间变量 t 共同表达质点的运动规律，则(a，

b,c,t)叫作拉格朗日变数，用拉格朗日变数描述流体运动的方法叫拉格朗日法，按照这种方法写出流体质点运动坐标的表达式如表3-1中的第一栏所示。运动坐标对时间 t 求导再求导，则可得质点速度和加速度如表中第二、第三栏所示。在这些表达式中，拉格朗日变数(a,b,c,t)是各自独立的，质点的初始坐标(a,b,c)与时间 t 无关，时间 t 只影响质点的运动坐标、速度和加速度，而不会改变质点的初始坐标。

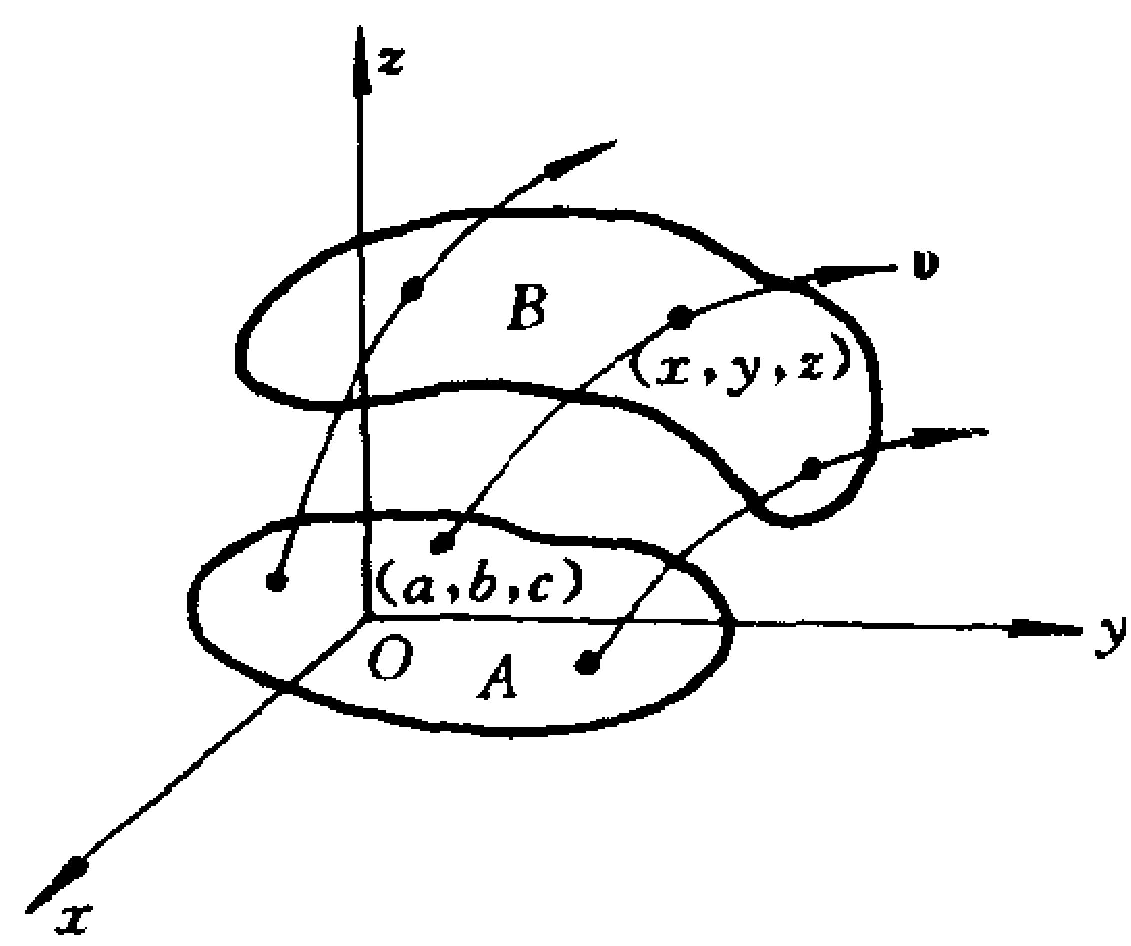


图3-1　拉格朗日变数

A－$t=0$ 时刻质点系的位置

B－t 时刻质点系的位置

表3-1　用拉格朗日法描述流体运动的表达式

质点运动坐标	质　点　速　度	质点加速度
$x=x(a,b,c,t)$	$v_x=\frac{dx}{dt}=v_x(a,b,c,t)$	$a_x=\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dv_x}{dt}=a_x(a,b,c,t)$
$y=y(a,b,c,t)$	$v_y=\frac{dy}{dt}=v_y(a,b,c,t)$	$a_y=\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{dv_y}{dt}=a_y(a,b,c,t)$
$z=z(a,b,c,t)$	$v_z=\frac{dz}{dt}=v_z(a,b,c,t)$	$a_z=\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{dv_z}{dt}=a_z(a,b,c,t)$

在 $t=0$ 时紧密毗邻的具有不同起始坐标(a,b,c)的无数质点组成一个有确定形状、有确定流动参数的质点系，在运动过程中质点系内各个质点的位移、速度、加速度不尽相同，故经过时间 t 之后，质点系的位置和形状均可能发生变化，但是这个由原来许多质点所组成的质点系，在流动过程中仍然是一个具有一定流动参数的物质实体。拉格朗日法不仅适用于观察起始坐标(a,b,c)不变的某一个质点，也适用于观察(a,b,c)连续变化的整个质点系。

二、欧拉法与控制体

描述流体运动的另一种方法是欧拉法，这种方法适应于流体运动的特点，在流体力学上获得广泛应用。

因为流动空间中充满连续不断的流体质点，而每个质点都具有一定的物理量，因而流体流动空间必然形成为物理量连续分布的场，例如速度场、密度场、温度场、压强场等等，或者统称为流场。每一个流体质点在确定时刻 t 必然占据流场中的确定位置(x,y,z)，从而具有确定的物理量。因为流体是连续介质，质点紧密相接，在运动过程中，一定的空间点可能被无数质点前出后进地依次占据，所以我们无需关心某一个质点的运动历程，只要能够找到整个流场中物理量的变化规律，则此流场的运动性质及流场中流体与固体边界的相互作用都是可以顺利解决的。这种以数学场论为基础、着眼于任何时刻物理量在场上的分布规律的流体运动描述方法叫作欧拉法。欧拉法中用质点的空间坐标(x,y,z)与时间变量 t 来表达流场中的流体运动规律，(x,y,z,t)叫作欧拉变数。

值得注意的是，欧拉变数(x,y,z,t)不是各自独立的，因为流体质点在场中的空间位置 x,y,z 都应该与运动过程中的时间变量有关。不同时间 t，每个流体质点应该有不同的空间坐标，因而对任一个流体质点来说其位置变量 x、y、z 应该是时间 t 的函数，即

$$\left.\begin{aligned} x&=x(t)\\ y&=y(t)\\ z&=z(t) \end{aligned}\right\} \qquad (3-1)$$

由此可见，欧拉变数(x,y,z,t)与拉格朗日变数(a,b,c,t)不同，后者是各自独立的，而欧拉变数中的 x、y、z 并非独立变量，它们是随 t 变化的中间变量，因而欧拉变数中真正独立的只有时间变量 t。

用欧拉法描述流体运动最主要的是需要建立质点速度场的表达式：

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_x(x,y,z,t) = v_x[x(t),y(t),z(t),t] \\ v_y &= v_y(x,y,z,t) = v_y[x(t),y(t),z(t),t] \\ v_z &= v_z(x,y,z,t) = v_z[x(t),y(t),z(t),t] \end{aligned}\right\} \quad (3-2)$$

或 $$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(x,y,z,t) = \boldsymbol{v}[x(t),y(t),z(t),t] \quad (3-3)$$

据此可以得出任一时刻(即 t 一定)质点速度在空间中的分布规律,也可以得出任一空间点上(即 x、y、z 一定)的质点速度随时间的变化规律。

有了速度场的表达式,根据后面将要介绍的伯努利方程等流体动力学原理,也可以得出压强场的表达式:

$$p = p(x,y,z,t) \quad (3-4)$$

对于可压缩流体来说,有时也需要密度场和温度场的表达式:

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \rho(x,y,z,t) \\ T &= T(x,y,z,t) \end{aligned}\right\} \quad (3-5)$$

流场有两种特例,一种是定常场,一种是均匀场。

1. 如果流场中的速度、压强、密度、温度等等物理量的分布与时间 t 无关,即

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t} = \cdots = 0 \quad (3-6)$$

则称为定常场,或定常流动,此时物理量具有对时间的不变性。

2. 如果流场中的速度、压强、密度、温度等等物理量均与空间坐标无关,即

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = \cdots = 0 \quad (3-7)$$

则称为均匀场或均匀流动,此时物理量具有对空间的不变性。

欧拉法着眼于不同瞬时物理量在空间上的分布而不关心个别质点的运动历程,通俗地说欧拉法类似于在不同地点设立气象观察站的办法,在不同空间点上来观察流体运动规律。有时也将孤立点上的观察站扩大为一个有适当规模的连续区域,这种借以观察流体运动的空间区域又称为控制体。

控制体是相对于坐标系有固定位置、有任意确定形状的空间区域，控制体的表面也称为控制面，流体质点系可以按照自身运动规律穿越控制面自由出入于控制体。质点系相对于坐标系不但可以有位移，而且也可能有变形（压缩或者膨胀），但是在运动过程中控制体相对于坐标系的位置与形状都是固定不变的。通俗地说，控制体类似于建立在固定地点上的“空中舞台”，流体质点是出入于这个舞台上下的“演员”，“演员”表演运动节目时，“舞台”是不能“迁移”也不能“改建”的。

§3-2 流体运动中的几个基本概念

欧拉法是流体力学中特有的方法，为了用这种方法研究流体运动及建立流体动力学基本方程，首先必须了解一些流体运动中的基本概念，这些概念是流体力学所特有的。已经熟悉固体运动概念后，重新建立这些新的概念尤其重要。

一、物理量的质点导数

运动中的流体质点所具有的物理量 N（例如速度、压强、密

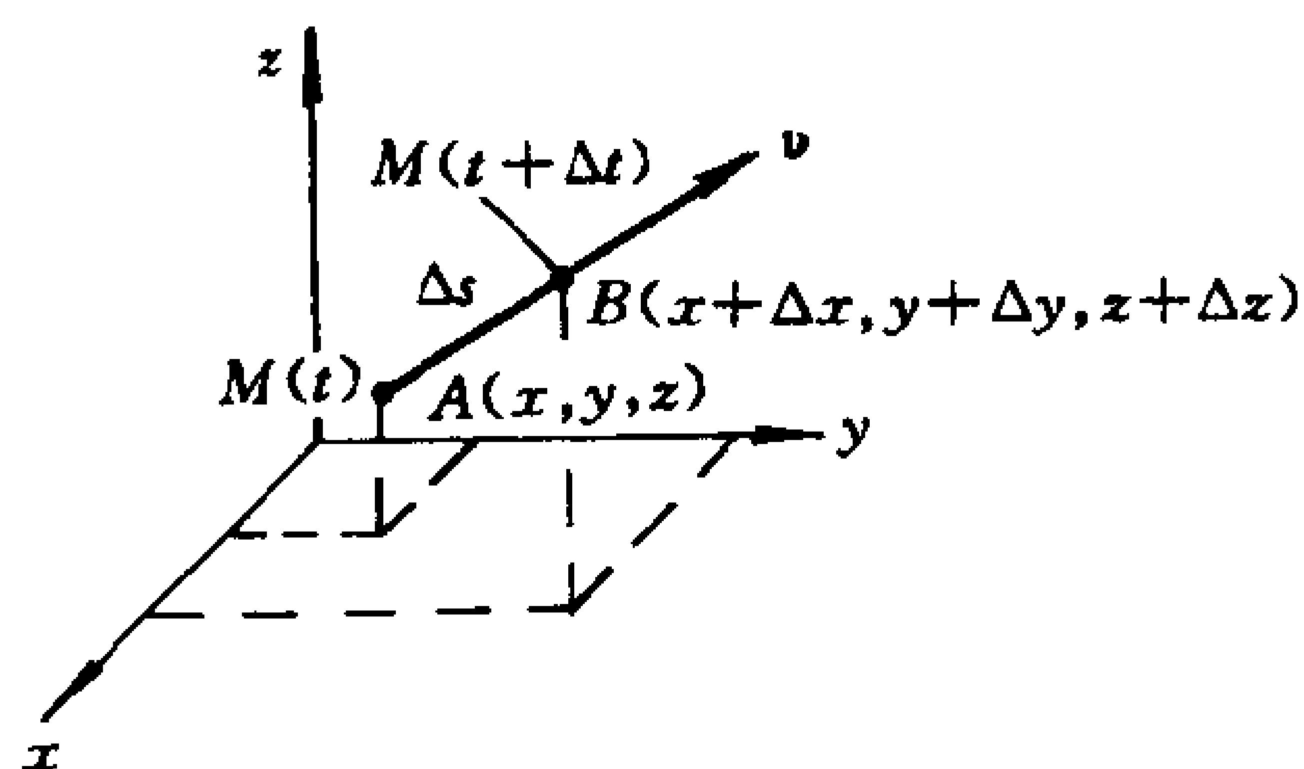


图 3-2 流体的质点导数

度、温度、质量、动量、动能等等）对时间的变化率

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta N}{\Delta t} \tag{3-8}$$

称为物理量 N 的质点导数（或随体导数）。

如果流体质点处于静止状态,则不存在质点导数的概念,这一概念是专指运动流体质点而言的。

如图 3－2 所示,流体质点 M 在 t 瞬时,从某一空间点 $A(x,y,z)$以瞬时速度$\boldsymbol{v}(x)=v_x(t)\boldsymbol{i}+v_y(t)\boldsymbol{j}+v_z(t)\boldsymbol{k}$ 携带某个物理量$N=N(x,y,z,t)$在流场中运动,经过 Δt 时间,质点到达 $B(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)$点,由于流场的非定常性和非均匀性,质点 M 所具有的物理量N,在运动过程中不止经历了时间 Δt 的变化,而且也经历了空间 $\Delta \boldsymbol{s}=\Delta x\boldsymbol{i}+\Delta y\boldsymbol{j}+\Delta z\boldsymbol{k}$ 的变化。这种空间变化量 $\Delta \boldsymbol{s}$,亦即质点的位移,当然与 Δt 时间的长短有关,因而质点 M 所具有的物理量N 并不是t 的简单一元函数,而是 t 的复合函数,其中间变量就是 $x=x(t),y=y(t),z=z(t)$。于是按照多元复合函数 $N=N[x(t),y(t),z(t),t]$的求导方法可得物理量 N 的质点导数为

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial N}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial N}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial N}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial N}{\partial t} \tag{3-9}$$

这也就是说,质点导数必然是数学上多元复合函数对独立自变量 t 的导数。数学上没有给这种导数赋予专业名称,联系流体力学的物理内容,这种导数就是我们所谓的质点导数。

考虑到流体力学的物理内容,(3－9)式还可以改写成下面的形式。

因为位移对时间的导数就是质点的速度,即

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_x,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v_y,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=v_z \tag{3-10}$$

故质点导数又可写成

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=v_x\frac{\partial N}{\partial x}+v_y\frac{\partial N}{\partial y}+v_z\frac{\partial N}{\partial z}+\frac{\partial N}{\partial t} \tag{3-11}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)N+\frac{\partial N}{\partial t}。 \tag{3-12}$$

式中

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{3-13}$$

称为哈密顿(Hamilton)算子，或矢性微分算子，它虽然具有矢量形式，但并非矢量；它只是对其后面所列函数进行如(3－13)所示的微分运算的一种符号。

从(3－11)式可见，物理量的质点导数$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$包括下列两部分。

1. $\frac{\partial N}{\partial t}$称为当地导数、局部导数或时变导数。它代表质点没有空间变位时，物理量 N 对时间的变化率，它反映流场的非定常性。显然定常流动时一切当地导数均为零。

2. $v_x\frac{\partial N}{\partial x} + v_y\frac{\partial N}{\partial y} + v_z\frac{\partial N}{\partial z}$或$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)N$ 称为迁移导数或位变导数。它代表质点经过 $\mathrm{d}t$ 时间处于不同位置时，物理量 N 对时间的变化率，它反映流场的非均匀性。在均匀流动时，即使经过 $\mathrm{d}t$ 时间，质点处于不同位置，但物理量 N 在流场中处处相等，即$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z} = 0$，因而均匀流场中迁移导数必然为零。

值得注意的是，迁移导数 $v_x\frac{\partial N}{\partial x} + v_y\frac{\partial N}{\partial y} + v_z\frac{\partial N}{\partial z}$虽然与物理量$N$ 在空间的分布$\left(\frac{\partial N}{\partial x},\frac{\partial N}{\partial y},\frac{\partial N}{\partial z}\right)$有关，但它并不就是物理量 N 对坐标的导数$\frac{\partial N}{\partial x},\frac{\partial N}{\partial y},\frac{\partial N}{\partial z}$。迁移导数中的自变量仍然是时间 t，从(3－9)式等号右边的前三项可见迁移导数仍然是物理量 N 对时间 t 求导，只不过不是直接求导，而是通过中间变量 x,y,z(亦即质点的位标)实行对 t 的求导罢了。因而迁移导数必然也是质点导数(即物理量 N 对时间的变化率)中的一个组成部分。

质点的物理量 N 可以是压强、密度、温度，也可以是流体运动的速度。因而根据(3－11)式可得

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = v_x\frac{\partial p}{\partial x} + v_y\frac{\partial p}{\partial y} + v_z\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial t} = (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)p + \frac{\partial p}{\partial t} \tag{3-14}$$

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=v_x\frac{\partial\rho}{\partial x}+v_y\frac{\partial\rho}{\partial y}+v_z\frac{\partial\rho}{\partial z}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\rho+\frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{3-15}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}&=v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_x}{\partial t}\\&=(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)v_x+\frac{\partial v_x}{\partial t}\\\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}&=v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_y}{\partial t}\\&=(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)v_y+\frac{\partial v_y}{\partial t}\\\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}&=v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial t}\\&=(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)v_z+\frac{\partial v_z}{\partial t}\end{aligned}\right\} \tag{3-16}$$

(3－16)式也可写成：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}+\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} \tag{3-17}$$

速度这个物理量的质点导数，实际上就是流体质点的加速度，因而用欧拉法描述流体运动时的质点加速度表达式即如(3－16)或(3－17)式所示。质点加速度同样是由当地加速度$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}$及迁移加速度$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$两部分组成，它们的物理概念可以用图 3－3 所示的简例加以说明。装在水箱中的水经过水箱底部的一段等径管路 *AB* 及变径喷嘴 *BC* 向外流动。假如我们只讨论管中断面上的平均速度 v 而不研究断面上的速度分布。那么断面平均流动参数，除时间变量外，就只随一个空间变量 s(即沿管轴线方向的自然坐标)变化：$v=v(s,t)$，这

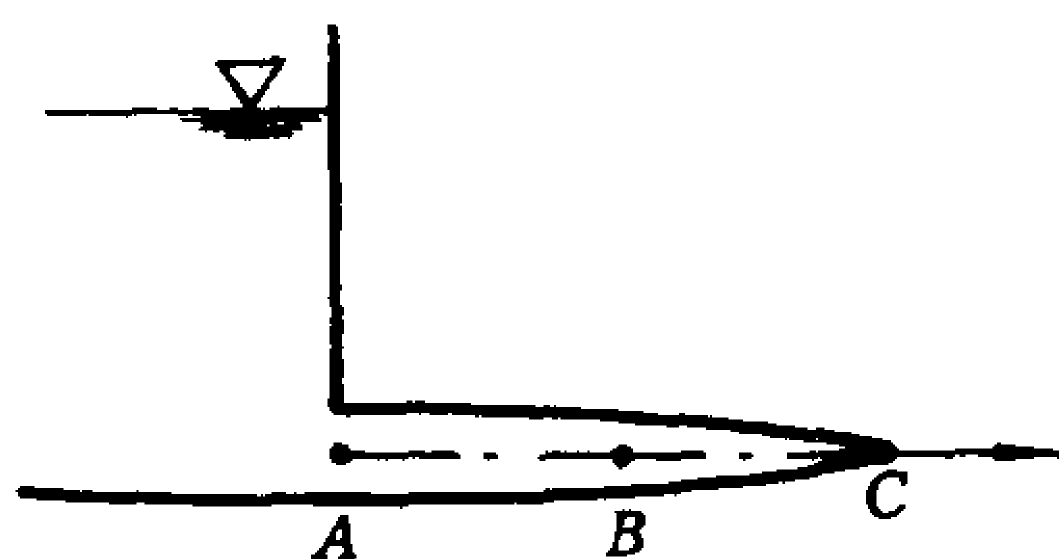


图 3－3　当地加速度与迁移加速度

种流动通称为一元(或一维)流动。对于一元流动来说,如果箱中水位保持恒定,则整个管流成为定常流 $v=v(s)$,AB 段是定常均匀流,BC 段是定常非均匀流。质点从 A 流向 B 时既没有当地加速度也没有迁移加速度;质点从 B 流向 C 时虽然没有当地加速度,但是却有迁移加速度。

如果箱中水位不保持恒定,则整个管路成为非定常流。AB 段是非定常均匀流,BC 段是非定常非均匀流。质点从 A 流向 B 时虽然没有迁移加速度,但是却有当地加速度;质点从 B 流向 C 时既有迁移加速度又有当地加速度。

二、迹线与流线

流体质点的运动轨迹叫作迹线,迹线是拉格朗日法描述流体运动的几何基础,而欧拉法描述流体运动的几何基础则是流线。

1. 流线的定义

如图 3-4 在 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(x、y、z、t)$ 的流场中,任取 1 点绘出 t 瞬时 1 点的速度矢量 $\boldsymbol{v}_1$,在 $\boldsymbol{v}_1$ 矢量线上取与 1 点相距极近的 2 点,绘出同一瞬时 2 点的速度矢量 $\boldsymbol{v}_2$,再在 $\boldsymbol{v}_2$ 矢量线上取与 2 点相距极近的 3 点,绘出同一瞬时 3 点的速度矢量 $\boldsymbol{v}_3$,依此类推,就可以得到 1234……这样一条折线,如果所取各点的距离无限缩短,则这条折线就变成一条光滑曲线,这就是 t 瞬时从 1 点出发的一条流线。于是可得出流线的定义是:流线是流场中的瞬时光滑曲线,曲线上各点的切线方向与各该点的瞬时速度方向一致。

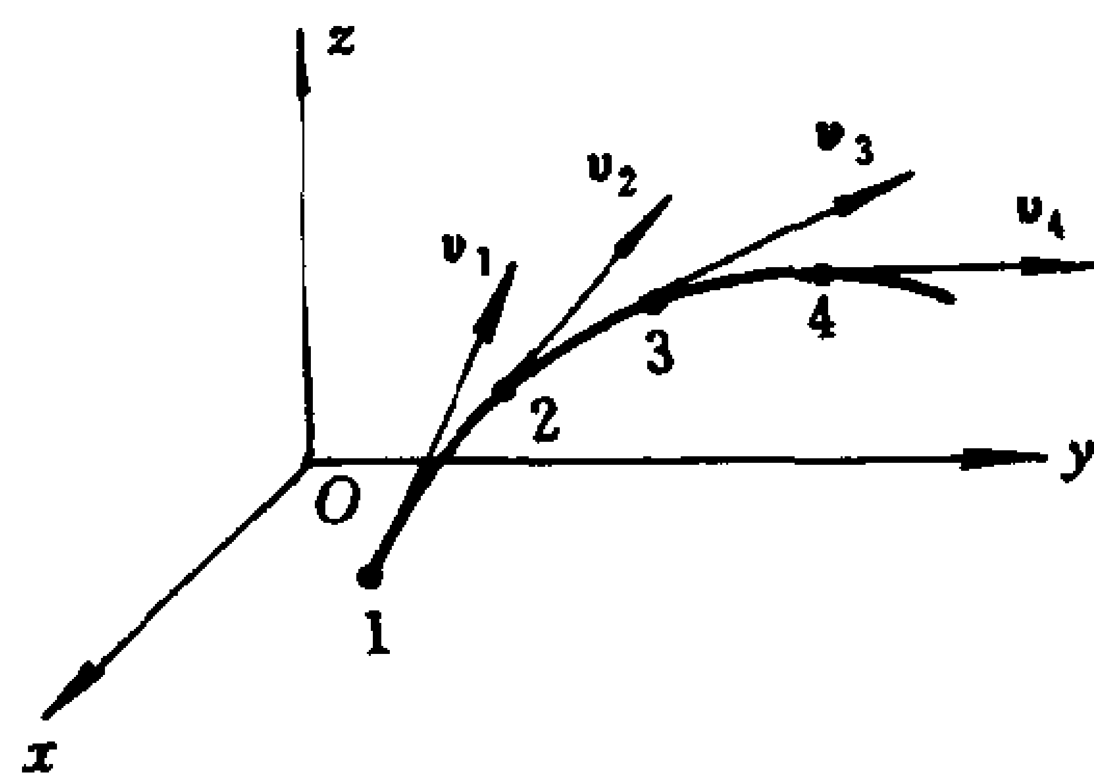


图 3-4 流线

在水流中均匀投入适量的轻金属粉末,同时采用仕当曝光时间拍摄照片,则许多依次首尾相连的短线就组成流场中的流线谱,由此可以清楚地看到流场中各点的瞬时速度方向。不断发展的“流场可视化”技术为研究流体运动提供了科学的实验手段,流线

不是看不见摸不着的抽象概念。

2. 流线的微分方程式

设某一点上的质点瞬时速度为

$$\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k} \tag{3-18}$$

流线上的微元线段矢量为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\mathrm{d}x\boldsymbol{i}+\mathrm{d}y\boldsymbol{j}+\mathrm{d}z\boldsymbol{k} \tag{3-19}$$

根据定义,这两个矢量方向一致,矢性积为零,于是可得出流线的矢量表示法为

$$\boldsymbol{v}\times\mathrm{d}\boldsymbol{s}=0 \tag{3-20}$$

写成投影形式,则

$$\frac{\mathrm{d}x}{v_x}=\frac{\mathrm{d}y}{v_y}=\frac{\mathrm{d}z}{v_z} \tag{3-21}$$

这就是最常用的流线微分方程式。

[例题 3-1] 已知流场中质点的速度为

$$\left.\begin{aligned} v_x&=kx\\ v_y&=-ky\\ v_z&=0\end{aligned}\right\}\quad (y\geqslant 0)$$

试求流场中质点的加速度及流线方程。

[解] 从 $v_z=0$ 及 $y\geqslant 0$ 可见流体运动只限于 Oxy 的上半平面,质点速度为

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=k\sqrt{x^2+y^2}=kr$$

质点加速度为

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}=k^2x$$

$$a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}=k^2y$$

$$a_z=0$$

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=k^2\sqrt{x^2+y^2}=k^2r \qquad (答)$$

又从流线方程 $\frac{\mathrm{d}x}{kx}=\frac{\mathrm{d}y}{-ky}$ 中消去 k,积分得

$$\ln x = -\ln y + \ln C$$

即

$$xy = C$$

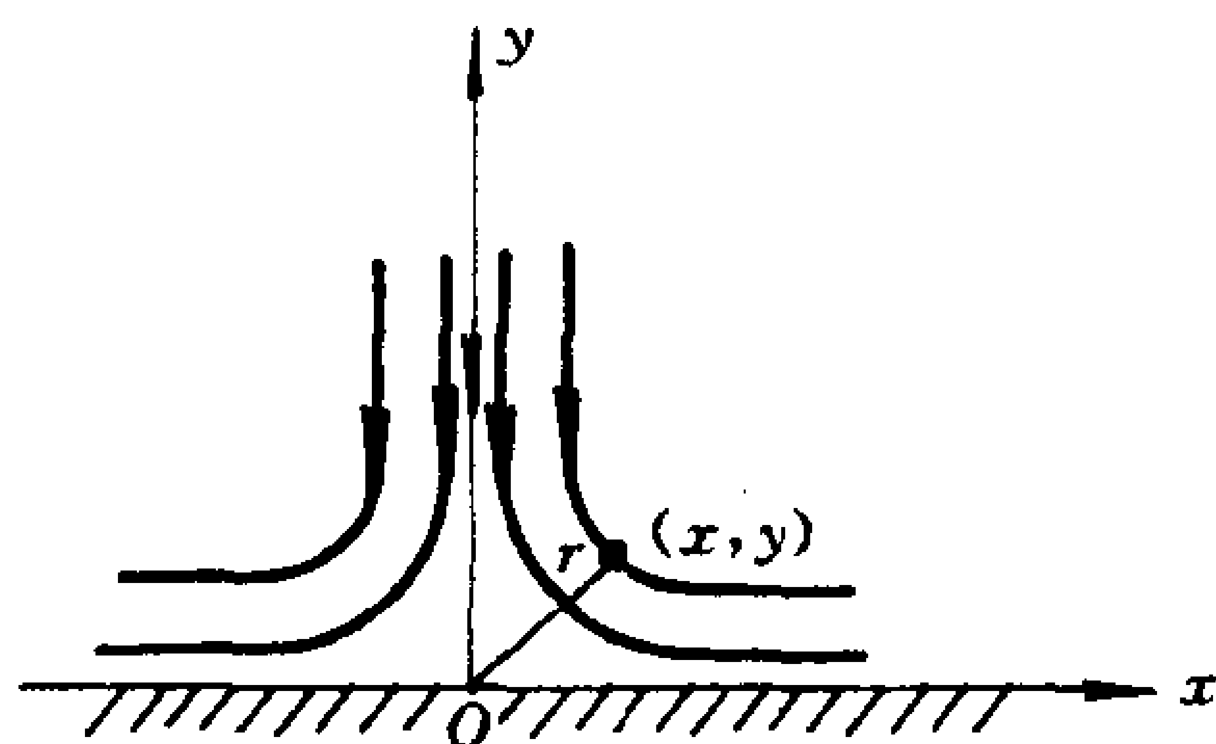


图 3－5　双曲线形流线

流线是如图 3－5 所示的一族等角双曲线，质点离原点越近，即 r 越小，其速度与加速度均越小，在 $r=0$ 点处，速度与加速度均为零。流体力学上称速度为零的点为驻点或滞止点（如图中 O 点即是）。

在 $r\to\infty$ 的无穷远处，质点速度与加速度均趋于无穷。流体力学上称速度趋于无穷的点为奇点。驻点和奇点是流场中的两种极端情况，一般流场中不一定都存在驻点和奇点。

3．流线的性质

（1）定常流动中流线形状不随时间变化，而且流体质点的轨迹与流线重合。

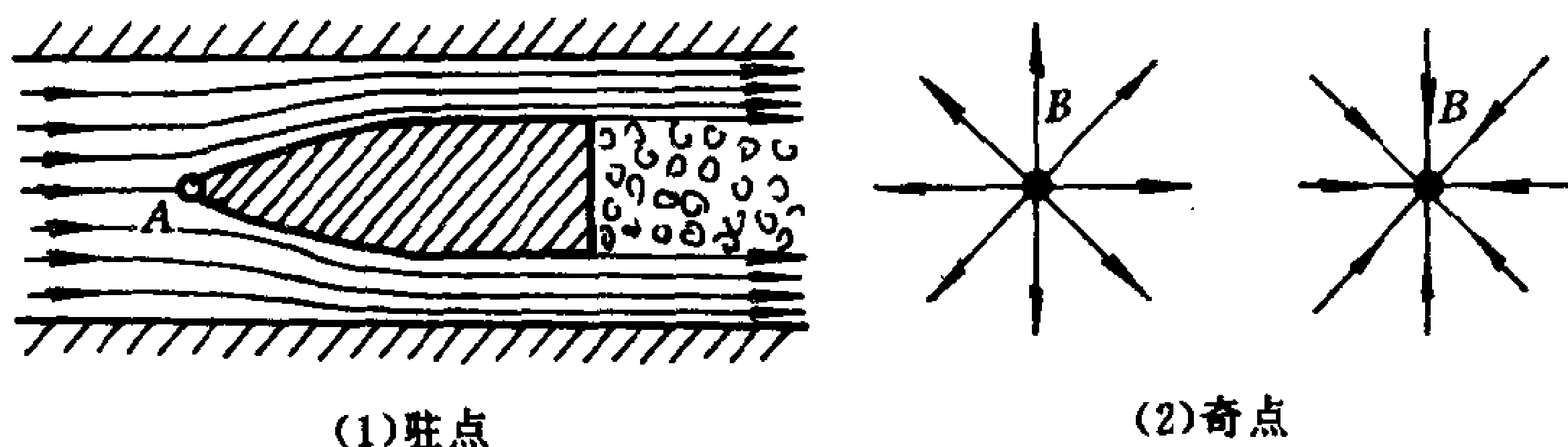
因为定常流动中速度与时间无关，因而代表速度方向的流线形状也必然与时间无关。此时如果有一个质点从图 3－4 所示的定常流线 1 点处开始运动，经过一段微小时间它只能沿流线行走一段微小距离而到达与 1 点紧密相邻的 2 点，如此类推，由于定常流线决定了线上各点处的运动方向，故而所观察的质点也始终不会离开这条流线。

（2）实际流场中除驻点或奇点外，流线不能相交，不能突然转折。

因为实际存在的流场中除驻点或奇点外，一点处的质点瞬时速度只可能有一个唯一的方向和大小。如果流线相交或者突然折转，则在交点和折转点上必然出现不同方向的瞬时速度，这违背一

点上瞬时速度的唯一性。

驻点和奇点是两种例外，例如气流绕尖头直尾的物体流动时，其流线谱如图 3－6(1)所示，物体的前缘点 A 就是一个实际存在的驻点，驻点上流线是相交的，这是因为驻点速度为零的缘故。



(1)驻点　　(2)奇点

图 3－6　驻点与奇点

如图 3－6(2)所示，流体沿射线从 B 点流出或者向 B 点流入的流动称为源或汇，B 点是速度趋于无穷的奇点，奇点处流线也是相交的。不过需要指出，实际流动中不可能出现无穷大的速度，因而奇点(或源与汇)只是一种抽象的理论模型。

流线不能突然折转，因而在图 3－6(1)的物体尾部，必然有一部分流体不能参与主流方向的运动，而被主流带动产生涡旋这样就消耗了主流的能量，或者增大了运动物体的阻力。如果将物体平直的尾部改成圆滑的“流线型”形状，则可以减小尾部的涡旋，改善运动物体的动力性能，所谓“流线型”就是适应流线不能突然折转而采取的减少阻力的措施。

三、流管与流束

在流场中任意取出一个有流体从中通过的封闭曲线，如图 3－7中的 l，过封闭曲线上的每个点作适当长度的流线，这无数流线围成一个通常称为流管的管状假想表面，流管内部的全部流体叫作流束。

流束可大可小，如果封闭曲线取在管道内壁周线上，则流束就是充满管道内部的全部流体，这种情况通常称为总流。如果封闭

曲线取得极小，甚至缩为一点，则极限近于一条流线的流束叫作微元流束。流束不论大小，它总是由流体组成的，因而它有体积、有质量、有动量、有动能。而流管和流线则只是一种几何上的面和线，它们只有几何形状而没有任何体积和质量。

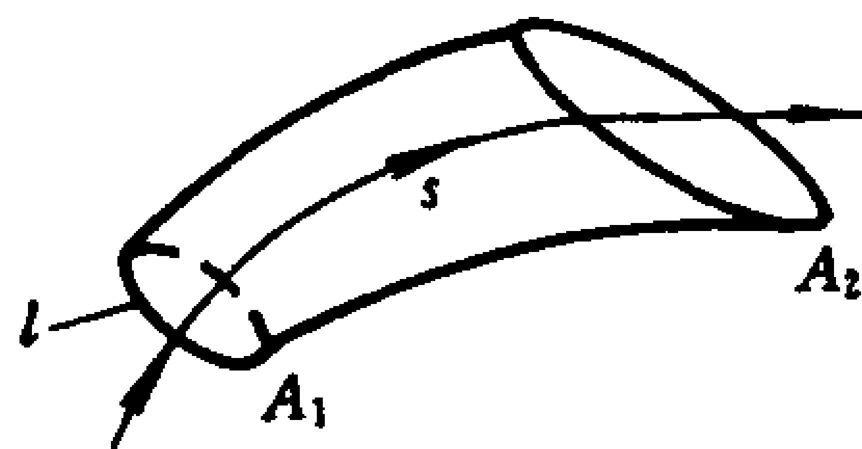


图3－7　流管与流束

流管连同两侧的端面组成一个流管控制体，而流束则是流体质点系。我们讨论流经流管控制体的流体运动有许多方便，首先因为流管是由无数流线组成的，流线不能相交，故而不会有流体穿越流管表面。流束与其他流体的质量交换只能通过流管或流束的两个端面 A_1，A_2。一般来说流束的端面可以任意截取，如图中的 A_2 即是。不过为了简化计算，最好截取端面时使它与流束上各点的速度方向互相垂直，这种与速度方向互相垂直的端面称为过流断面，如图中的 A_1 即是。流束上流线互相平行时过流断面是平面；流线不平行时，过流断面是曲面。

其次因为微元流束的过流断面的极限 $\lim\limits_{\Delta A \to 0} \Delta A = \mathrm{d}A$ 缩为一点，因而沿微元流束的流动参数（如速度、压强、密度等等）是沿流束设置的自然坐标的一元函数。有限大过流断面的总流可以看作是由无数并列的微元流束所组成，因而可以在总流中取出微元流束作为流动的基本单元，运用一元函数的简单分析方法很容易得出流动参数沿流束的变化规律。然后通过在总流过流断面上的积分，可以将结果扩展到总流上，这种一元流的分析方法在工程流体力学中有很大实用价值。

四、流量与净通量

1．流量

单位时间内流过某一控制面的流体体积称为该控制面的流量 q_V。流量不是矢量，它的单位是 $\mathrm{m^3/s}$ 或 l/min。如果单位时间内

流过的流体是以质量计算，则称为质量流量 q_m，不加说明时"流量"一词概指体积流量。

控制面如果是过流断面(不论平面或曲面)，由于速度方向与面积垂直，故其流量表达式如下：

在微元流束上

$$dq_V = v dA \tag{3-22}$$

在平面控制面上

$$q_V = \int_A v dA \tag{3-23}$$

在曲面控制面上

$$q_V = \iint_A v dA \tag{3-24}$$

控制面(也可能是平面或曲面)如果不是过流断面，通常可用速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 与控制面上的微元面积矢量 d$\boldsymbol{A}$ 的数量积来表达流量。如图 3-8 所示，如果控制面的微元面积矢 d$\boldsymbol{A}$ = $\boldsymbol{n}$dA 与其上一点速度 $\boldsymbol{v}$ 之间的夹角为 θ，则 d$A\cos\theta$ 即为微元过流断面面积，或者 $v\cos\theta$ 即为与控制面相垂直的速度，仿照(3-22)、(3-23)和(3-24)式可得流量的表达式如下：

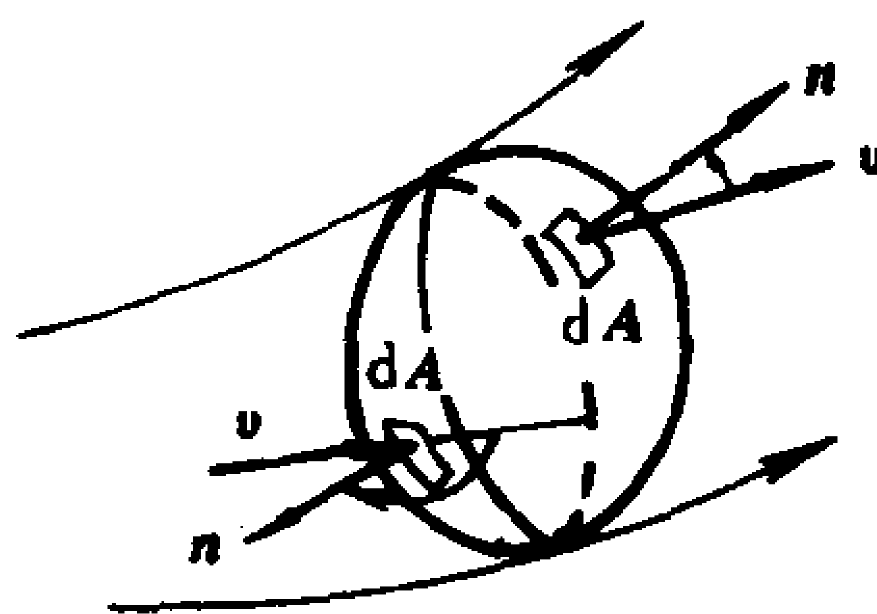


图 3-8　流量表达式

在微元流束上

$$dq_V = v dA\cos\theta = \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{A} = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} dA \tag{3-25}$$

在平面控制面上

$$q_V = \int_A v dA\cos\theta = \int_A \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{A} = \int_A \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} dA \tag{3-26}$$

在曲面控制面上

$$q_V = \iint_A v dA\cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{n}) = \iint_A \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{A} = \iint_A \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n} dA \tag{3-27}$$

2. 净通量

有时也可以在流场中取整个封闭曲面作为控制面,如图 3－8,封闭曲面内的空间称为控制体,流体经一部分控制面流入控制体,同时也有流体经另一部分控制面从控制体中流出。在这种情况下,流过全部封闭控制面 A 的流量称为净流量(或净通量),用 q_V 表示,则

$$q_V = \oint\!\!\!\oint_A v\mathrm{d}A\cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{n}) = \oint\!\!\!\oint_A \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \oint\!\!\!\oint_A \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}A \tag{3-28}$$

(3－27)式与(3－28)式的区别在于:前者是在非封闭曲面域上的曲面积分,而后者是在封闭曲面域上的曲面积分,二者的积分域虽然都用符号 A 表示,但其含义是不同的。

流量和净通量都是两个矢量的数量积,因而都是没有方向性的标量,标量既有大小也有正负,流量和净通量的正负代表什么意义呢,这不难从图 3－8 的封闭曲面上看出:

流体经控制面流入控制体时,速度矢量与微元面积外法线矢量之间的夹角恒为钝角,$\cos(\widehat{\boldsymbol{v},\boldsymbol{n}})<0$,因而流入控制体的流量恒为负值。流体经控制面从控制体流出时,速度矢量与微元面积外法线矢量之间的夹角恒为锐角,$\cos(\widehat{\boldsymbol{v},\boldsymbol{n}})>0$,因而从控制体流出的流量恒为正值。

因而按(3－27)式算出的流量 q_V 如果大于零,则 q_V 的绝对值就是从控制体流出的流量;q_V 如果小于零,则 q_V 的绝对值就是流入控制体的流量。

同样,对于净通量来说,如果按(3－28)式算出的 q_V 大于零,则流量的流出部分大于流入部分,此时 q_V 的绝对值就是控制体的净流出流量。q_V 如果小于零,则流入部分大于流出部分,q_V 的绝对值就是控制体的净流入流量。如果 q_V 等于零,则经某一部分控制面流入控制体的流量恰好等于经另一部分控制面向外流出

的流量，此时封闭曲面的净流量为零。

五、过流断面上的平均速度与动能、动量修正系数

1. 平均速度

从流量公式上看到，要想求得总流过流断面上的流量，首先必须知道速度在过流断面上的分布规律。由于粘性摩擦及质点互相混杂等实际因素的影响，即使在如图 3－9 所示的简单管道中，流体速度分布规律 $v=v(r)$，有时也不是容易确定的。

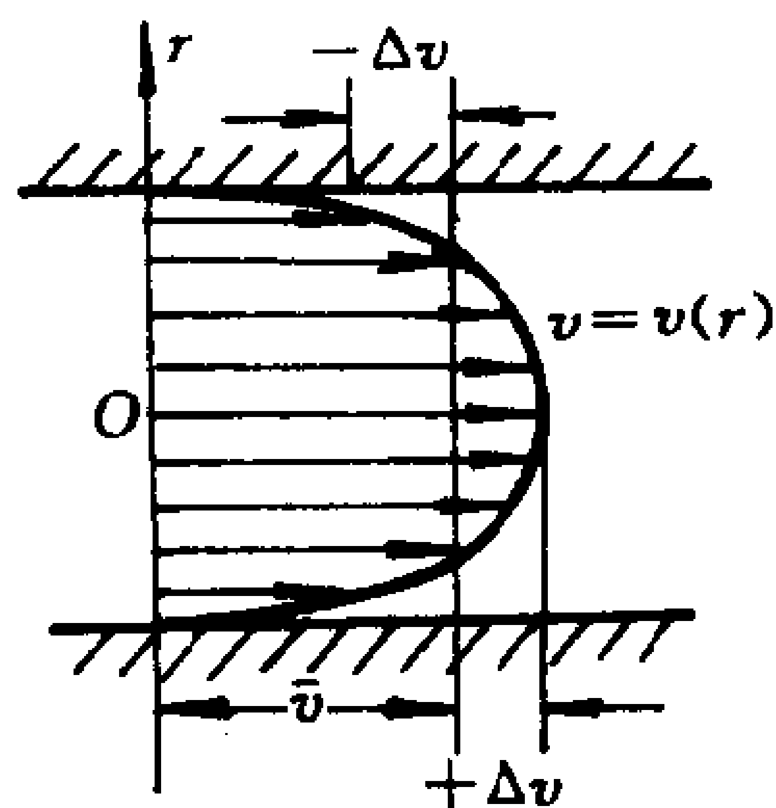


图 3－9 平均速度

工程计算常采取一种简单化的方式，不管速度分布如何，只要用实验测出过流断面的流量 q_V，再除以过流断面面积 A，则所得到的一个平均值

$$\bar{v}=\frac{q_V}{A} \tag{3-29}$$

就叫作过流断面上的平均速度，也称为管中平均速度。

令 $v=\bar{v}+\Delta v$，或 $\Delta v=v-\bar{v}$ 代表真实速度 v 与平均速度 $\bar{v}$ 之差。差速度 Δv，在管路过流断面的中心部位为正，在近壁部位为负。速度分布越不均匀，Δv 的绝对值越大。

因 $q_V=\int_A v\mathrm{d}A=\int_A(\bar{v}+\Delta v)\mathrm{d}A=\bar{v}A+\int_A\Delta v\mathrm{d}A$

所以

$$\int_A\Delta v\mathrm{d}A=0 \tag{3-30}$$

此式的几何关系从图 3－9 上可以看出，以 $\frac{q_V}{A}=\bar{v}$ 为基准，$\Delta v>0$部位所超出的流量刚好补足 $\Delta v<0$ 部位流量的不足。在过流断面上的不同点处 Δv 有正有负，但在整个过流断面 A 上 $\Delta v\mathrm{d}A$ 的积分是等于零的。顺便要说明在整个过流断面上 $\Delta v^2\mathrm{d}A$ 的积分却不会等于零，因为不论 Δv 为正为负，其平方都是正值，因而

$$\int_A \Delta v^2 \mathrm{d}A > 0 \tag{3-31}$$

再将$\int_A \Delta v^3 \mathrm{d}A = \int_A (\Delta v^2)(\Delta v \mathrm{d}A)$用分部积分法积分之，可得

$$\int_A \Delta v^3 \mathrm{d}A = \Delta v^2 \int_A \Delta v \mathrm{d}A - \int \left[\int_A \Delta v \mathrm{d}A \right] \mathrm{d}(\Delta v^2) = 0 \tag{3-32}$$

(3－30)、(3－31)及(3－32)式的这三个积分在计算过流断面上的动能或动量时就会遇到，这里提前引出就是为了下面(3－33)及(3－35)式的需要。

2. 动能与动量修正系数

因为单位时间内通过过流断面的流体动能如果用平均速度表达则为$\frac{q_m}{2}\bar{v}^2 = \frac{\rho}{2}\bar{v}^3 A$，这与单位时间内通过过流断面的真实流体动能$\int_A \mathrm{d}q_m \frac{v^2}{2}$并不是相等的，它们之间的关系是：

$$\begin{aligned}\int_A \mathrm{d}q_m \frac{v^2}{2} &= \int_A \rho \frac{v^3}{2} \mathrm{d}A = \frac{\rho}{2} \int_A (\bar{v}^3 + 3\bar{v}^2 \Delta v + 3\bar{v} \Delta v^2 + \Delta v^3) \mathrm{d}A \\ &= \frac{\rho}{2}\bar{v}^3 A \left(1 + \frac{3}{\bar{v}^2 A}\int_A \Delta v^2 \mathrm{d}A\right) \\ &= \alpha \frac{\rho}{2}\bar{v}^3 A \end{aligned} \tag{3-33}$$

式中

$$\alpha = \frac{\int_A \mathrm{d}q_m \frac{v^2}{2}}{\frac{\rho}{2}\bar{v}^3 A} = \frac{\int_A v^3 \mathrm{d}A}{\bar{v}^3 A} = 1 + \frac{3}{\bar{v}^2 A}\int_A \Delta v^2 \mathrm{d}A > 1 \tag{3-34}$$

称为动能修正系数，这也就是说用平均速度表达单位时间内通过过流断面的流体动能时，需要乘以动能修正系数α才能与真实动能相等。

动量是个矢量，如果只考虑沿流动方向上的数值，则单位时间内通过过流断面的流体动量用平均速度表达则为$q_m \bar{v} = \rho \bar{v}^2 A$，这

与单位时间内通过过流断面的真实动量 $\int_A \mathrm{d}q_m v$ 也是不等的，它们之间的关系是：

$$\int_A \mathrm{d}q_m v = \int_A \rho v^2 \mathrm{d}A = \rho \int_A (\bar{v}^2 + 2\bar{v}\Delta v + \Delta v^2)\mathrm{d}A$$

$$= \rho\bar{v}^2 A\left(1 + \frac{1}{\bar{v}^2 A}\int_A \Delta v^2 \mathrm{d}A\right) = \beta\rho\bar{v}^2 A \qquad (3-35)$$

式中

$$\beta = \frac{\int_A \mathrm{d}q_m v}{\rho\bar{v}^2 A} = \frac{\int_A v^2 \mathrm{d}A}{\bar{v}^2 A} = 1 + \frac{1}{\bar{v}^2 A}\int_A \Delta v^2 \mathrm{d}A > 1 \quad (3-36)$$

称为动量修正系数，也就是说用平均速度表达单位时间内通过过流断面的流体动量大小时，需要乘以动量修正系数 β，才能等于真实动量的大小。

α 与 β 均与过流断面上的速度分布有关，速度分布越均匀则修正系数越小。

在第五章中，当求出管中层流及管中湍流的速度分布之后，按照(3-34)及(3-36)可以算出：

管中层流时：$\alpha = 2, \beta = \frac{4}{3}$；

管中湍流时：$\alpha = 1.06, \beta = 1.02$。可以认为 $\alpha \approx \beta \approx 1$。以后除特殊声明的情况外，在管中湍流的例题和习题中一般可取为 $\alpha = \beta = 1$。

§3-3 连续方程式

一、基本原理

在流场中取任意形状的一个控制体，如图 3-10 所示，设其体积为 V，其表面积为 A。任何瞬时连续充满于控制体内的流体质量可以用微元质量 $\rho \mathrm{d}V$ 在控制体范围内的体积积分表示为

$\iiint\limits_V \rho \mathrm{d}V$。

在流体穿越控制面的流动过程中，经过单位时间，假如控制体内的流体质量发生了变化，则其对时间的变化率，或者说是单位时间内的变化量应当记为$\frac{\partial}{\partial t}\left(\iiint\limits_V \rho \mathrm{d}V\right)$（此处采用偏微分符号的原因是，控制体位置和形状相对于坐标系是固定不变的）。

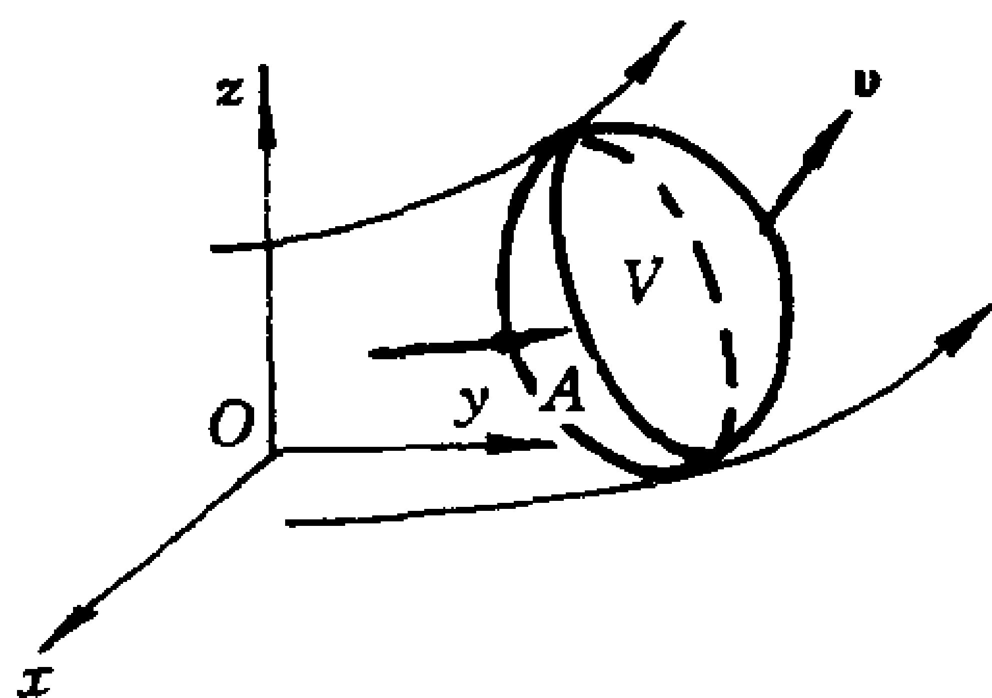


图3-10　任意控制体

现在的问题是，究竟在什么情况下控制体内的质量才能发生变化？如果变化其变化率又是多少？

根据自然界普遍存在的质量守恒定律，控制体内的质量不能无缘无故地自然生成或消失，影响质量变化的唯一原因就是经过控制面的流动。在单位时间内，如果流入控制体的质量大于从控制体流出的质量，即净质量流量$\oiint\limits_A \rho \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}<0$，则控制体内的质量必然增加，$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_V \rho \mathrm{d}V>0$。相反，如果流入的质量流量小于流出的质量流量，$\oiint\limits_A \rho \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}>0$，则控制体内的质量必然减少，$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_V \rho \mathrm{d}V<0$。

质量守恒定律不但能定性地说明控制体质量变化的原因，而且能定量地表达控制体中质量变化的大小。因为在控制体中质量不生不灭，要保持其中的流体呈连续状态而不出现任何空隙，则控制体中流体质量对时间的变化率与流经全部控制面的净质量流量在数值上必须完全相等。换句话说就是，控制体中的质量增加量必然就是同一时间内流入与流出的质量差。反之，其中的质量减

小量必然就是流出与流入的质量差。如果控制体中质量不变,则必然是在同一时间内流入与流出的质量相等。因而有

$$\oiint_A \rho \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = -\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho \mathrm{d}V$$

或

$$\oiint_A \rho \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho \mathrm{d}V = 0 \tag{3-37}$$

这就是根据质量守恒定律、保持流体呈连续流动状态而得到的所谓连续方程式,它是一切流体运动所必须遵循的一项普遍原则,它有下面两种简化的特例。

[**特例 1**] 定常流动

在定常流动中,流场任何空间点处的密度均不随时间变化,因而整个控制体中的质量也不随时间变化,$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho \mathrm{d}V = 0$,于是(3-37)式可简化为

$$\oiint_A \rho \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = 0 \tag{3-38}$$

这就是定常流动的连续方程式,它既适用于可压缩的定常流动,也适用于不可压缩的定常流动。方程式说明:定常流动中,从控制体流出的质量流量永远等于流入控制体的质量流量。

[**特例 2**] 不可压缩流体流动

流体不可压缩则其密度不但不随空间变化。而且也不随时间变化,于是从(3-37)式中,得

$$\rho\left[\oiint_A \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \mathrm{d}V\right] = 0$$

$\iiint_V \mathrm{d}V = V$,而控制体的位置、形状和体积在流动过程中相对于坐标系不变,故$\frac{\partial V}{\partial t} = 0$,又 $\rho \neq 0$,于是最后得

$$\oiint_A \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = 0 \qquad (3-39)$$

这就是不可压缩流体的连续方程式，它既适用于不可压缩的定常流动也适用于不可压缩的非定常流动。方程式说明：不可压缩流体流动时任何瞬时流入控制体的流量均等于同一瞬时从控制体流出的流量。

稍加注意我们可以发现(3－38)及(3－39)两式同时都适用于不可压缩流体的定常流动。事实上，此时前式的化简结果就是后式。

上面一组公式中所包含的曲面积分，在工程计算常用的流管控制体及微元六面体控制体中都很容易化简，从而得到的下面两组连续方程式则更具有实用价值。

二、一元流动的连续方程式

除时间坐标外，流动参数随一个、两个或三个空间坐标(可能是直线坐标，也可能是曲线坐标)变化的流动叫作一元、二元或三元流动。

如图 3－11 所示，不但微小流束是一元流动；即使有固体边界的总流，如果一切流动参数均以过流断面上的平均值计算，它也可以看作是一元流动。在一元流动的整个封闭控制表面中，只有两个过流断面是有流体通过的。因为出口过流断面的面积矢 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}_2$ 与速度矢 $\boldsymbol{v}_2$ 方向一致，而进口过流断面的 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}_1$ 与 $\boldsymbol{v}_1$ 方向相反，故由(3－38)式可得

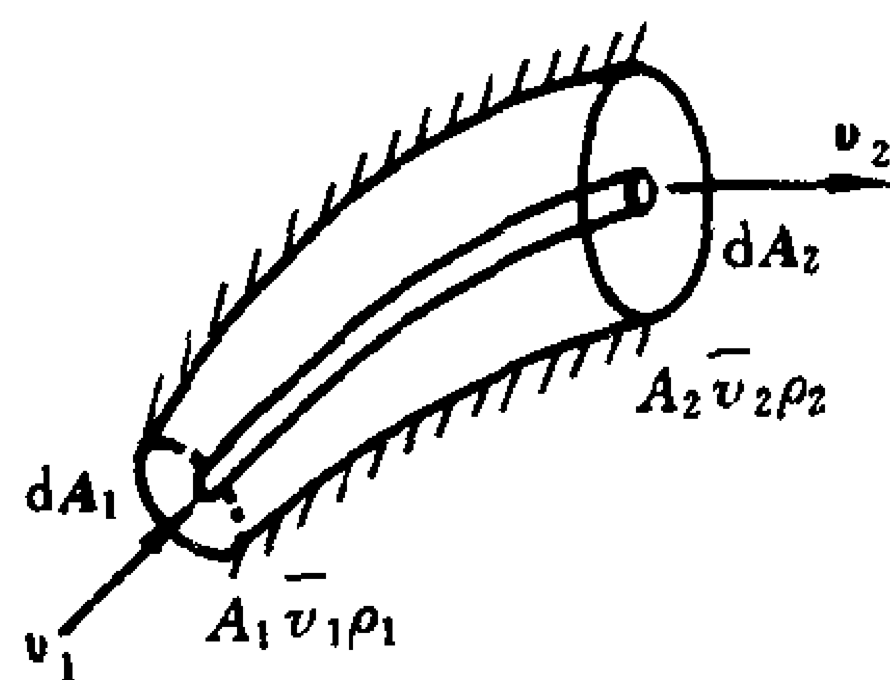


图 3－11　一元流动

$$\oiint_A \rho \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = \int_{A_2} \rho v_2 \mathrm{d}A_2 - \int_{A_1} \rho v_1 \mathrm{d}A_1$$

$$= \rho_2 \bar{v}_2 A_2 - \rho_1 \bar{v}_1 A_1 = 0$$

故，一元定常流动的连续方程式是

$$\rho_1\bar{v}_1A_1=\rho_2\bar{v}_2A_2 \tag{3-40}$$

同理，由(3－39)式可得

一元不可压缩流动的连续方程式是

$$\bar{v}_1A_1=\bar{v}_2A_2 \tag{3-41}$$

这两个公式中的 ρ_1、$\bar{v}_1$、ρ_2、$\bar{v}_2$ 均是过流断面上的平均值。

三、二元、三元流动的连续方程式

空间坐标系有直角坐标、圆柱坐标、球坐标、曲线坐标等许多形式，本书常用前两种，兹分述如下。

1. 直角坐标系中的连续方程式

利用高等数学中的基础知识将(3－37)式中的两项分别改写即可得出结果。

首先将对面积的曲面积分 $\oint\!\!\oint_A \rho\boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}$ 化为对坐标的曲面积分，然后根据奥斯特罗格拉特斯基－高斯公式将后者再化为三重积分即得

$$\oint\!\!\oint_A \rho\boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}=\oint\!\!\oint_A(\rho v_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\rho v_y\mathrm{d}x\mathrm{d}z+\rho v_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$$
$$=\iiint_V\left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{3-42}$$

其次根据控制体与时间无关的特性，将 $\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho\mathrm{d}V$ 先对控制体积分后对时间微分的次序颠倒，则得

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V\rho\mathrm{d}V=\iiint_V\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathrm{d}V)=\iiint_V\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}V$$
$$=\iiint_V\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{3-43}$$

将(3－42)和(3－43)式代回(3－37)式中即得

$$\iiint_V\left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}+\frac{\partial\rho}{\partial t}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$$

积分区域 V 即控制体体积，在流场中是任取的，积分为零则必被积函数在流场中处处为零，故

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}+\frac{\partial \rho}{\partial t}=0 \tag{3-44}$$

这就是直角坐标系中的三元流动连续方程式，它也有两种简化的特例。

［**特例1**］ 定常流动简化为

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}=0 \tag{3-45}$$

［**特例2**］ 不可压缩流动时简化为

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0 \tag{3-46}$$

在以上三个方程式中，如果取消等号左端的第三项，则成为直角坐标系中的二元流动(亦称平面流动)的连续方程式。

*2. 圆柱坐标系中的连续方程式

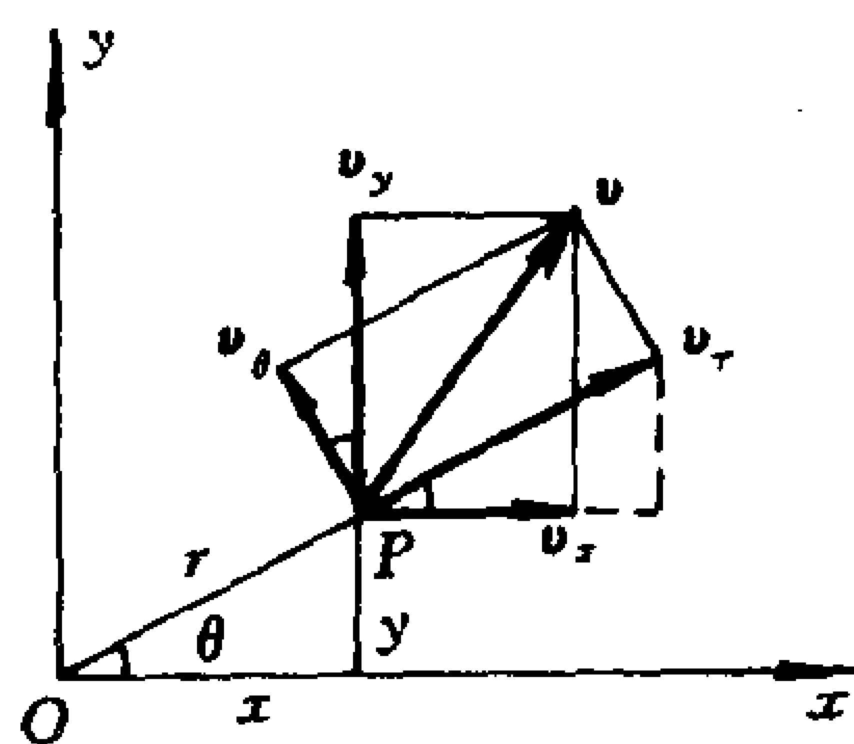


图3-12 坐标转换关系

圆柱坐标(r,θ,z)与直角坐标(x,y,z)的差别主要表现在如图3-12所示的平面上，任一点 P 的坐标关系为

$$\left.\begin{aligned}x&=r\cos\theta\\y&=r\sin\theta\\z&=z\end{aligned}\right\}\quad 或 \quad \left.\begin{aligned}r&=\sqrt{x^2+y^2}\\\theta&=\arctan\frac{y}{x}\\z&=z\end{aligned}\right\} \tag{3-47}$$

因为

$$\left.\begin{aligned} v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\ v_r=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t},v_\theta=\frac{r\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \end{aligned}\right\} \tag{3-48}$$

故由(3－47)式可得这两种坐标系中的速度关系为

$$\left.\begin{aligned} v_x&=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\cos\theta)=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\cos\theta-\frac{r\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\sin\theta \\ &=v_r\cos\theta-v_\theta\sin\theta \\ v_y&=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\sin\theta)=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\sin\theta+\frac{r\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\cos\theta \\ &=v_r\sin\theta+v_\theta\cos\theta \end{aligned}\right\} \tag{3-49}$$

流场中任一物理量 N 对 x,y 的偏导数，亦可利用(3－47)式写成

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial N}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{\partial N}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial N}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{r} \\ \frac{\partial N}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial r}\sin\theta+\frac{\partial N}{\partial\theta}\frac{\cos\theta}{r} \end{aligned}\right\} \tag{3-50}$$

令 $N=\rho v_x=\rho(v_r\cos\theta-v_\theta\sin\theta)$，代入(3－50)的第一式中可得$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}$；再令 $N=\rho v_y=\rho(v_r\sin\theta+v_\theta\cos\theta)$，代入(3－50)的第二式中可得$\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}$。将这两个结果一同代入(3－44)式中，经过稍微繁琐但并不困难的数学推演，于是(3－44)式即可改写为圆柱坐标系中的连续方程式

$$\frac{\partial(\rho v_r)}{\partial r}+\frac{\partial(\rho v_\theta)}{r\partial\theta}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}+\frac{\rho v_r}{r}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \tag{3-51}$$

［**特例1**］ 定常流动时简化为

$$\frac{\partial(\rho v_r)}{\partial r}+\frac{\partial(\rho v_\theta)}{r\partial\theta}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}+\frac{\rho v_r}{r}=0 \tag{3-52}$$

［**特例2**］ 不可压缩流动时简化为

$$\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{\partial v_\theta}{r\partial\theta}+\frac{\partial v_z}{\partial z}+\frac{v_r}{r}=0 \tag{3-53}$$

如果用于二元流动，则应取消这一组公式中等号左边的第三项。

*§3－4 流体微元的运动分析

三元流动的连续方程式提供了为使流体呈现连续状态时质点速度各分量之间所必须保持的关系，但并没有说明在这种关系支配之下的质点速度究竟可能包含一些什么样的运动成分。本节将进一步分析质点运动的组成部分，一方面便于对流体运动进行分类研究，一方面也为下一节流体内的应力分析奠定基础。

一、流体微元的速度分解公式

在流场中取流体微元如图 3－13 所示，设微元质量中心 $A(x,y,z)$点在某瞬时的速度为$\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}$，与 A 相距极近

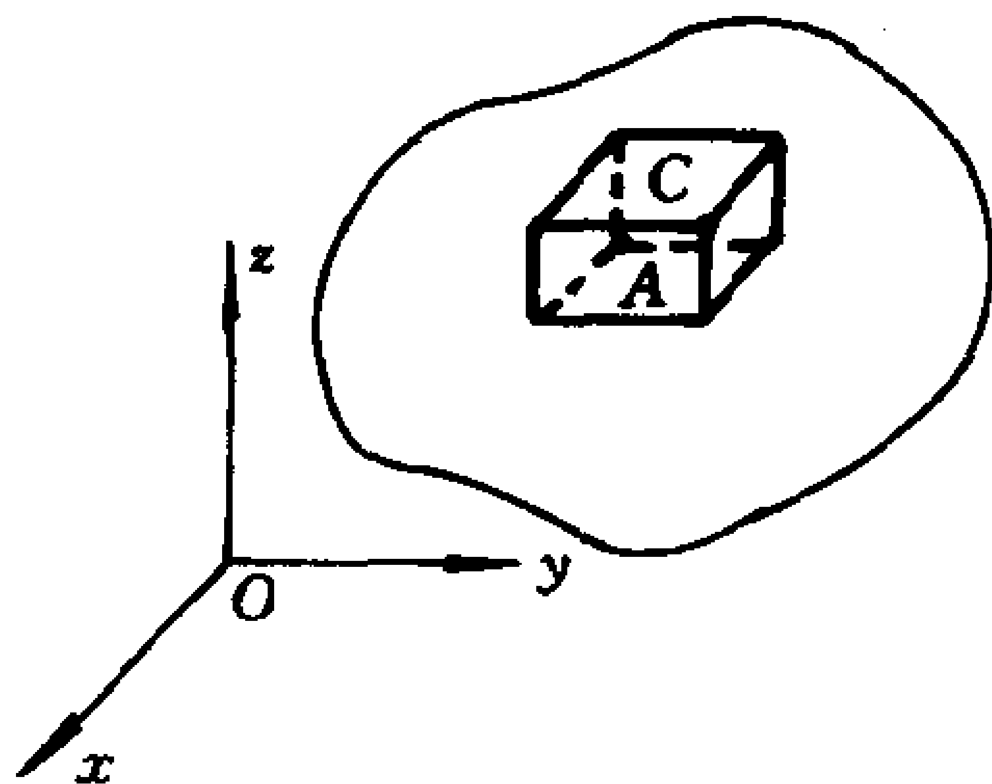


图 3－13 流体微元

的$C(x+\mathrm{d}x,y+\mathrm{d}y,z+\mathrm{d}z)$点在同一瞬时的速度可用略去二阶以上无穷小量的泰勒公式表示为

$$\left.\begin{aligned} v_x' &= v_x+\frac{\partial v_x}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v_x}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial v_x}{\partial z}\mathrm{d}z \\ v_y' &= v_y+\frac{\partial v_y}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v_y}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial v_y}{\partial z}\mathrm{d}z \\ v_z' &= v_z+\frac{\partial v_z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v_z}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial v_z}{\partial z}\mathrm{d}z \end{aligned}\right\} \qquad (3-54)$$

在第一式中人为地增加$\pm\frac{1}{2}\frac{\partial v_y}{\partial x}\mathrm{d}y\pm\frac{1}{2}\frac{\partial v_z}{\partial x}\mathrm{d}z$ 四项，并将式

中的最末两项也改写成带$\frac{1}{2}$系数的四项，于是第一式变成

$$v_x' = v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x}dx + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)dy + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)dz$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)dz - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)dy$$

按类似方法可将 v_y' 及 v_z' 也写成类似的形式。

用表 3－2 中的符号，简化可得

$$\left.\begin{aligned} v_x' &= v_x + \theta_{xx}dx + \varepsilon_{xy}dy + \varepsilon_{xz}dz + \omega_y dz - \omega_z dy \\ v_y' &= v_y + \theta_{yy}dy + \varepsilon_{yz}dz + \varepsilon_{yx}dx + \omega_z dx - \omega_x dz \\ v_z' &= v_z + \theta_{zz}dz + \varepsilon_{zx}dx + \varepsilon_{zy}dy + \omega_x dy - \omega_y dx \end{aligned}\right\} \quad (3-55)$$

此式即是流体微元的速度分解公式，亦称亥姆霍兹(Helmholtz)速度分解定理。

表 3－2　流体微元速度分解公式中的符号

$\theta_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x}$	$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)$	$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)$
$\theta_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y}$	$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right)$	$\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)$
$\theta_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z}$	$\varepsilon_{zx} = \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)$	$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$

二、流体微元运动的三种形式

从形式上看；速度分解定理把比较简单的(3－54)式变为(3－55)式，结果反而更复杂了。但这不是没有原因的。这样分解以后，我们需要考察公式(3－55)中各种符号的物理意义，然后才有可能深入理解亥姆霍兹定理的内容和价值。

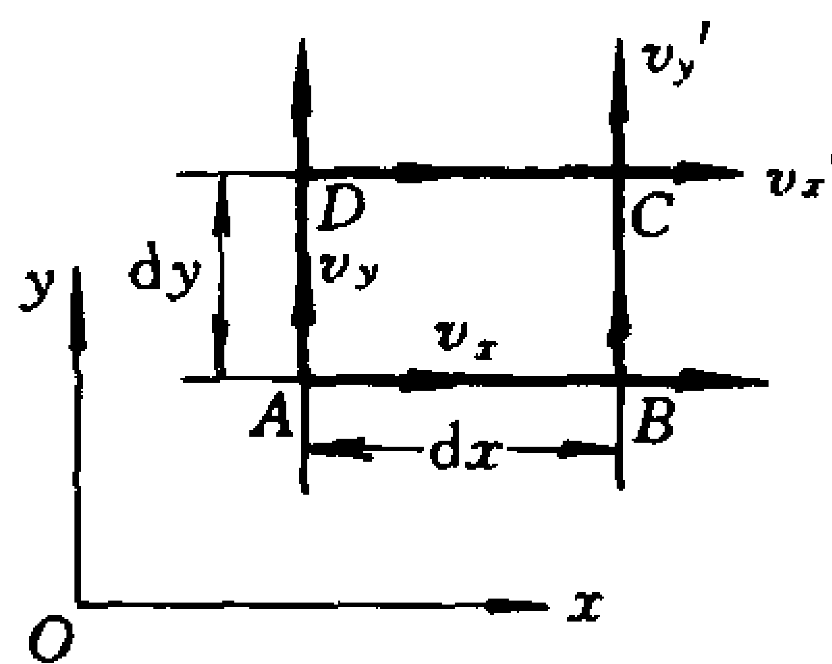


图 3－14　微元的平面运动

为了说明(3－55)式中各项符号的含义，无需引用空间流动的复杂情况，只要分析一下图 3－14 所示的平面流

动就够了。因为：$v_z=0, \mathrm{d}z=0$，故 A 点的速度只有 v_x、v_y 两个分量；而 C 点的速度则可由(3－55)式化简为平面运动的速度分解公式：

$$\left.\begin{aligned} v_x' &= v_x + \theta_{xx}\mathrm{d}x + \varepsilon_{xy}\mathrm{d}y - \omega_z\mathrm{d}y \\ v_y' &= v_y + \theta_{yy}\mathrm{d}y + \varepsilon_{yx}\mathrm{d}x + \omega_z\mathrm{d}x \end{aligned}\right\} \tag{3-56}$$

可见此式也包括了表 3－2 中的各种不同符号。

1．平移运动

(3－56)式右端的第一项 v_x、v_y，说明 C 点(也代表流体微元中的任一点)有随微元质量中心 A 一起作平移运动的成分。如果 $\theta_{xx}=\theta_{yy}=\varepsilon_{xy}=\varepsilon_{yx}=\omega_z=0$，则如图 3－15(1)所示，经过 $\mathrm{d}t$ 时间后，$ABCD$ 平移到 $A'B'C'D'$ 位置，微元形状不变。v_x、v_y 称为微元的平移速度。

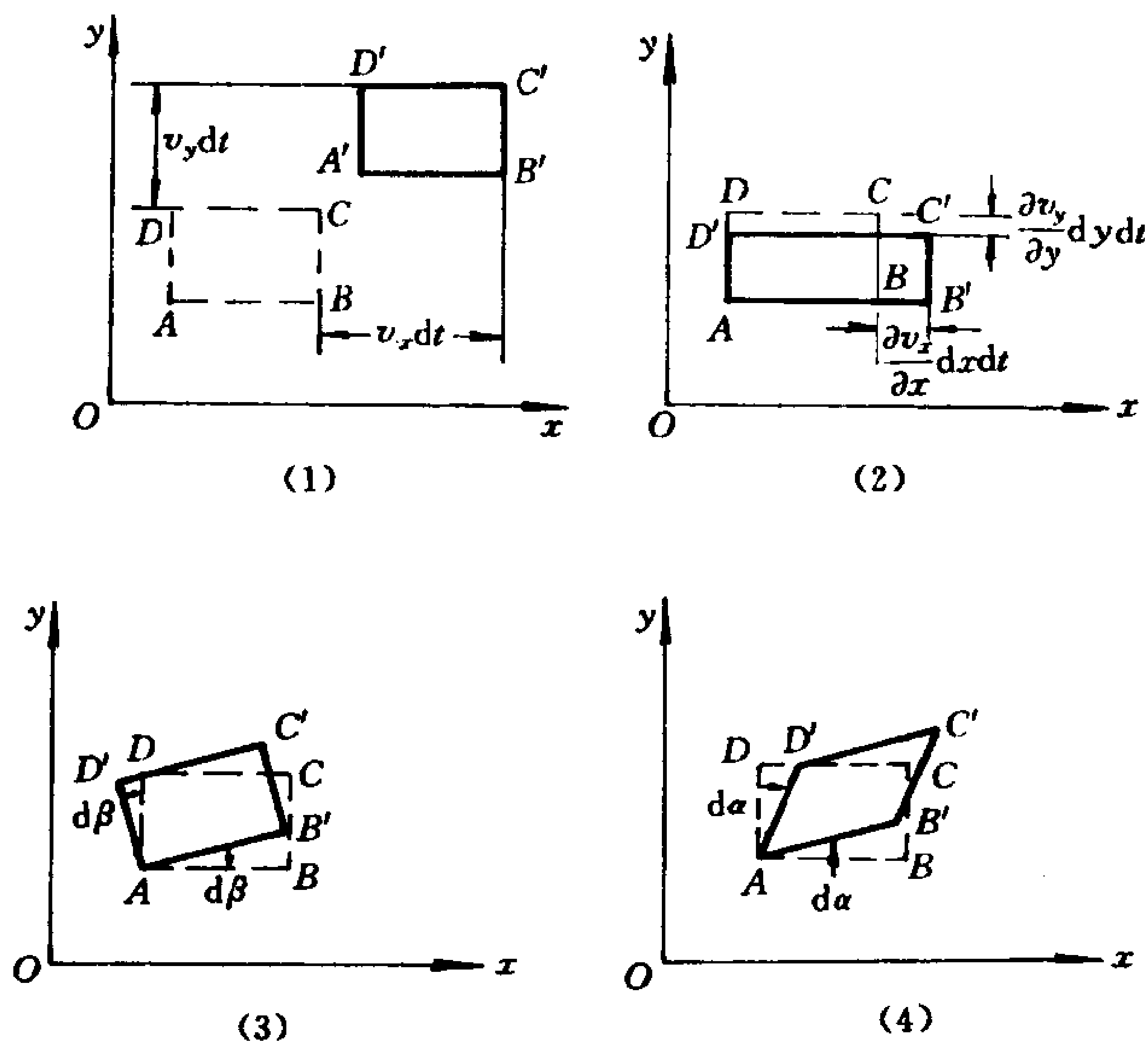


图 3－15　流体微元的各种运动形式

2．直线变形运动

$\theta_{xx}=\dfrac{\partial v_x}{\partial x}$的物理意义是 v_x 沿 x 方向的变化率，$\theta_{xx}\mathrm{d}x$ 是 C、A 两点(也代表 CB,DA 两条线)的 x 方向分速度的变化量。$\theta_{yy}\mathrm{d}y$ 是 C、A 两点(也代表 CD、BA 两条线)的 y 方向分速度的变化量。在不可压缩流体中$\dfrac{\partial v_x}{\partial x}+\dfrac{\partial v_y}{\partial y}=0$，如果 $v_x=v_y=\varepsilon_{xy}=\varepsilon_{yx}=\omega_z=0$，则经过 $\mathrm{d}t$ 时间后 $ABCD$ 变成如图 3-15(2)所示的 $AB'C'D'$形状。

这种运动称为微元的直线变形运动，于是 θ_{xx}，θ_{yy}，θ_{zz}称为直线应变速度，$\theta_{xx}\mathrm{d}x$，$\theta_{yy}\mathrm{d}y$，$\theta_{zz}\mathrm{d}z$ 则称为微元的直线变形速度。

3. 旋转运动与剪切变形运动

$\dfrac{\partial v_x}{\partial y}$是 v_x 沿 y 方向的变化率，也叫作 v_x 沿 y 方向的速度梯度；

$\dfrac{\partial v_y}{\partial x}$是 v_y 沿 x 方向的变化率，也叫作 v_y 沿 x 方向的速度梯度；

$\dfrac{\partial v_x}{\partial y}\mathrm{d}y$ 是 C、A 两点(也代表 CD，AB 两条线)的 x 方向分速度的变化量；

$\dfrac{\partial v_y}{\partial x}\mathrm{d}x$ 是 C、A 两点(也代表 CB，AD 两条线)的 y 方向分速度的变化量。

由于这两个速度梯度的存在，如果 $v_x=v_y=\theta_{xx}=\theta_{yy}=0$，则经过 $\mathrm{d}t$ 时间后，如图 3-16 所示，$ABCD$ 要变成 $AB''C''D''$的形状，由此得

$$\mathrm{d}\theta_1=\tan\mathrm{d}\theta_1=\frac{BB''}{AB}=\frac{\dfrac{\partial v_y}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial v_y}{\partial x}\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}\theta_2=\tan\mathrm{d}\theta_2=\frac{DD''}{AD}=\frac{\dfrac{\partial v_x}{\partial y}\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}=\frac{\partial v_x}{\partial y}\mathrm{d}t$$

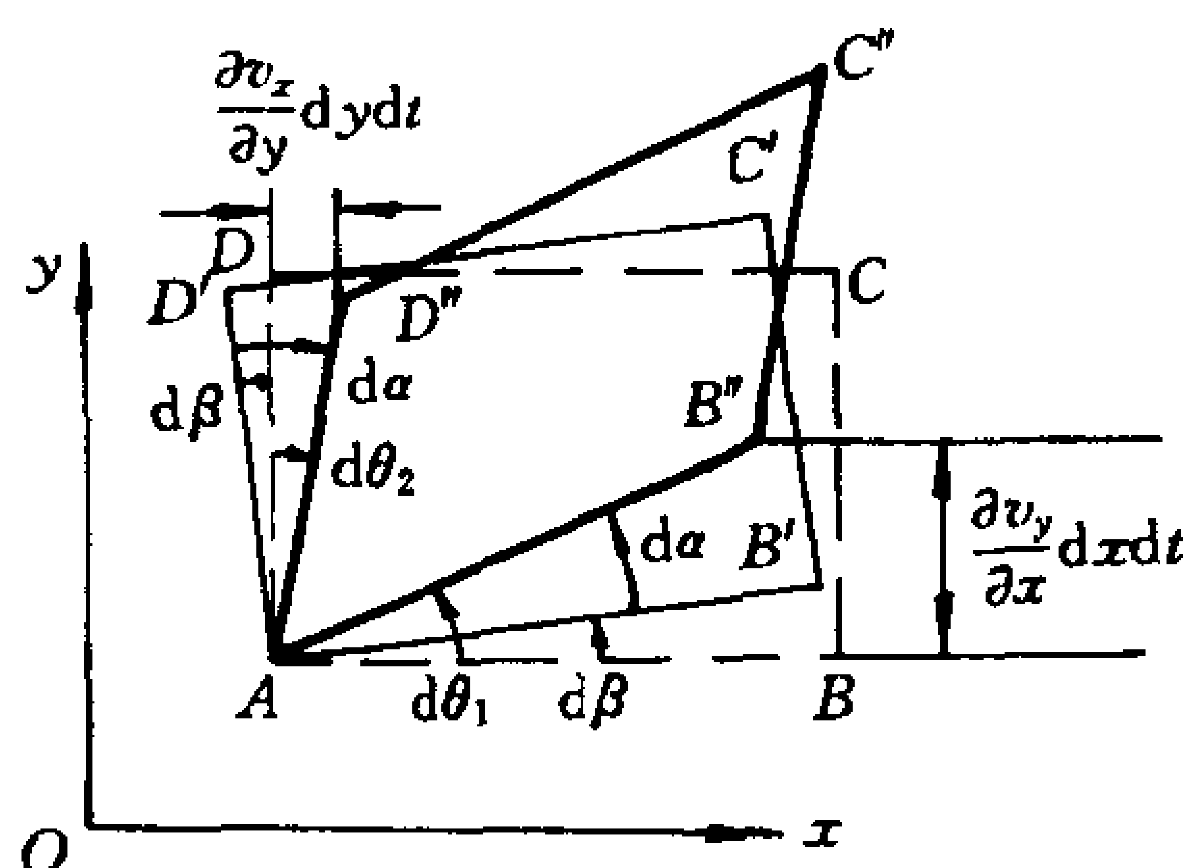


图 3-16　微元的旋转与剪切变形

一般情况下，如果

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} \neq \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

则 $\mathrm{d}\theta_1 \neq \mathrm{d}\theta_2$。假定 $\mathrm{d}\theta_1 > \mathrm{d}\theta_2$，则令

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}(\mathrm{d}\theta_1 - \mathrm{d}\theta_2) = \mathrm{d}\alpha \\ \frac{1}{2}(\mathrm{d}\theta_1 + \mathrm{d}\theta_2) = \mathrm{d}\beta \end{aligned}\right\} \tag{3-57}$$

于是

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}\theta_1 = \mathrm{d}\alpha + \mathrm{d}\beta \\ \mathrm{d}\theta_2 = \mathrm{d}\alpha - \mathrm{d}\beta \end{aligned}\right\} \tag{3-58}$$

这就是说两个不相等的角度 $\mathrm{d}\theta_1$ 与 $\mathrm{d}\theta_2$ 总可以用如(3-57)式所示的另外两个角度(即 $\mathrm{d}\alpha$ 与 $\mathrm{d}\beta$)的和与差来表示，于是可以设想 $ABCD$ 先整体同向旋转一个 $\mathrm{d}\beta$ 角变成 $AB'C'D'$，然后互相垂直的两边再反向各自剪切一个 $\mathrm{d}\alpha$ 角，于是 $AB'C'D'$ 最终就会变成原来由 $\mathrm{d}\theta_1$ 及 $\mathrm{d}\theta_2$ 所决定的 $AB''C''D''$ 的形状了。

因此从(3-57)式可解出

微元整体的旋转角

$$\mathrm{d}\beta = \frac{1}{2}(\mathrm{d}\theta_1 - \mathrm{d}\theta_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\mathrm{d}t$$

微元一个边的剪切角

$$\mathrm{d}\alpha=\frac{1}{2}(\mathrm{d}\theta_1+\mathrm{d}\theta_2)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\mathrm{d}t$$

微元整体的剪切角

$$\mathrm{d}\gamma=2\mathrm{d}\alpha=\mathrm{d}\theta_1+\mathrm{d}\theta_2=\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\mathrm{d}t$$

于是可得

微元整体的旋转角速度

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)=\omega_z$$

微元一个边的剪切角速度

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)=\varepsilon_{xy} \qquad (3-59)$$

微元整体的剪切角速度

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}=2\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)=2\varepsilon_{xy}$$

由此可见当 $v_x=v_y=\theta_{xx}=\theta_{yy}=\varepsilon_{xy}=\varepsilon_{yx}=0$ 时，经过 $\mathrm{d}t$ 时间，$ABCD$ 发生旋转运动变成如图 3－15(3)所示的 $AB'C'D'$ 形状。

当 $v_x=v_y=\theta_{xx}=\theta_{yy}=\omega_z=0\left(\text{也就是}\frac{\partial v_y}{\partial x}=\frac{\partial v_x}{\partial y},\mathrm{d}\theta_1=\mathrm{d}\theta_2\text{的特殊情况}\right)$时，经过 $\mathrm{d}t$ 时间，$ABCD$ 发生剪切变形运动变成如图 3－15(4)所示的 $AB'C'D'$ 形状。

因为 ω_z 的物理意义是微元整体绕通过 A 点之 z 轴的旋转角速度，ε_{xy} 的物理意义是微元一个边绕通过 A 点之 z 轴的剪切变形角速度。故(3－56)第一式中的 $\omega_z\mathrm{d}y$ 及 $\varepsilon_{xy}\mathrm{d}y$ 两项自然是代表由于这两个角速度而引起的 C 点在 x 方向上的线速度，同样第二式中的 $\omega_z\mathrm{d}x$ 及 $\varepsilon_{yx}\mathrm{d}x$ 则是这两个角速度所引起的 C 点在 y 方向上的线速度了。

公式(3－55)与(3－56)中的符号是类似的，按平面运动中的

θ_{xx}，θ_{yy}，ω_z，ε_{xy}的物理意义，类推到空间运动，自然速度分解公式中的全部符号的物理意义我们也都是清楚的了。

表 3－2 中代表变形运动的符号，统称为微元的应变速度，应变速度的九个元素组成一个沿 $\theta_{xx}-\theta_{zz}$ 主对角线成对称的应变速度矩阵：

$$\begin{pmatrix} \theta_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \theta_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \theta_{zz} \end{pmatrix} \tag{3-60}$$

亥姆霍兹定理说明：一般情况下流体微元运动是由平移、变形（包括直线变形与剪切变形）、旋转三种运动构成的。定理的主要贡献在于找出了这三种运动的数学表达式，这为进一步对流体运动进行分类研究，对确定应力与应变速度的关系等奠定了数学分析基础。

* §3－5 实际流体的运动微分方程式（纳维－斯托克斯方程式）

一、作用在流体微元上的应力

在粘性不起作用的平衡流体中，或者在没有粘性的理想运动流体中，作用在流体微元表面上的表面力只有与表面相垂直的压应力（压强），而且压应力又具有一点上各向同性的性质。但是在运动着的实际流体中取出边长 dx、dy、dz 的六面体微元，由于粘性影响，当微元有剪切变形时，作用在微元体 $ABCDEFGH$（如图 3－21）上的表面力就不仅有压应力 p，而且也有切应力 τ。当微元有直线变形时，一点上的压应力也不再具有各向同性的性质了。因为每个微元表面上的表面力都有三个分量，故而实际流体中一点，例如图中的 $A(x、y、z)$点上的应力可用九个元素组成的一个应力矩阵

$$\begin{pmatrix} p_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & p_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix} \tag{3-61}$$

来代表。从下面的(3－64)式可以看到应力矩阵的元素沿 p_{xx}－p_{zz}主对角线也是对称的。

应力的第一个下标表示应力作用面的法线方向，第二个下标表示应力的方向。将它们分别标注在包含 A 点在内的三个微元表面上，则如图 3－17 所示。这里假定外界对微元这三个表面的法向应力都沿坐标的正向，切向应力都沿坐标的负向。

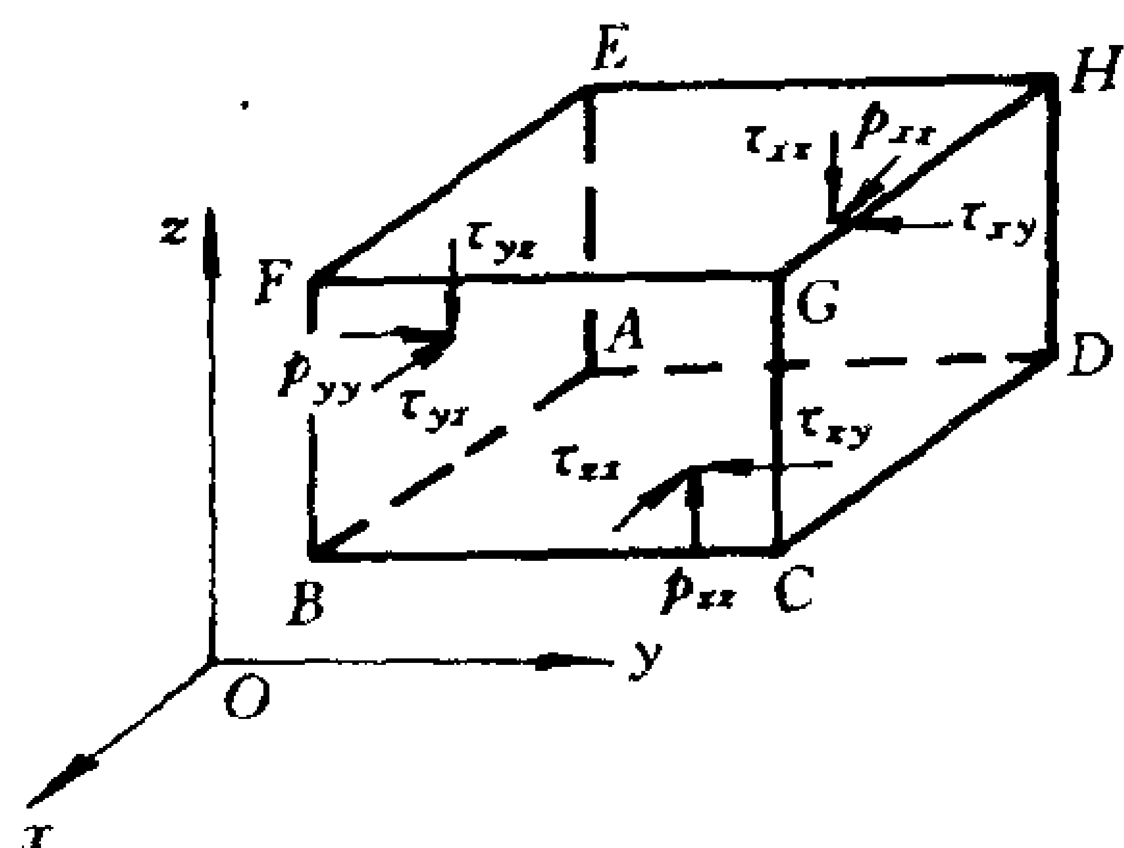


图 3－17　流体微元上的应力

二、本构方程

确定应力与应变速度关系的方程式叫作本构方程。建立牛顿流体本构方程的依据就是第一章所叙述的牛顿内摩擦定律。当流体两层速度不同时，作用在流体上的切应力大小等于动力粘度乘以速度梯度，即(1－22)式

$$\tau = \pm \mu \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$$

式中的"±"号为了保持切应力 τ 的正值。现在利用图 3－18，不难看到，由于速度梯度存在，经 $\mathrm{d}t$ 时间后，原来的矩形微元发生剪切变形成为平行四边形，其剪切角为

$$\mathrm{d}\gamma \approx \tan \mathrm{d}\gamma = \frac{\mathrm{d}v\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}$$

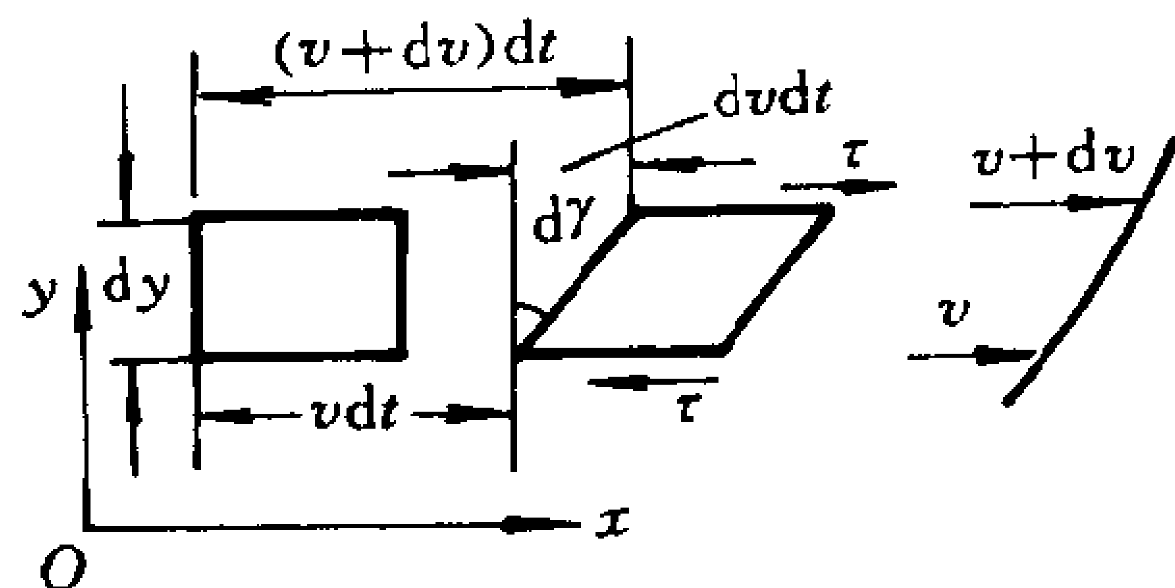


图 3-18　牛顿内摩擦定律

所以
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} \tag{3-62}$$

即速度梯度等于剪切变形的角速度，于是牛顿内摩擦定律又可写成

$$\tau=\pm\mu\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}=\pm\mu\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} \tag{3-63}$$

再联系到§3-4中的流体微元运动分析，如图3-19(1)所示，我们已经知道微元一个边的剪切角速度为

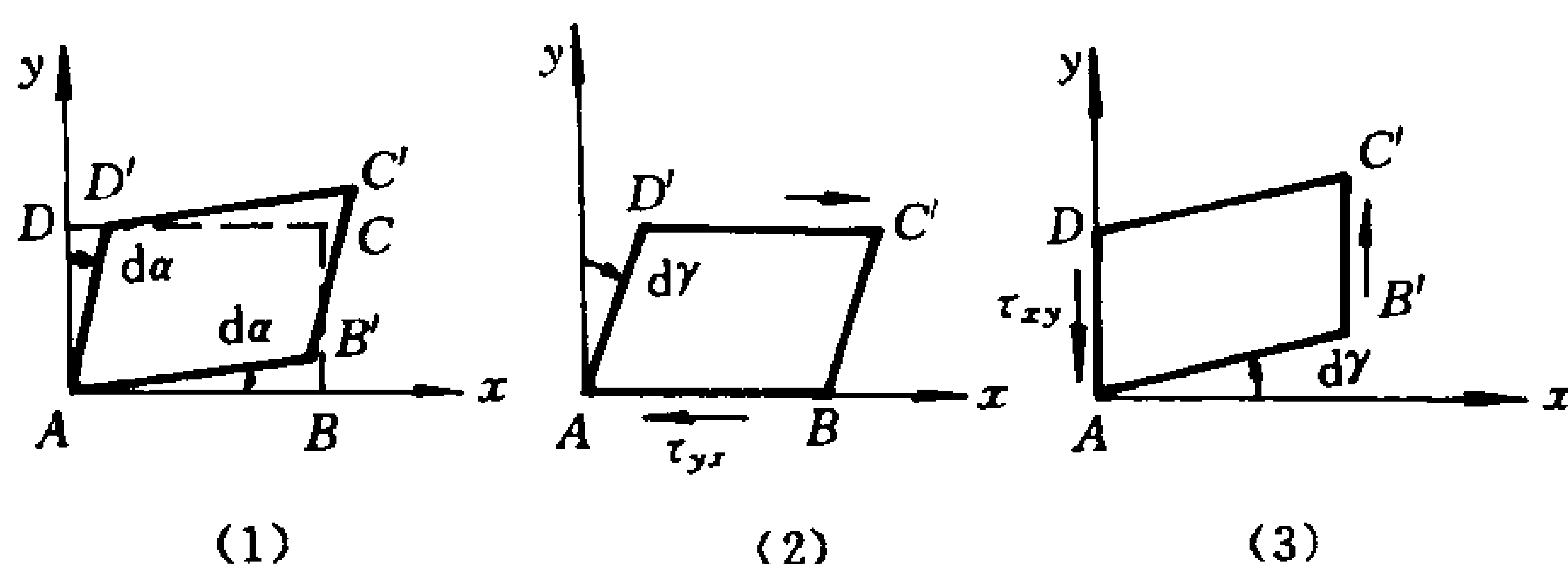


图 3-19　剪切变形与切应力

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)=\varepsilon_{xy}$$

微元整体的剪切角速度为

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}=2\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}=2\varepsilon_{xy}=\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

将(1)图绕A点旋转成(2)图或(3)图，则形成与图3-18相同的剪切运动形式，因而按(3-63)式可得出下面的第一个式子，

在其他方向类推则有其余二式，即

$$\left.\begin{aligned}\tau_{xy}=\tau_{yx}=2\mu\varepsilon_{xy}=\mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\\\tau_{yz}=\tau_{zy}=2\mu\varepsilon_{yz}=\mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\\\tau_{zx}=\tau_{xz}=2\mu\varepsilon_{zx}=\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\end{aligned}\right\}\qquad(3-64)$$

这就是剪切应力与剪切应变速度的关系式，实际上它也就是牛顿流体的牛顿内摩擦定律在空间三元运动情况下的推广。流体运动时在内部产生的切应力是阻碍流体剪切变形的。其实流体的粘性不只对剪切变形有阻碍作用，它对流体运动中的直线变形同样也有阻碍作用。下面我们分析一下法向应力与直线变形速度之间的关系。

如图 3-20 所示，当 $ABCD$ 经过 $\mathrm{d}t$ 时间变成 $AB'C'D'$ 时，微元体在 x 方向拉长，必遇到 x 方向的粘性阻力阻止其拉长。微元体在 y 方向缩短，亦必遇到 y 方向的粘性阻力阻止其缩短。这种由于粘性而引起的沿微元体表面法向作用的应力 p'_{xx} 和 p'_{yy}（还有 p'_{zz}）的大小必然与各该方向的直线应变速度有关，而方向与直线变形的方向相反。因而按照剪切应力与剪切应变速度的关系式(3-64)可以类似地写出

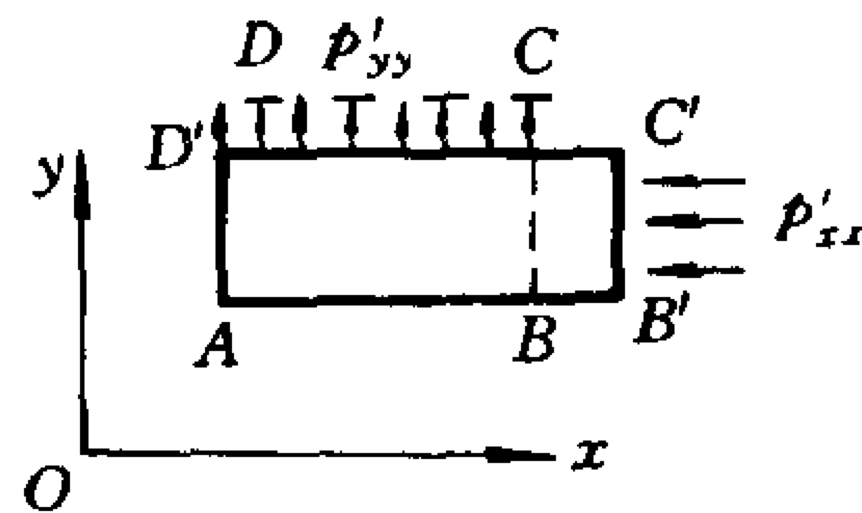


图 3-20 直线变形与各向异性压强

$$\left.\begin{aligned}p'_{xx}=-2\mu\theta_{xx}=-2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x}\\p'_{yy}=-2\mu\theta_{yy}=-2\mu\frac{\partial v_y}{\partial y}\\p'_{zz}=-2\mu\theta_{zz}=-2\mu\frac{\partial v_z}{\partial z}\end{aligned}\right\}\qquad(3-65)$$

有些书上对此式列有详尽的证明，限于篇幅这里从略了。由

(3－65)式可以看出，由于各个方向的直线应变速度不见得相等，因而这种由于粘性阻碍作用所产生的法向应力也是各向不等的，p'_{xx}、p'_{yy}、p'_{zz}统称为一点上的各向异性压强。

于是在实际流体运动时，一点上的法向应力除了由于分子运动统计平均的各向同性压强 p 之外，还需加上由于粘性影响而与直线变形有关的各向异性压强，最后可以得到法向应力与直线应变速度之间的关系为

$$\left.\begin{aligned} p_{xx} &= p + p'_{xx} = p - 2\mu\theta_{xx} = p - 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} \\ p_{yy} &= p + p'_{yy} = p - 2\mu\theta_{yy} = p - 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} \\ p_{zz} &= p + p'_{zz} = p - 2\mu\theta_{zz} = p - 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{3-66}$$

将(3－64)与(3－66)联合在一起，写成矩阵形式，则为

$$\begin{bmatrix} p_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & p_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & p_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} + 2\mu \begin{bmatrix} -\theta_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & -\theta_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & -\theta_{zz} \end{bmatrix} \tag{3-67}$$

这就是全面反映牛顿流体应力与应变速度关系的本构方程式。按照矩阵加法、乘法规则将对应元素展开，(3－67)式可以代替(3－64)及(3－66)两式，用矩阵表达可使后两个公式形式统一。

对于不可压缩流体来说，将(3－66)式中的三式相加，因为

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

故

$$p = \frac{1}{3}(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}) \tag{3-68}$$

此式说明一点上的各向同性压强也就是不可压缩实际流体中不同方向压强的算术平均值。这给具体计算实际流体中的压强带来很大的方便，我们无需进一步研究各向异性压强，只要找出各向同性压强与其他流动参数之间的关系，则据此算出的各向同性压

强事实上也就是不可压缩实际运动流体一点上的流体动压强。

于是 p 这个符号就有三种不同的含义：

在平衡流体中，它代表一点上的流体静压强；

在理想运动流体中，它代表一点上的流体动压强；

在不可压缩实际运动流体中，它代表一点上流体动压强的算术平均值，因此它也代表一点上的流体动压强。

三、纳维－斯托克斯方程式

设图 3－17 所示流体微元的密度为 ρ，则微元质量为 $\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，有势的质量力为

$$\boldsymbol{a}_m\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=(f_x\boldsymbol{i}+f_y\boldsymbol{j}+f_z\boldsymbol{k})\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

设微元的速度为 $\boldsymbol{v}$，则质点的加速度为

$$\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

设包含 A 点在内的三个面上的九个应力如(3－61)式所示，则包含 G 点在内三个面上相对应的九个应力可用略去二阶以上无穷小量的泰勒公式表示出来。

根据牛顿第二定律 $\sum\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$，可列出微元在 x 方向上的运动方程式为

$$f_x\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+p_{xx}\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\left(p_{xx}+\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-$$

$$-\tau_{yx}\mathrm{d}x\mathrm{d}z+\left(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}z-\tau_{zx}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+$$

$$+\left(\tau_{zx}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

两边除以质量 $\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，可得

$$f_x-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}-\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}-\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right)=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$$

将(3－66)与(3－64)式中的 p_{xx}、τ_{yx} 及 τ_{zx} 表达式代入，整理，得

$$f_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2v_x}{\partial z^2}\right)$$

$$+\nu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$$

如果流体不可压缩

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0$$

于是上式等号左端最后一项可以消去。

为了化简等号左端的第三项，我们引用一个数学符号

$$\nabla^2=\nabla\cdot\nabla=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

∇^2 称为拉普拉斯算子，或标性微分算子。

于是上面的式子可以化简成(3－69)式中的第一个公式。

同理类推，又可得到其余两个，这样我们就有

$$\left.\begin{aligned}f_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\nabla^2 v_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\\f_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\nabla^2 v_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\\f_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\nabla^2 v_z=\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\end{aligned}\right\}\tag{3-69}$$

这就是不可压缩实际流体的运动微分方程式，通常称为纳维－斯托克斯方程式，或简称N－S方程。

如果是理想流体，$\nu=0$，则N－S方程式左端的第三项全为零，所得到的方程式叫作理想流体的运动微分方程式，或通称为欧拉运动方程式。

如果是平衡流体，相对于坐标系来说 $v=0$，则N－S方程式即可转化为欧拉平衡方程式。

N－S方程是表达不可压缩流体运动最全面的一个微分方程式。如果将牛顿第二定律 $\Sigma\boldsymbol{F}-m\boldsymbol{a}=0$ 理解为力的平衡关系式，则从上面推导过程中不难看到N－S方程也是作用在流体上的力平衡关系式。

在第二章中，对欧拉平衡方程式进行积分，可以得到流体平衡的完整理论；如果对理想流体的欧拉运动方程式进行积分，则在几种特定的情况下（如势流、流线上等等）也可以得出一些有意义的结果；由于实际流体中的粘性影响非常复杂，单纯用求解 N－S 方程的方法去解决各种实际问题是有困难的。而且 N－S 方程是二阶非线性非齐次的偏微分方程组，除针对具体情况用数值计算方法外，还不可能积分求普遍解。但是在一些较简单的流动情况下，由于 N－S 方程可以化简，故而 N－S 方程用于解决圆管层流、平板层流、球体的低速绕流、地下水渗流等问题时，能够得到与实验相符合的满意结果；用于分析附面层、润滑理论等问题时，能够得到一定程度的近似结果；用于研究湍流，虽有许多进展，但还不十分成功。

§3－6　伯努利方程式及其应用

伯努利方程式在工程流体力学基本理论中占有重要位置，它形式简单，意义明确，而且与实际的联系又最为密切。

一、流线上的伯努利方程式

假如单位质量的流体质点某瞬时的速度为 $\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}$。不论运动是否定常，经过 $\mathrm{d}t$ 时间，质点沿流线移动一段微小位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\mathrm{d}x\boldsymbol{i}+\mathrm{d}y\boldsymbol{j}+\mathrm{d}z\boldsymbol{k}$。为了求出单位质量流体沿这段微元流线运动时外力作功的能量关系式，可将 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 的三个投影 $\mathrm{d}x=v_x\mathrm{d}t$、$\mathrm{d}y=v_y\mathrm{d}t$、$\mathrm{d}z=v_z\mathrm{d}t$ 分别与(3－69)的三个式子相乘，然后相加，即得

$$\begin{aligned}f_x\mathrm{d}x+f_y\mathrm{d}y+f_z\mathrm{d}z-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}z\right)+\\ \nu\nabla^2v_x\mathrm{d}x+\nu\nabla^2v_y\mathrm{d}y+\nu\nabla^2v_z\mathrm{d}z\\ =v_x\mathrm{d}t\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}+v_y\mathrm{d}t\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}+v_z\mathrm{d}t\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\end{aligned}\qquad(3-70)$$

下面分别对式中的四类项进行化简。

1. 有势的质量力，可用质量力的势函数表示，则

$$f_x\mathrm{d}x + f_y\mathrm{d}y + f_z\mathrm{d}z = -\frac{\partial W}{\partial x}\mathrm{d}x - \frac{\partial W}{\partial y}\mathrm{d}y - \frac{\partial W}{\partial z}\mathrm{d}z = -\mathrm{d}W$$

2. $\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}z$ 是压强对坐标的全微分，记为 $\mathrm{d}p$，则

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}z\right) = \frac{\mathrm{d}p}{\rho}$$

3. 因为N－S方程中的 $\nu\nabla^2 v_x$、$\nu\nabla^2 v_y$、$\nu\nabla^2 v_z$ 是代表作用在单位质量流体上的粘性分力，假如它们的合力用 $\boldsymbol{f}$ 表示，则这种作用在运动流体上的粘性摩擦力 $\boldsymbol{f}$ 的方向一定与流体沿流线运动的方向（即 $\mathrm{d}s$ 的方向）相反，或者说粘性摩擦力所作的功应为负值，于是可写出

$$\nu\nabla^2 v_x\mathrm{d}x + \nu\nabla^2 v_y\mathrm{d}y + \nu\nabla^2 v_z\mathrm{d}z$$
$$= \boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = f\mathrm{d}s\cos\pi = -f\mathrm{d}s$$

4. 将导数化为微分，则

$$v_x\mathrm{d}t\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} + v_y\mathrm{d}t\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} + v_z\mathrm{d}t\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = v_x\mathrm{d}v_x + v_y\mathrm{d}v_y + v_z\mathrm{d}v_z$$
$$= \mathrm{d}\left(\frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{2}\right) = \mathrm{d}\left(\frac{v^2}{2}\right)$$

将这些结果代回(3－70)式，则可得

$$-\mathrm{d}W - \frac{\mathrm{d}p}{\rho} - f\mathrm{d}s = \mathrm{d}\left(\frac{v^2}{2}\right)$$

或

$$\mathrm{d}\left[W + \int\frac{\mathrm{d}p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \int f\mathrm{d}s\right] = 0$$

在非定常流动的情况下，方括弧中的四项之和本来是 x、y、z、t 的函数，但它们对坐标的全微分等于零，则必对 x、y、z 的三个偏导数同时为零，因此沿流线积分，所得积分常数只可能与时间有关，即

$$W + \int\frac{\mathrm{d}p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \int f\mathrm{d}s = C(t) \qquad (3-71)$$

在定常流动的情况下，积分常数则与时间无关，即

$$W+\int\frac{\mathrm{d}p}{\rho}+\frac{v^2}{2}+\int f\mathrm{d}s=C \tag{3-72}$$

在重力场、不可压缩流体的条件下，则(3-72)式变成

$$gz+\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}+\int f\mathrm{d}s=C$$

除以 g，则

$$z+\frac{p}{\rho g}+\frac{v^2}{2g}+\frac{1}{g}\int f\mathrm{d}s=C \tag{3-73}$$

或对于流线上任意两点，亦可写成

$$z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{v_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{v_2^2}{2g}+\frac{1}{g}\int_1^2 f\mathrm{d}s \tag{3-74}$$

这就是实际流体，在定常流动、重力场、不可压缩的条件下，在流线上任意两点之间成立的伯努利方程式。

如果是理想流体，其他条件不变，则(3-73)和(3-74)式变成下面的所谓理想流体伯努利方程式

$$z+\frac{p}{\rho g}+\frac{v^2}{2g}=C \tag{3-75}$$

或

$$z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{v_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{v_2^2}{2g} \tag{3-76}$$

如果流动速度为零，则由伯努利方程式又可得出平衡流体的流体静力学基本方程式

$$z+\frac{p}{\rho g}=C$$

因此，伯努利方程式中各项的物理意义也就明显了：

z 代表单位重力流体的位能，或简称位置水头。

$\frac{p}{\rho g}$代表单位重力流体的压能，或简称压强水头。

$\frac{v^2}{2g}$代表单位重力流体的动能，也简称速度水头。因

$$\frac{v^2}{2g}=\frac{\frac{1}{2}mv^2}{mg}$$

$\frac{1}{g}\int_1^2 f\mathrm{d}s$ 代表单位重力流体沿流线从 1 点流动到 2 点克服粘性阻力所作的功，或所损失的能量。

理想流体没有能量损失，于是理想流体伯努利方程式说明在理想流体中流体的总机械能（位能、压能、动能）守恒。由此可见伯努利方程式实质就是物理学能量守恒定律在流体力学上的一种表现形式。

二、其它几种形式的伯努利方程式

1. 总流上的伯努利方程式

工程计算上一般并不观察哪一条流线上的流动，而是着眼于总流在过流断面上的平均值，因此伯努利方程式中的各项如以过流断面上的平均值表示，则更有实际价值。

在§3－2中已经定义，过流断面上的平均速度为 $\bar{v}=\frac{q_V}{A}$，过流断面上单位重力流体的平均动能为$\frac{\alpha\bar{v}^2}{2g}$（$\alpha$ 称为动能修正系数）。

因为过流断面是与流线上的速度方向成正交的断面，故而在过流断面上没有任何速度分量。如果令 x 轴与过流断面相垂直，则在 Oyz 的过流断面上，N－S 方程（3－69）的第二、三式变成

$$\left.\begin{aligned} f_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=0\\ f_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=0 \end{aligned}\right\}$$

这说明在过流断面上的流体压强应该符合流体静力学的压强分布规律

$$z+\frac{p}{\rho g}=C$$

即过流断面上任何一点的位能与压能之和都等于同一个常数，于

是过流断面上任何一点的 $z+\frac{p}{\rho g}$都代表断面上的平均值。

最后用 $h_f=\frac{\frac{1}{g}\int_1^2 f\mathrm{d}s\cdot\rho g\mathrm{d}q_V}{\rho g q_V}$ 代表总流上1、2两个过流断面之间单位重力流体的平均能量损失，则实际流体总流上的伯努利方程式即可写成

$$z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{\alpha\bar{v}_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{\alpha\bar{v}_2^2}{2g}+h_f \tag{3-77}$$

式中 h_f 的计算方法将在第五章中详细介绍。如果不计损失，则得理想流体总流上的伯努利方程式为

$$z+\frac{p}{\rho g}+\frac{\alpha\bar{v}^2}{2g}=C \tag{3-78}$$

或

$$z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{\alpha\bar{v}_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{\alpha\bar{v}_2^2}{2g} \tag{3-79}$$

但是在过流断面上速度分布比较均匀时(管中水流多数属于这种情况)动能修正系数 $\alpha\approx1$，总流与流线上的伯努利方程式在形式上就没有区别了。

2. 绝热和等熵气流的伯努利方程式

气流的质量力较小，因而在气体的流动过程中，位能或者位能的变化一般均忽略不计。绝热气流一般可分为两种。一种是不可逆的绝热气流，流动中有摩擦，摩擦所生的热量虽然不外传，但只能使气流的熵增加而不能再全部变成气流的有用功。实际流体的流动过程即使绝热，也永远是不可逆的。

再一种就是可逆的绝热气流(亦称为等熵气流)这是一种实际达不到的理想过程。

不论可逆、不可逆，只要绝热，则有绝热方程式 $\frac{p}{\rho^\gamma}=C$ 成立，式中 γ 称为绝热指数，于是(3－72)式中的第二项可以写成

$$\int \frac{\mathrm{d}p}{\rho} = \int \frac{\mathrm{d}p}{\left(\frac{p}{C}\right)^{\frac{1}{\gamma}}} = C^{\frac{1}{\gamma}}\int p^{-\frac{1}{\gamma}}\mathrm{d}p = \frac{p^{\frac{1}{\gamma}}}{\rho}\left[\frac{p^{-\frac{1}{\gamma}+1}}{-\frac{1}{\gamma}+1}\right]$$

$$= \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} \tag{3-80}$$

代回(3-72)式，略去 W，则不可逆绝热气流的伯努利方程式为

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \int f\mathrm{d}s = C \tag{3-81}$$

或

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + \frac{1}{g}\int f\mathrm{d}s = C \tag{3-82}$$

等熵(可逆绝热)气流的伯努利方程式为

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = C \tag{3-83}$$

或

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = C \tag{3-84}$$

从机械能守恒的观点来看，可逆和不可逆绝热是有区别的，但是如果从包括机械能和热能在内的总能量守恒观点来看，这两者并无区别，这情况在§8-3中再进一步加以说明。

3. 相对运动的伯努利方程式

流体在叶轮机械(离心水泵，压气机和通风机、水轮机、汽轮机等)中的流动，一方面具有随叶轮旋转的牵连速度 $\boldsymbol{u}$，一方面又具有对叶片的相对速度 $\boldsymbol{w}$，其合成速度 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}$ 叫作流体的绝对速度。

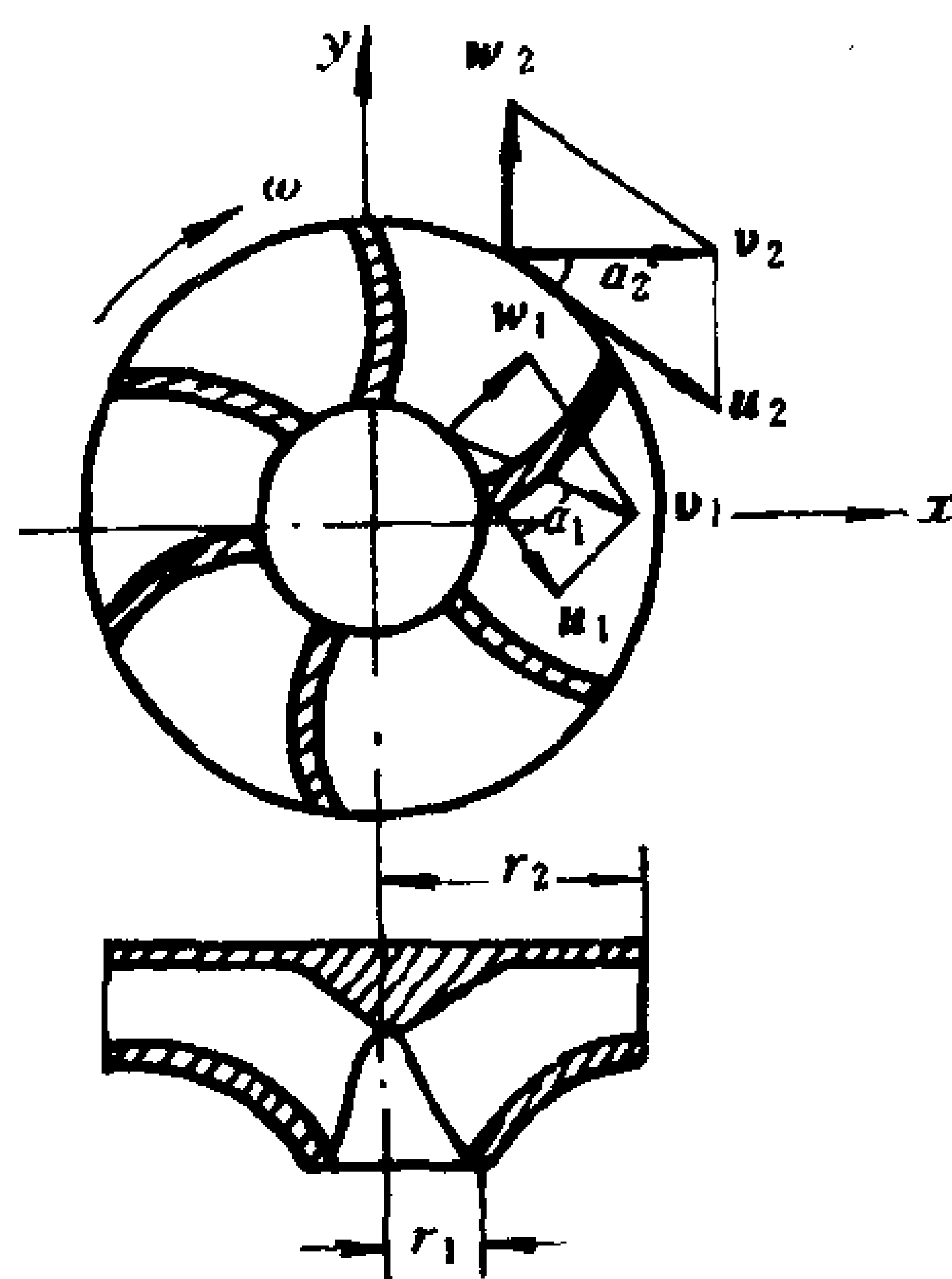


图3-21 离心式叶轮机

将坐标固结于旋转叶轮上(如图 3－21),如果叶轮的角速度为 ω,则流体的单位质量力为

$$\left.\begin{aligned} f_x &= \omega^2 x \\ f_y &= \omega^2 y \\ f_z &= -g \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{aligned} dW &= -\left(\frac{\partial W}{\partial x}dx + \frac{\partial W}{\partial y}dy + \frac{\partial W}{\partial z}dz\right) \\ &= g dz - (\omega^2 x dx + \omega^2 y dy) \end{aligned}$$

$$W = gz - \frac{\omega^2 r^2}{2} = gz - \frac{u^2}{2}$$

以此代入(3－72)式中,并将原来沿流线的速度 v 改换成相对速度 w,对于不可压缩的理想流体来说,则有

$$gz - \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \frac{w^2}{2} = C \qquad (3-85)$$

对于叶片的入口 1 及出口 2,则有

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{w_1^2}{2g} - \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{w_2^2}{2g} - \frac{u_2^2}{2g} \qquad (3-86)$$

(3－85)及(3－86)式就是理想不可压缩流体定常流动情况下的相对运动伯努利方程式。它主要用于离心泵和水轮机理论中。

在水泵方面,通常叶轮出口与入口单位重力流体所具有的总机械能之差称为水泵叶轮的扬程 H,它是衡量叶轮工作性能的一个重要参数,按照定义

$$H = \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}\right) - \left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g}\right) \qquad (3-87)$$

利用(3－86)式可得扬程的第二种表达式为

$$H = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + \frac{w_1^2 - w_2^2}{2g} + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} \qquad (3-88)$$

再利用 u、v、w 组成的所谓入口与出口速度三角形上的余弦定理 $u^2 + v^2 - w^2 = 2uv\cos\alpha$($\alpha$ 为 u 与 v 之间的夹角)可得扬程的第三种表达式为

$$H = \frac{1}{g}(v_2 u_2 \cos \alpha_2 - v_1 u_1 \cos \alpha_1) \tag{3-89}$$

此式称为叶轮机工作的基本方程式，也称为叶轮机的欧拉方程式。

以上三种扬程公式在说明叶轮机工作原理方面都有重要价值。

三、伯努利方程式的应用

1. 皮托管

皮托(Pitot)管是将流体动能转化为压能、从而通过测压计测定流体运动速度的仪器。

图 3－22 是用弯成直角形状的细管所作成的最简单的皮托管。它的开口端正对着明渠水流的流动方向，水流冲击使皮托管中水柱上升。水流速度不变时，水柱上升至 $H+h$ 后也不变，皮托管内的流体呈现平衡状态。设皮托管口前 1 点速度为 v，压强为 $p=\rho gH\left(\text{如果在 1 点处立一个测压管，则测压管中的静压水头为}\frac{p}{\rho g}=H\right)$。皮托管口后的 2 点是速度为零的驻点，其压强 $p_0=\rho g(H+h)$也称为驻点压强，此时皮托管中的水柱高 $\frac{p_0}{\rho g}=H+h$ 也称为总水头。

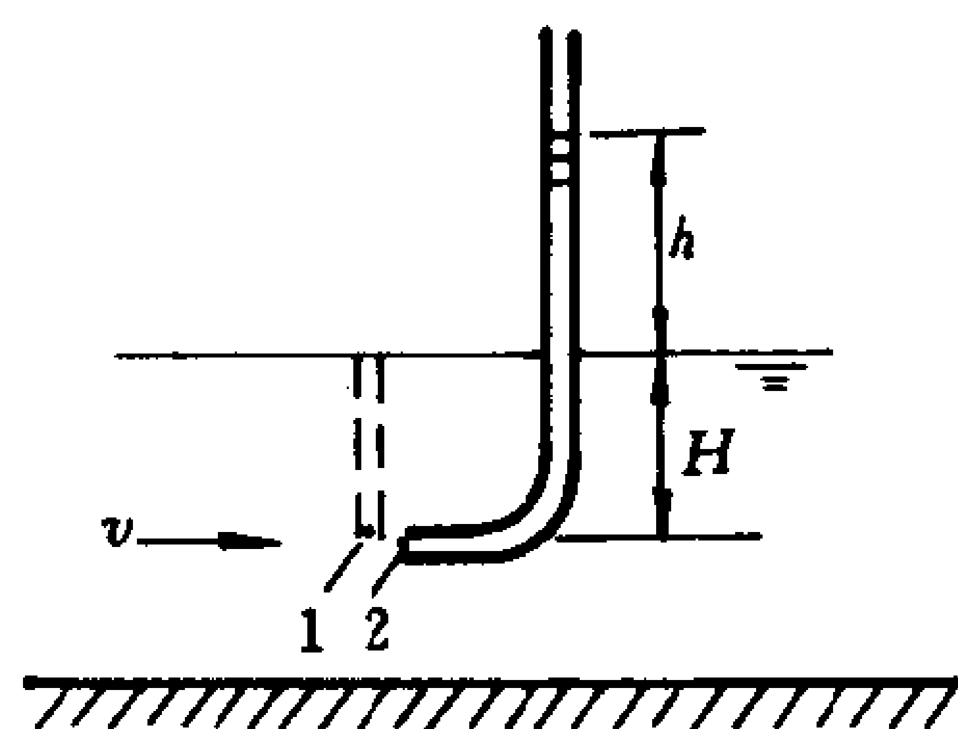


图 3－22 皮托管

对 1、2 两点列伯努利方程式，可得

$$\frac{p}{\rho g}+\frac{v^2}{2g}=\frac{p_0}{\rho g} \tag{3-90}$$

或

$$p+\frac{\rho v^2}{2}=p_0 \tag{3-91}$$

1、2 两点相距极近，也可以说就是处在皮托管口内外交界处的一个点，因此 p 称为一点上的静压强，$\frac{\rho v^2}{2}$ 称为一点上的动压强，p_0

称为一点上的总压强(即驻点压强),(3-91)式说明一点上的总压强等于静压强与动压强之和。

此外从(3-90)式还可得出

$$\frac{v^2}{2g}=\frac{p_0-p}{\rho g}=\frac{1}{\rho g}[\rho g(H+h)-\rho gH]=h \qquad (3-92)$$

由此可以看出$\frac{v^2}{2g}$也可以用一段水柱高表示,故$\frac{v^2}{2g}$也称为速度水头,它等于皮托管中总水头与测压管中静水头之差。

用图3-23所示的皮托管和测压管可以清楚地说明伯努利方程式的几何意义。管道中心线就是位置水头线,连接测压管水面的就是静水头线,连接皮托管水面的就是总水头线。流线不同点上的位置水头、压强水头、速度水头都是变的。但对理想流体来说,这三者之和是不变的。理想流体的总水头线是水平线。由于存在水头损失 h_f,故实际流体的总水头线是沿程逐渐下降的。

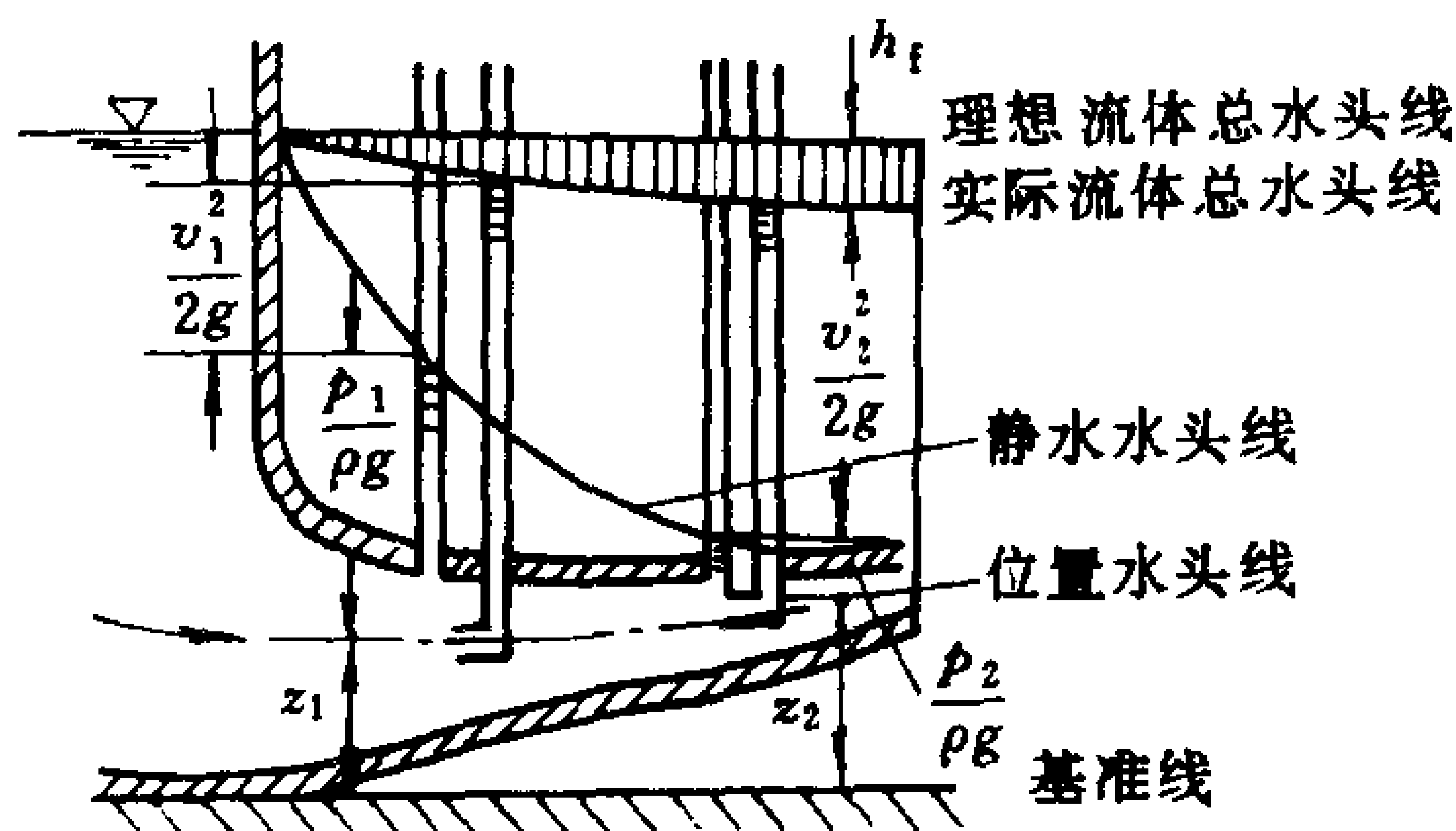


图3-23 伯努利方程式的几何意义

用皮托管测量速度的公式可由(3-92)求得

$$v=\sqrt{2g\frac{p_0-p}{\rho g}}=\sqrt{\frac{2(p_0-p)}{\rho}}=\sqrt{2gh} \qquad (3-93)$$

由于皮托管结构引起液流扰乱,故精确计算时还要对速度公式加以修正

$$v=C_v\sqrt{2gh} \qquad (3-94)$$

式中 $$C_v=\frac{v}{\sqrt{2gh}}=\frac{\text{实际速度}}{\text{理论速度}}$$

称为流速系数。一般条件下 $C_v=0.97\sim0.99$。如果皮托管制作精密，头部及尾柄对流动扰乱不大时，C_v 也可近似取为 1。

测量管道中的水流或气流速度时，皮托管需与测压管联合使用，如图 3－24 所示。由(3－93)式可得：

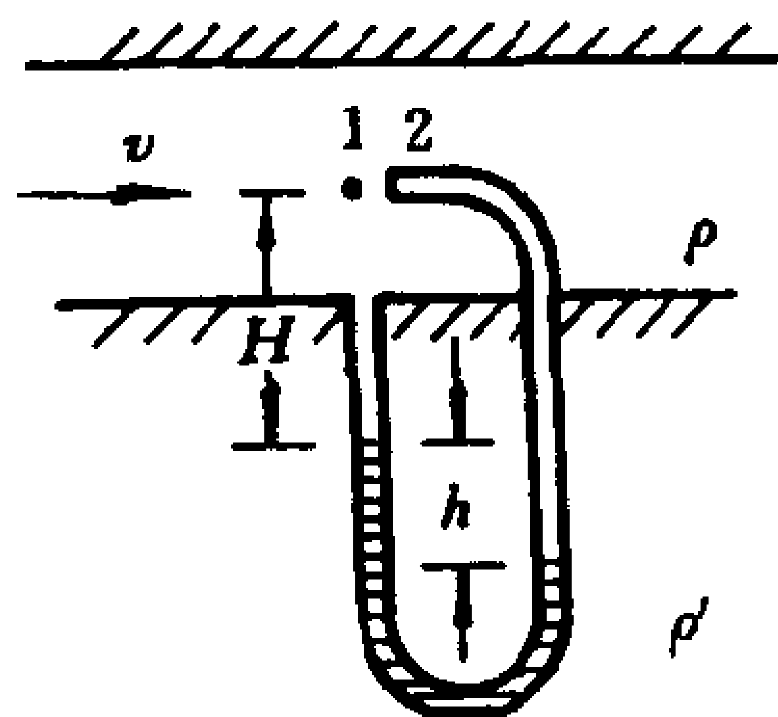


图 3－24 皮托管与测压管联合使用

$$v=\sqrt{2g\frac{p_0-p}{\rho g}}=\sqrt{2g\frac{(\rho'-\rho)hg}{\rho g}}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{\rho'-\rho}{\rho}\right)2gh} \qquad (3-95)$$

式中：ρ' 为差压计中的液体密度；

ρ 为管道中的流体密度。

如果是测量气流，则不论差压计中的液体是水或汞，均可认为 $\rho'\gg\rho$，$\rho'-\rho\approx\rho'$。

于是可得气流计算公式为

$$v=\sqrt{\frac{\rho'}{\rho}2gh} \qquad (3-96)$$

皮托管与测压管经常组合成一个整体，这种组合式皮托管，如图 3－25 所示。也称为皮托－静压管。因为有皮托管插入流体中，致使紧贴皮托管外表面处的流线上的静压强产生如图 3－25 (1)上部曲线所示的变化。皮托管头部使静压强下降，而尾柄使静压强上升，在离开头部适当距离 l 的 3 点处，其静压强与皮托管前

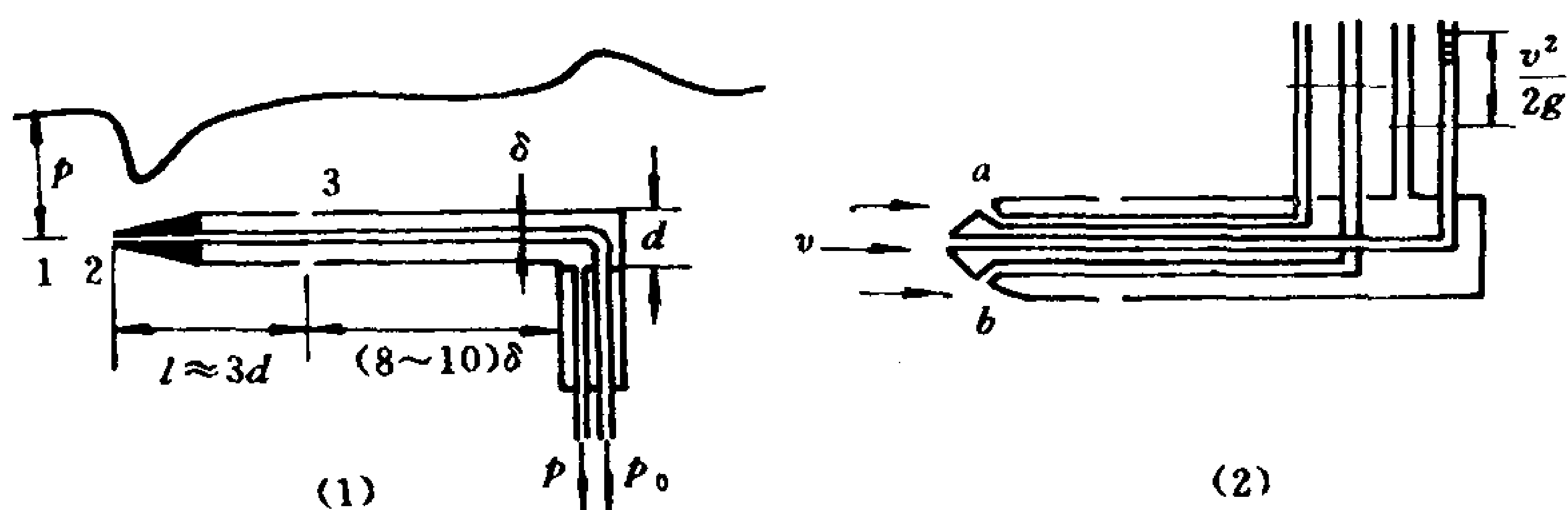


图 3-25 皮托-静压管

端未受扰乱的 1 点处静压强近似相等。因此可用皮托-静压管上的静压孔将 3 点的静压强引出。这与图 3-24 左边的测压管所起的作用是相同的。

不同结构尺寸的皮托-静压管,其静压孔的距离 l 亦不相同,每一种皮托-静压管都应该经过校准和标定,设计完善的皮托-静压管应该使其流速系数 $C_v \approx 1$。

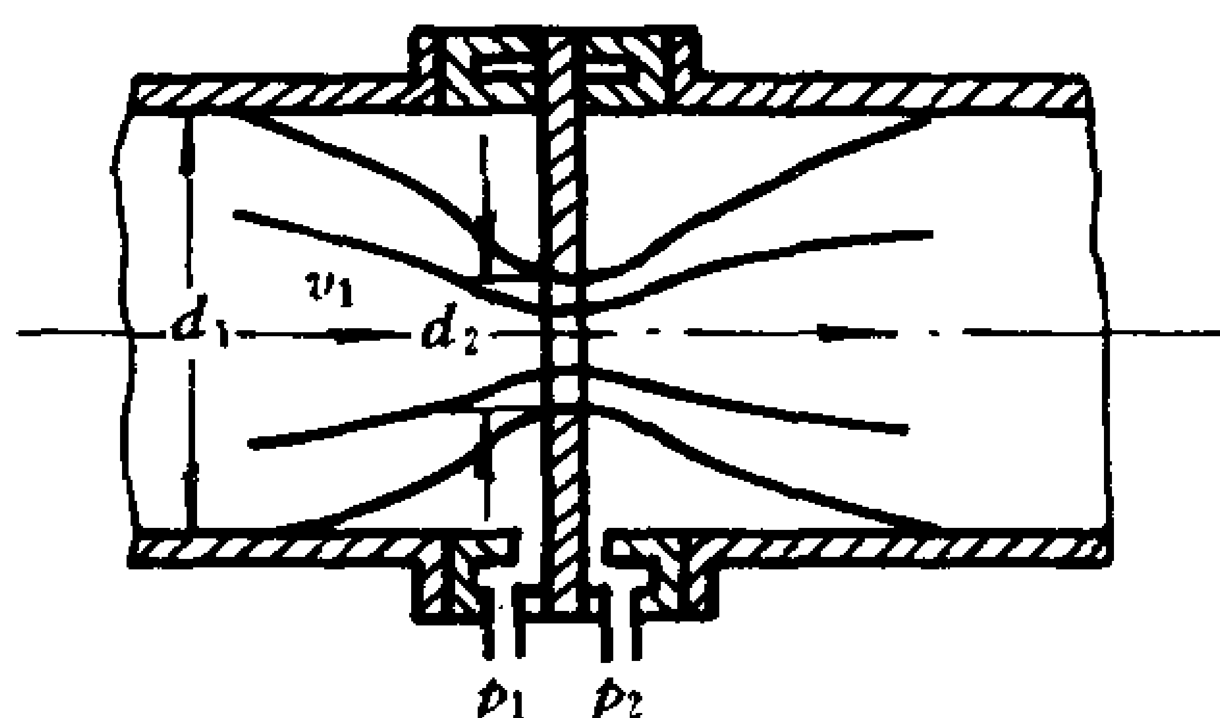
皮托管在使用中必须严格地校准安装方法,图 3-25(2)中所示的两个与主轴对称的斜管 a、b 即是为调整皮托管方位用的,只有当此两斜管中的压强相等时,安装方位才是正确的。安装稍有偏差,则测量出来的速度就不会准确。

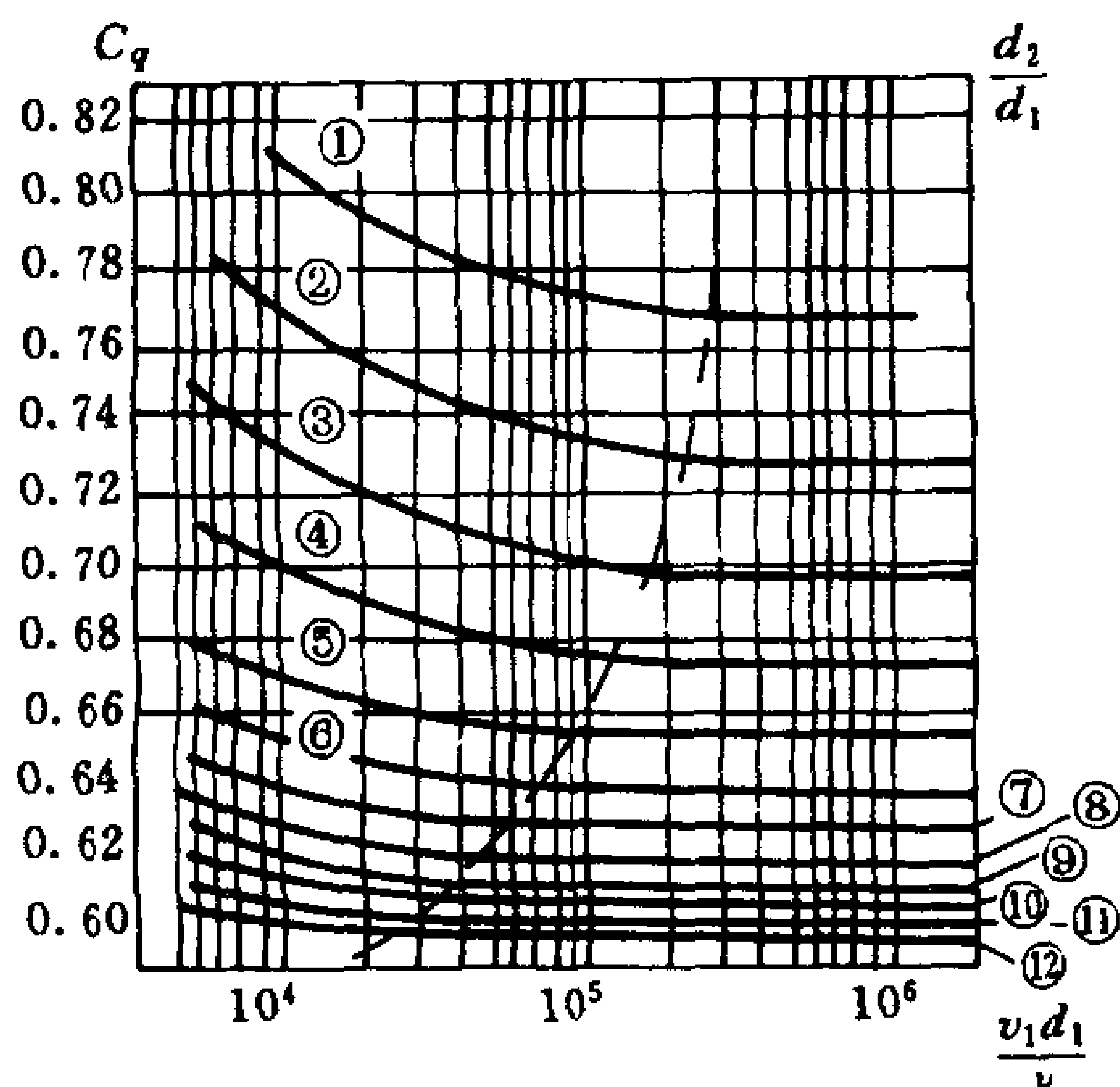
2. 节流式流量计

在管道中安装一个过流断面略小些的节流元件,使流体流过时,速度增大、压强降低。利用节流元件前后的压强差来测定流量的仪器叫作节流式流量计。工程上常用的有孔板流量计(图 3-26),喷嘴流量计(图 3-27)及文丘里(Venturi)流量计(图 3-28)三种。它们的节流元件不同,性能稍有差异,但其基本原理是完全一样的。

现以文丘里流量计为例,导出这三种节流式流量计普遍适用的不可压缩流体的流量计算公式。

如图 3-28 所示,设不可压缩流体的密度为 ρ。1-1 断面取





(图中①~⑫表示$\frac{d_2}{d_1}$的不同比值,分别为:0.80,0.75,0.70,

0.65,0.60,0.55,0.50,0.45,0.40,0.35,0.30,0.25)

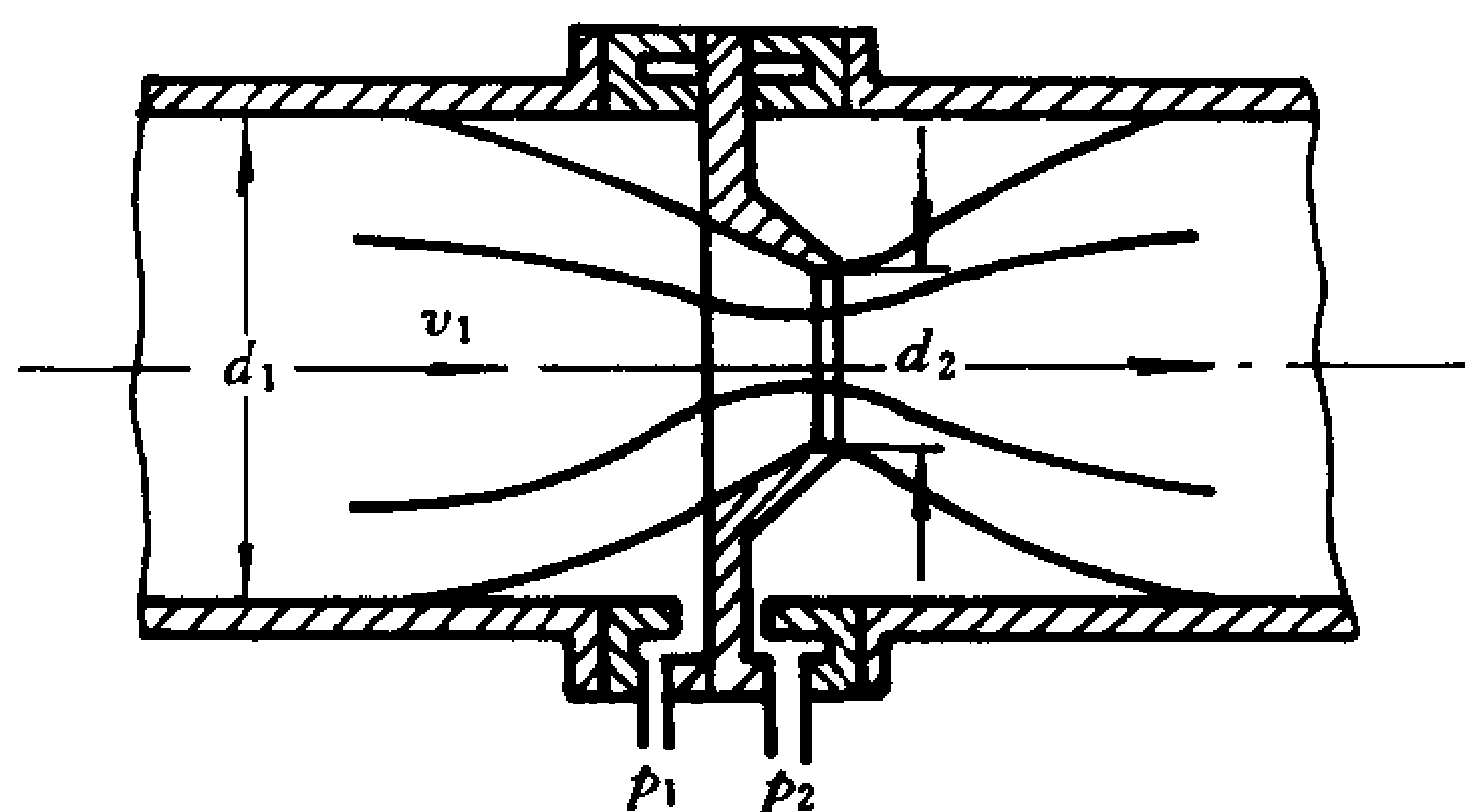
图 3-26 孔板流量计及其流量系数

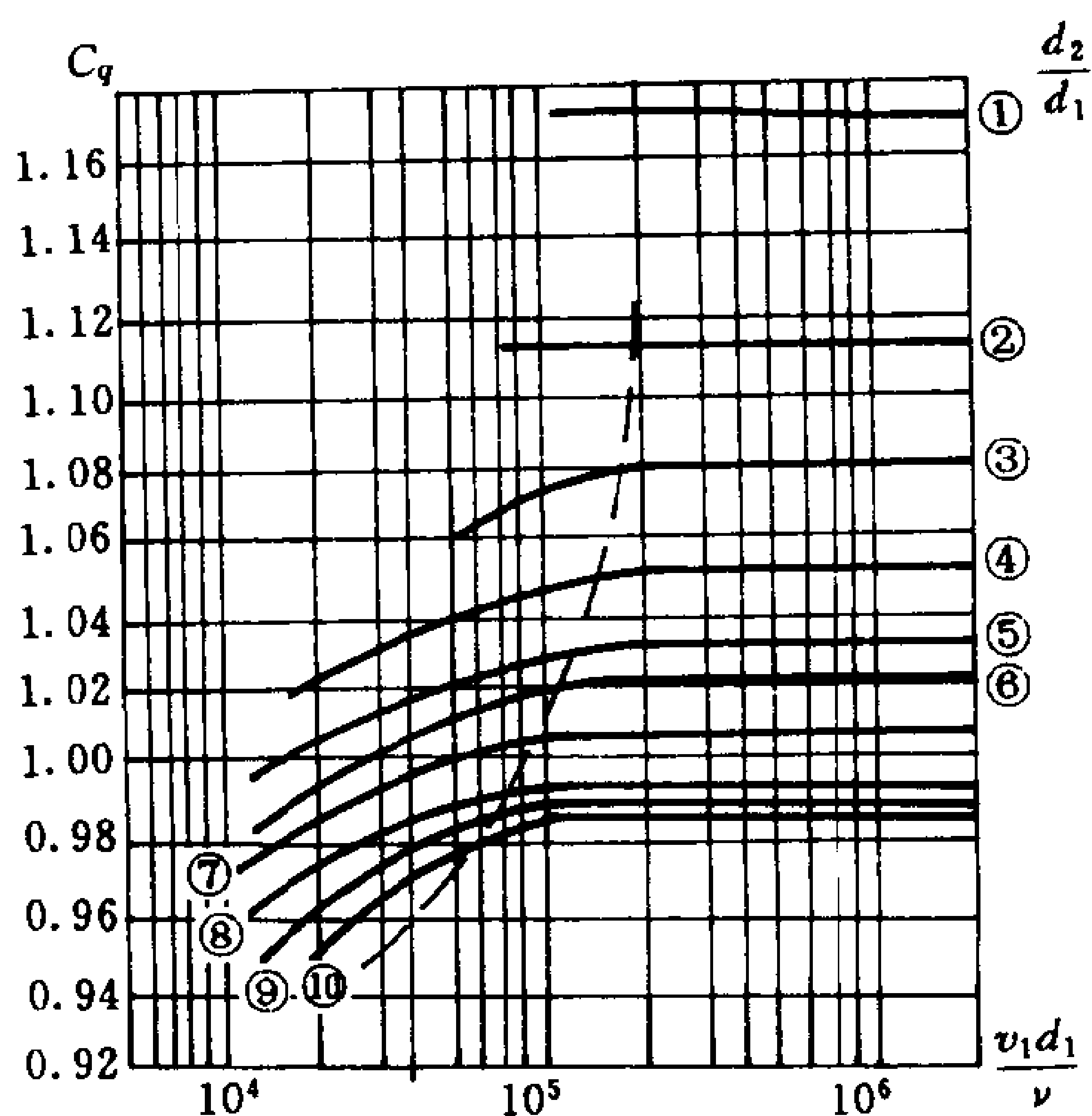
在节流元件之前,2-2 断面取在直径为 d_2 的节流元件的收缩断面处。

任取水平基准面,暂不计粘性影响。对 1-1、1-2 断面列伯努利方程式*

---

* 为简化起见,1-1、2-2 断面上的平均速度 $\bar{v}_1$、$\bar{v}_2$ 通常也可分别用 v_1、v_2 表示。对于一元管流来说,过流断面上不同点处的不同速度常被过流断面上的平均速度所取代,因而过流断面上的平均速度 $\bar{v}$ 用 v 表示也是不会引起误解的。此后一元管流断面上的平均速度也常用 v 表示,而不一定都用 $\bar{v}$。



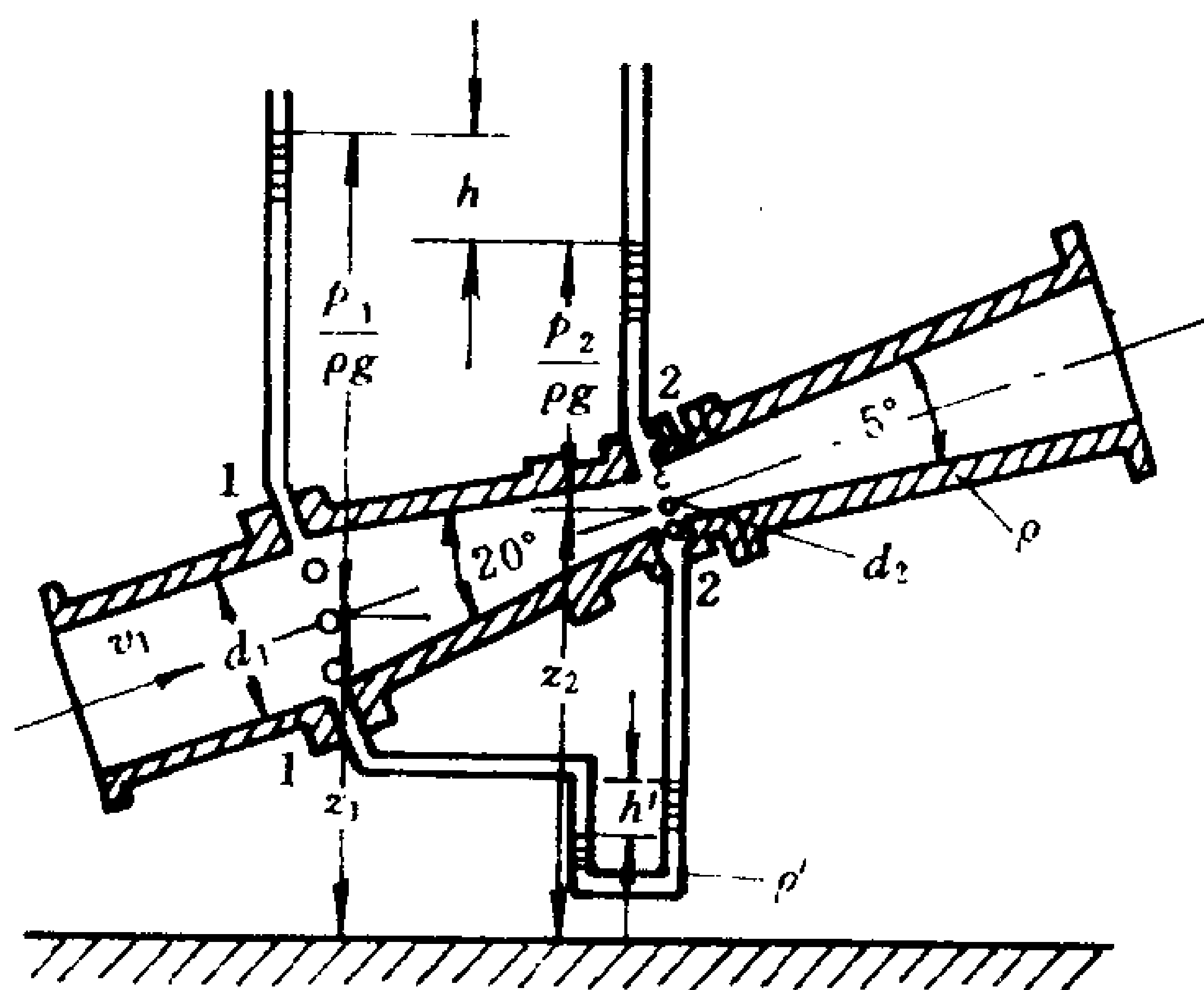


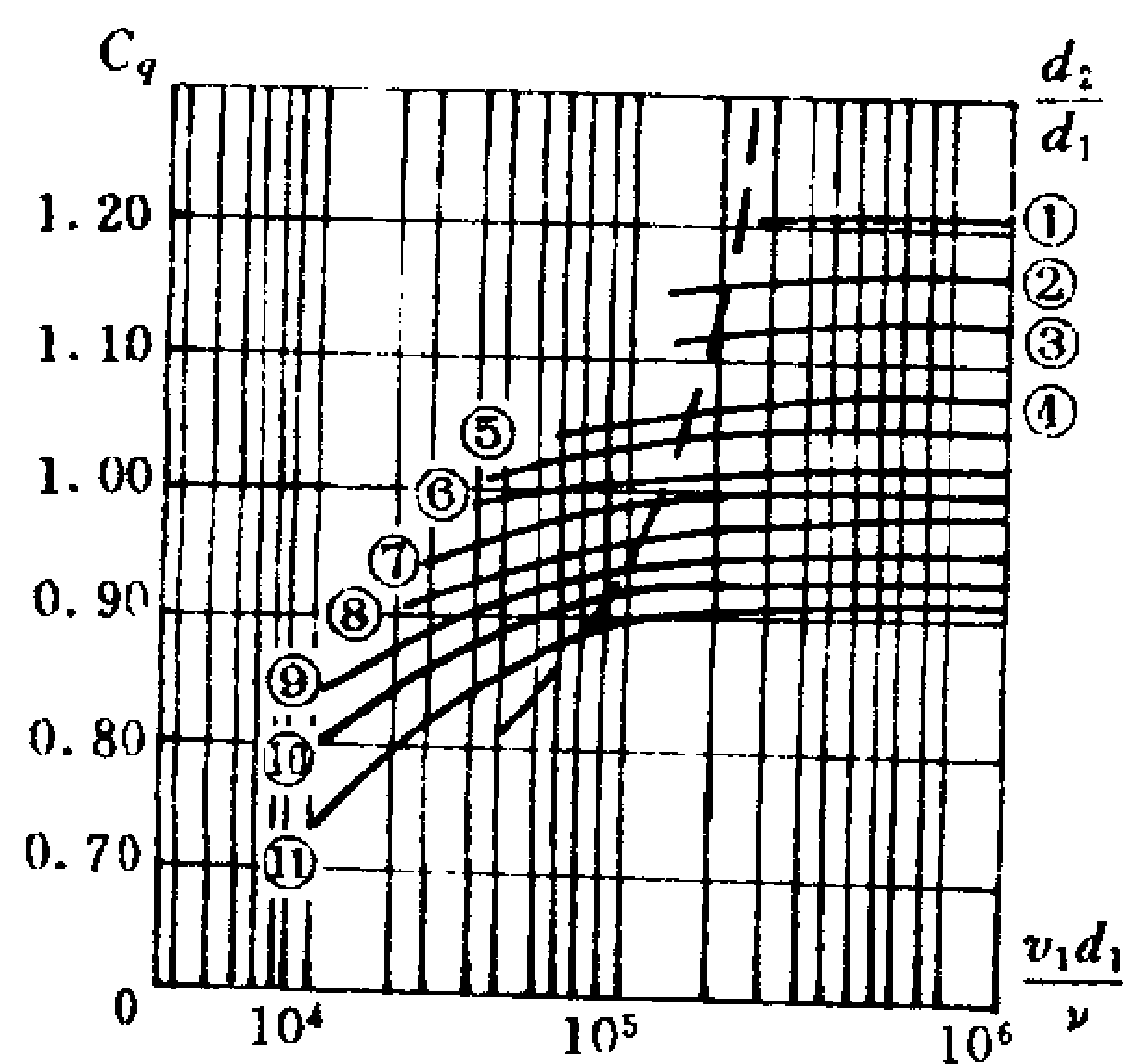
(图中①～⑩分别表示$\frac{d_2}{d_1}$的不同比值，分别为：0.75，0.70，0.65，0.60，0.55，0.50，0.45，0.40，0.30，0.20)

图 3－27　喷嘴流量计及其流量系数

$$z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{v_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{v_2^2}{2g}$$

由连续方程 $v_1A_1=v_2A_2$ 解出 $v_2=v_1\frac{A_1}{A_2}=v_1\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2$，代入，则





（图中①～⑪分别表示$\frac{d_2}{d_1}$的不同比值，分别为：

0.70，0.65，0.60，0.55，0.50，0.45，0.40，

0.35，0.30，0.25，0.20）

图 3－28 文丘里流量计及其流量系数

$$v_1 = \sqrt{\frac{2g}{\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 - 1}} \cdot \sqrt{\left(\frac{p_1}{\rho g} + z_1\right) - \left(\frac{p_2}{\rho g} + z_2\right)} \quad (3-97)$$

等式右端最后一个根号，根据测压仪器的不同，可有下列三种情况。

(1) 如果用图 3－28 上部的测压管测量压强，则(3－97)式变成

$$v_1 = \sqrt{\frac{2g}{\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 - 1}} \cdot \sqrt{h} \quad (3-98)$$

于是理论流量为

$$q_T = \frac{\pi d_1^2}{4} v_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} \sqrt{\frac{2g}{\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 - 1}} \cdot \sqrt{h} = k\sqrt{h} \quad (3-99)$$

式中
$$k = \frac{\pi d_1^2}{4} \sqrt{\frac{2g}{\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4 - 1}}$$

称为仪器常数。

考虑到实际流体的粘性影响，则应对理论流量进行粘性修正，于是实际流量为

$$q_V = C_q k \sqrt{h} \quad (3-100)$$

式中
$$C_q = \frac{q_V}{q_T} = \frac{\text{实际流量}}{\text{理论流量}}$$

称为流量系数。

(2) 如果用图 3－28 下部的 U 形测压计测量压强，则不难证明

$$\sqrt{\left(\frac{p_1}{\rho g} + z_1\right) - \left(\frac{p_2}{\rho g} + z_2\right)} = \sqrt{\frac{\rho' - \rho}{\rho} h}$$

此时实际流量为

$$q_V = C_q k \sqrt{\frac{\rho' - \rho}{\rho} h} \quad (3-101)$$

(3) 如果用U形测压计测量管路中的低速不可压缩气流时，则由于

$$\rho \ll \rho', \rho' - \rho \approx \rho'$$

于是实际流量为

$$q_V = C_q k \sqrt{\frac{\rho'}{\rho} h} \qquad (3-102)$$

以上三种情况中 C_q 及 k 的意义均完全相同。

流量系数只能通过实验测定，通常皆绘成图表供测定流量时选用。影响流量系数的因素很多(如流体粘度 ν，平均速度 v_1，节流元件前后之直径 d_1 及 d_2 等等)，根据第四章将要讲述的"π 定理"，一般将影响因素归纳为两个无量纲数 $\frac{d_2}{d_1}$ 和 $\frac{v_1 d_1}{\nu}$，流量系数 C_q 随这两个无量纲数的变化曲线如图 3-26、3-27 及 3-28 所示。

从图上可以看出当 $\frac{v_1 d_1}{\nu}$ 达到一定界限(如图中虚线所示)则每一种 $\frac{d_2}{d_1}$ 的流量系数都保持恒定，一般计算中所选取的流量系数就是指这种恒定的数值。

节流式流量计结构简单、安装方便、产品系列化并且积累有大量实验资料，在工程上应用极为广泛。但是节流式流量计有一个缺点，即其可测定的最大流量受到液体汽化压强的限制。因为流量越大、节流口处的速度 v_2 也越大，p_2 就越低，一旦 p_2 接近液体工作温度下的汽化压强 p_v 时，则液体开始汽化，阻塞节流口，而且汽泡冲入测压计使之无法观测。这种发生在节流口处的汽化现象称为节流汽穴，它限制了节流式流量计的测定范围。

液压油中有时还混有一定量的空气，空气从液压油中分离出来的压强 p_g 比液体的汽化压强 p_v 更高，$p_g > p_v$，因而压强 p_2 即使在尚未达到汽化压强之前已经有一部分气体可能分离出来，这

就使得节流汽穴现象有可能提前发生。

因此节流式流量计所能测定的最大流量为

$$q_{V\max} = C_q k\sqrt{\frac{p_1 - p_g}{\rho g}} < C_q k\sqrt{\frac{p_1 - p_v}{\rho g}} \qquad (3-103)$$

但是空气的分离压强 p_g 不是单纯由液体本身所决定的数值，它与液体中混入的空气量多少有关，因而 p_g 不象 p_v 那样有准确的数值（如第一章中表 1－7 所示），在流体力学中一般仍以 $p_2 = p_v$ 作为最大流量的计算标准，不过我们应该知道这种理论上的最大流量实际上是达不到的。

节流汽穴不止在流量计中可能出现，凡是液体速度过高，压强过低的节流口处都有可能出现。在液体机械中汽穴往往伴有汽蚀发生，因而应该设法避免。

[**例题 3－2**] 图 3－29 为射流泵（或称引射器）的示意图，来自水箱的

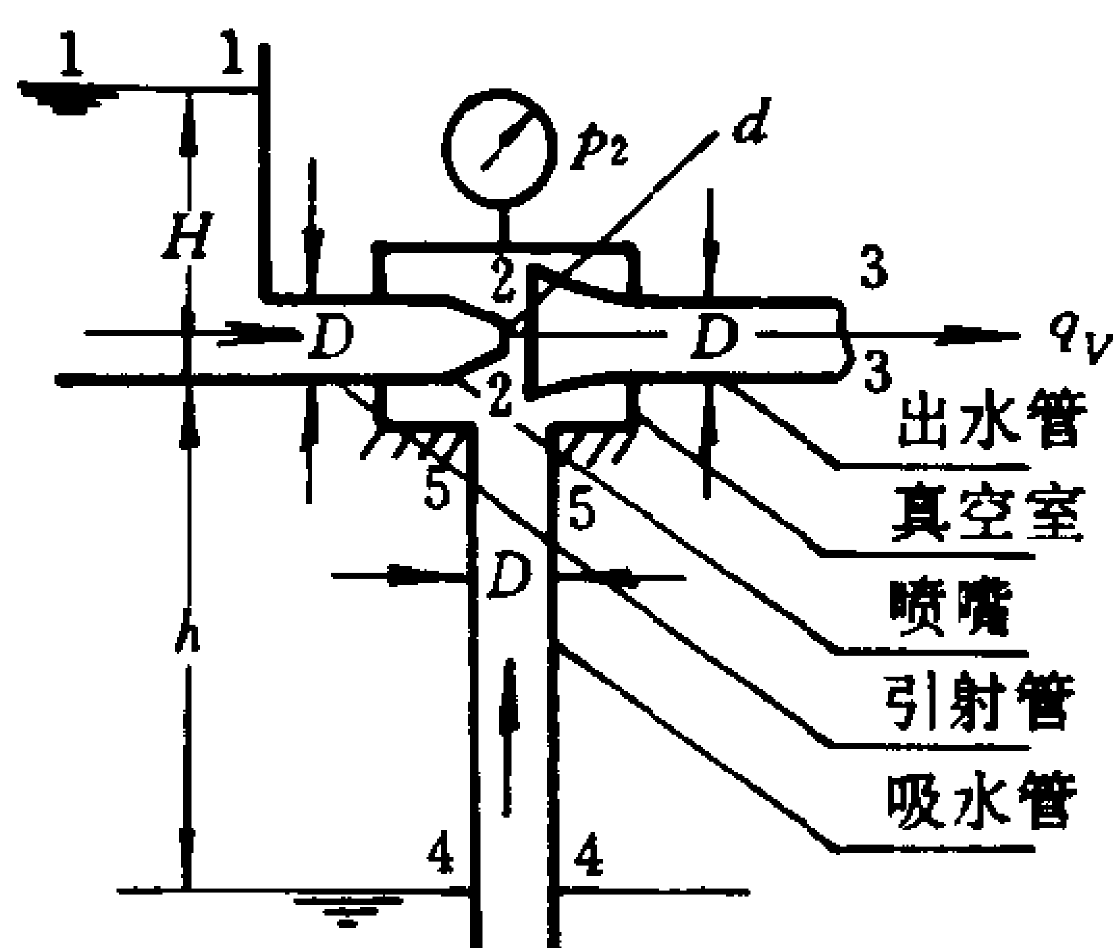


图 3－29　射流泵

水经过引射管及喷嘴后从出水管流出，由于喷嘴的加速抽吸作用，很快将真空室的空气抽走。在真空室所形成的真空度的作用下，可以将一定深度的池水吸上，并与引射水流混合后从出水管一起流出。

已知 $H = 1$ m，$h = 5$m，$D = 50$ mm，$d = 30$ mm，忽略一切摩擦损失，试求真空室中的绝对压强 p_2 和出水管流量 q_V。

[**解**] 设 1－1，2－2、3－3、4－4、5－5五个过流断面如图所示，在池水未吸上之前，列 1－1 及 3－3 断面的伯努利方程式及连续方程式可得

$$H+\frac{p_a}{\rho g}=\frac{p_a}{\rho g}+\frac{v_3^2}{2g}$$

即
$$v_3=\sqrt{2gH}=4.43\ \text{m/s}$$

及
$$v_2=v_3\left(\frac{D}{d}\right)^2=\sqrt{2gH}\left(\frac{D}{d}\right)^2$$

即
$$\frac{v_2^2}{2g}=H\left(\frac{D}{d}\right)^4$$

再列 1－1 及 2－2 断面的伯努利方程式

$$H+\frac{p_a}{\rho g}=\frac{p_2}{\rho g}+\frac{v_2^2}{2g}$$

由此解得

$$p_2=p_a-\rho g\left[H\left(\frac{D}{d}\right)^4-H\right]=1.013\times10^5-9\ 810\times\left[\left(\frac{0.05}{0.03}\right)^4-1\right]$$
$$=35\ 400\text{Pa}$$

在池水吸上之后，列 4－4 及 5－5 断面的伯努利方程式。

$$\frac{p_a}{\rho g}=\frac{p_2}{\rho g}+\frac{v^2}{2g}+h$$

由此解得吸水管中的平均速度为

$$v=\sqrt{2g\left(\frac{p_a-p_2}{\rho g}-h\right)}=\sqrt{2\times9.81\times\left[\frac{(1.013-0.354)\times10^5}{9\ 810}-5\right]}$$
$$=5.8\ \text{m/s}$$

因而出水管总流量为

$$q_V=v\frac{\pi}{4}D^2+v_2\frac{\pi}{4}D^2=(v+v_3)\frac{\pi}{4}D^2$$
$$=(5.8+4.43)\frac{\pi}{4}\times0.05^2=0.02\ \text{m}^3/\text{s}$$

本题中由于忽略摩擦损失，故而所得数值与实际是有出入的，这里只是结合射流泵的基本原理说明伯努利方程式及连续方程式的用法，并且应该指出：在分支流动的支流断面和主流断面之间，伯努利方程式与连续方程式都是不能成立的，本题所列的几个方程式并不属于这种情况。

§3－7 动量方程式及其应用

将牛顿第二定律 $\Sigma F=ma$ 用于流体质点所得到的 N－S 方

程式，是以微分形式表示的质点运动方程，对它进行积分应该得到流场中压强和速度分布规律，但可惜这种积分只在种种特殊条件下才能得到，这就大大限制了 N－S 方程式的应用范围。

如果将牛顿第二定律改写为动量定理：$\Sigma \boldsymbol{F} \mathrm{d}t = m \mathrm{d} \boldsymbol{v} = \mathrm{d}(m \boldsymbol{v})$，并用之于具有一定质量的流体质点系，由于各个质点速度不尽相同，故质点系的动量定理为

$$\Sigma \boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}(\Sigma m \boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t} \qquad (3-104)$$

据此可以设想，作用在质点系上的总外力（有些是已知的，有些是未知待求的）就不必通过分布压强的积分，而是通过求质点系动量变化率的办法计算出来，这样就开辟了求解流体动力学问题的又一条途径。

要计算质点系的动量变化率在流体力学上似乎采用拉格朗日法比较适宜，但由于运动的复杂性，这样做并不简单。质点系占据一定的空间，我们取这个空间为控制体，可以设法把上述拉格朗日法表示的动量变化率改换成用欧拉方法表示，这样就容易求得作用在控制体内流体质点系上的外力。只要控制表面有一部分与固体壁面重合，则按照作用力与反作用力大小相等方向相反的原则，也就求出了流体质点系对固体壁面的作用力。这也恰恰就是工程流体力学需要解决的一种问题。用这种方法虽然得不到流场中速度和压强等参数变化的细节，但是所得到的流体与固体的相互作用力却也是许多实际领域中需要解决的一个主要问题。因此下面将要建立的动量方程式也是流体动力学中最重要的基本方程式之一。

一、用欧拉方法表示的动量方程式

首先需要将(3－104)式右端质点系的动量变化率改变为用欧拉变数(x、y、z、t)表示。

在流场中针对具体问题，有目的地选择一个控制体如图 3－30 中虚线所示。使它的一部分控制面与要计算作用力的固体边

界重合，其余控制面则视取值方便而定。如前所述控制体一经选定，它的形状、体积和位置相对于坐标系是不变的。

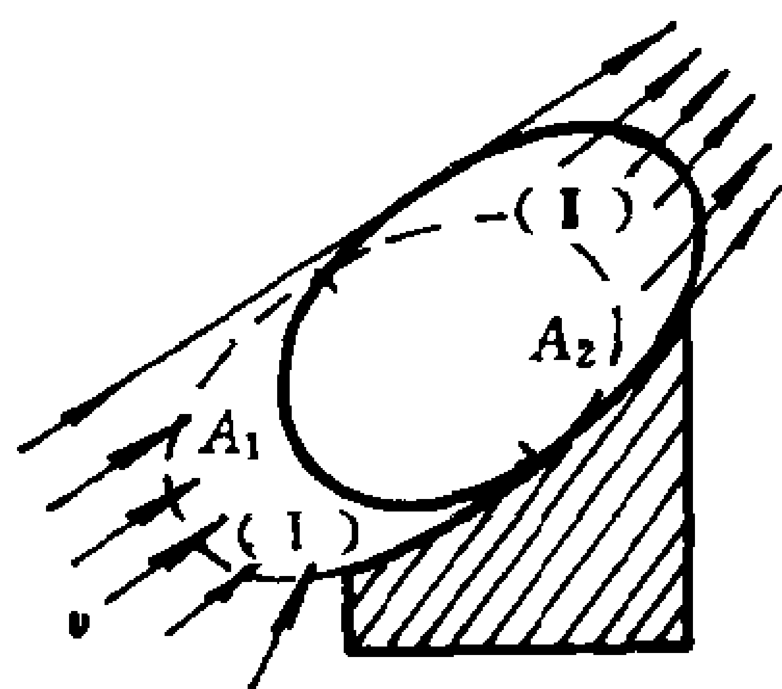


图 3－30　动量方程式

某一瞬时 t，控制体内所包含的流体就是我们要讨论的质点系，设 t 瞬时控制体 V 内任意位置上的质点速度为 $\boldsymbol{v}$、密度为 ρ，则整个质点系在 t 瞬时的初动量为 $\left[\iiint_V \rho \boldsymbol{v} \mathrm{d}V\right]_t$。经过 Δt 时间，质点系运动到实线所示位置，这个质点系在 $t+\Delta t$ 瞬时的末动量可以用下面三部分动量相加减表示出来。即 $t+\Delta t$ 瞬时控制体中所有质点[包括原来质点系尚留在控制体中的部分及新流入控制体中的(I)部分]总的动量 $\left[\iiint_V \rho \boldsymbol{v} \mathrm{d}V\right]_{t+\Delta t}$ 减去(I)部分非原质点系的流入动量 $\Delta t \iint_{A_1} \rho \boldsymbol{v}(\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A})$，再加上原质点系(II)部分流出的动量 $\Delta t \iint_{A_2} \rho \boldsymbol{v}(\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A})$。也就是说质点系在 $t+\Delta t$ 瞬时的末动量为

$$\left[\iiint_V \rho \boldsymbol{v} \mathrm{d}V\right]_{t+\Delta t} - \Delta t \iint_{A_1} \rho \boldsymbol{v}(\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}A) + \Delta t \iint_{A_2} \rho \boldsymbol{v}(\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A})$$
$$= \left[\iiint_V \rho \boldsymbol{v} \mathrm{d}V\right]_{t+\Delta t} + \Delta t \oiint_A \rho \boldsymbol{v}(\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A})$$

式中 A_1 为控制体的流入表面，A_2 为控制体的流出表面，A 为控制体的全部控制面，于是

$$\Sigma \boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}(\Sigma m \boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \left[\iiint_V \rho \boldsymbol{v} \mathrm{d}V\right]_{t+\Delta t} \right.$$
$$\left. - \left[\iiint_V \rho \boldsymbol{v} \mathrm{d}V\right]_t + \Delta t \oiint_A \rho \boldsymbol{v}(\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}) \right\}$$

即

$$\Sigma F = \frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho \boldsymbol{v} \mathrm{d}V + \oint\!\!\!\oint_A \rho \boldsymbol{v}(\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}) \qquad (3-105)$$

这就是用欧拉方法表示的动量方程式,控制体中任意空间点上的质点流动参数 ρ、$\boldsymbol{v}$都是欧拉变数的函数。这个方程式既适用于控制体固定的情况也适用于控制体运动的情况。在后种情况下,我们只要将$\boldsymbol{v}$换成流体的相对速度、并在外力中考虑到控制体运动时应该加到流体上的虚构惯性力即可。

下面再对(3－105)式中的三项含义分别作些说明。

$\Sigma \boldsymbol{F}$ 是作用在控制体内质点系上的所有外力的矢量和,它既包括控制体外部流体及固体对控制体内流体的作用力(这种力可能是压力也可能是摩擦力),也包括控制体内流体的重力或惯性力(因为这种质量力也是外力)。这些力中有些可能是已知量,有些则是未知量,有些是流体固有的,有些则是由于动量变化而产生的。

$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho \boldsymbol{v} \mathrm{d}V$ 是控制体内流体动量对时间的变化率,当控制体固定而且是定常流动时,这一项必然为零,它反映流体运动的非定常性,它的量纲 ML/T^2 也就是力的量纲。这是由于控制体内流体动量随时间变化而产生的一种力。

$\oint\!\!\!\oint_A \rho \boldsymbol{v}(\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A})$是单位时间内通过所有控制表面的动量代数和,因为从控制体流出的动量为正,流入控制体的动量为负,所以这一项也可以说是单位时间内控制体流出动量与流入动量之差。它的量纲也是 ML/T^2。这是由于通过控制体流出动量与流入动量不等而产生的一种力。

动量方程式(3－105)从表面上看起来好象是一种比较复杂的矢量积分方程式,但是明了它的每一项及每一个符号的含义后,应用起来并不困难,特别是在常见的定常、不可压缩、一元流的情况

下，方程式可以化得非常简单。

定常不可压缩一元流的流管如图 3-31 所示，把流线方向取为自然坐标 s 的正向、取如图中虚线所示的流管为控制体，则总控制表面中只有 A_1、A_2 两个过流断面上有动量交换。令这两个过流断面上的平均速度为 $\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$，则在定常不可压缩情况下，(3-105)式可简化为

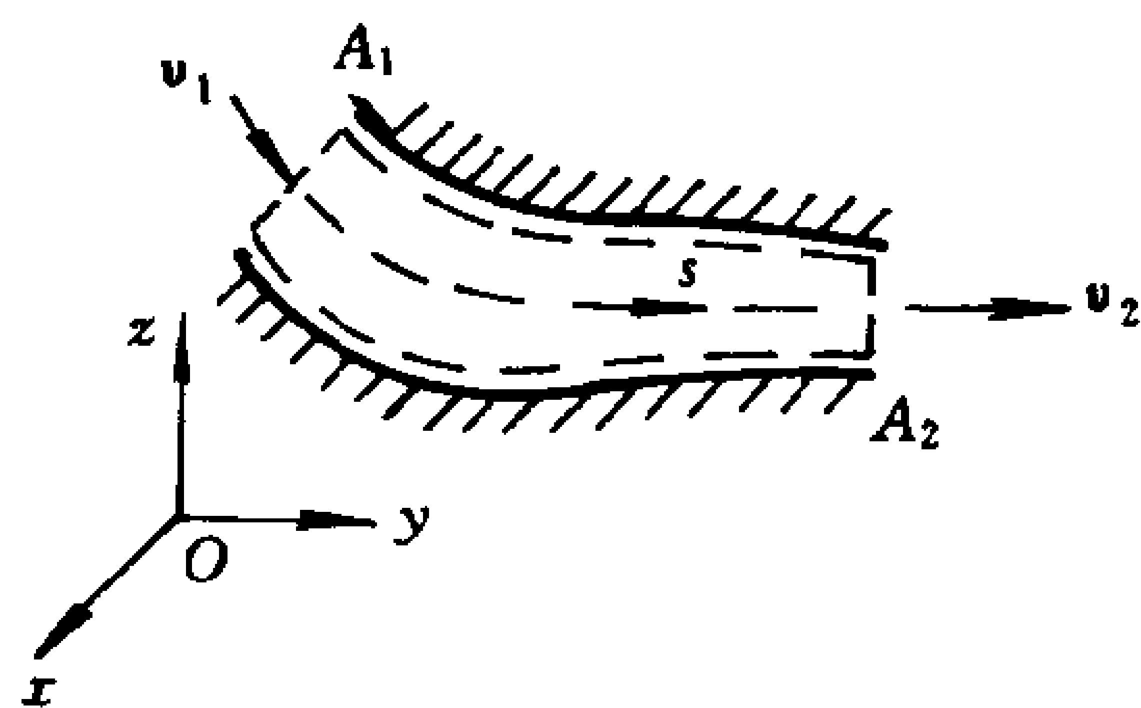


图 3-31　一元流流管

$$\Sigma \boldsymbol{F}_s = \oiint_A \rho \boldsymbol{v}(\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}) = \int_{A_2} \rho \boldsymbol{v}_2 \, \boldsymbol{v}_2 \mathrm{d}A - \int_{A_1} \rho \boldsymbol{v}_1 \, \boldsymbol{v}_1 \mathrm{d}\boldsymbol{A}$$

$$= \beta\rho q_V(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1) \approx \rho q_V(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1) \tag{3-106}$$

它在三个坐标轴上的投影式为

$$\left.\begin{aligned} \Sigma F_x &= \beta\rho q_V(v_{2x} - v_{1x}) \approx \rho q_V(v_{2x} - v_{1x}) \\ \Sigma F_y &= \beta\rho q_V(v_{2y} - v_{1y}) \approx \rho q_V(v_{2y} - v_{1y}) \\ \Sigma F_z &= \beta\rho q_V(v_{2z} - v_{1z}) \approx \rho q_V(v_{2z} - v_{1z}) \end{aligned}\right\} \tag{3-107}$$

式中 β 为用平均速度计算动量而引起的动量修正系数，如§3-2中所述，在常见的湍流情况下 $\beta \approx 1$。

(3-107)式的用途非常广泛，它的意义也非常明确。不过在使用时需要特别注意以下两点。

第一是受力对象问题，动量方程式的受力对象是流体质点系，因而式中的 ΣF_x、ΣF_y、ΣF_z 是指外界作用在流体上的力。可是实际问题中又常常要求计算流体对与之接触的固体(如管壁、容器壁等)的作用力，这当然是以外界固体为受力对象。由于受力对象不同，用“作用力、反作用力”的说法有时反而容易混淆，所以应注意(3-107)式中的 ΣF 是作用在流体上的力，如果实际问题要求流体对固体的作用力，则应相应冠以负号。

第二是外力和速度的方向问题，它们与坐标方向相同时为正，

与坐标方向相反时为负。而(3－107)式右边所固有的“－”号与速度的正负无关,因为不论速度方向如何,流入速度矢量$\boldsymbol{v}$与控制体流入表面外法线方向矢量$\boldsymbol{n}$ 的方向总是相反的,这个“－”号只表示“流入”,而并不表示流入速度的方向。在坐标轴及控制体确定之后,不论流入控制体的速度是正是负,这个代表“流入”控制体动量的“－”号都是不可缺少的。

二、动量方程式的应用

1. 流体对管道的作用力

在图3－32的变径弯管中,已知 θ_1、θ_2、A_1、A_2、p_1、p_2、v_1、

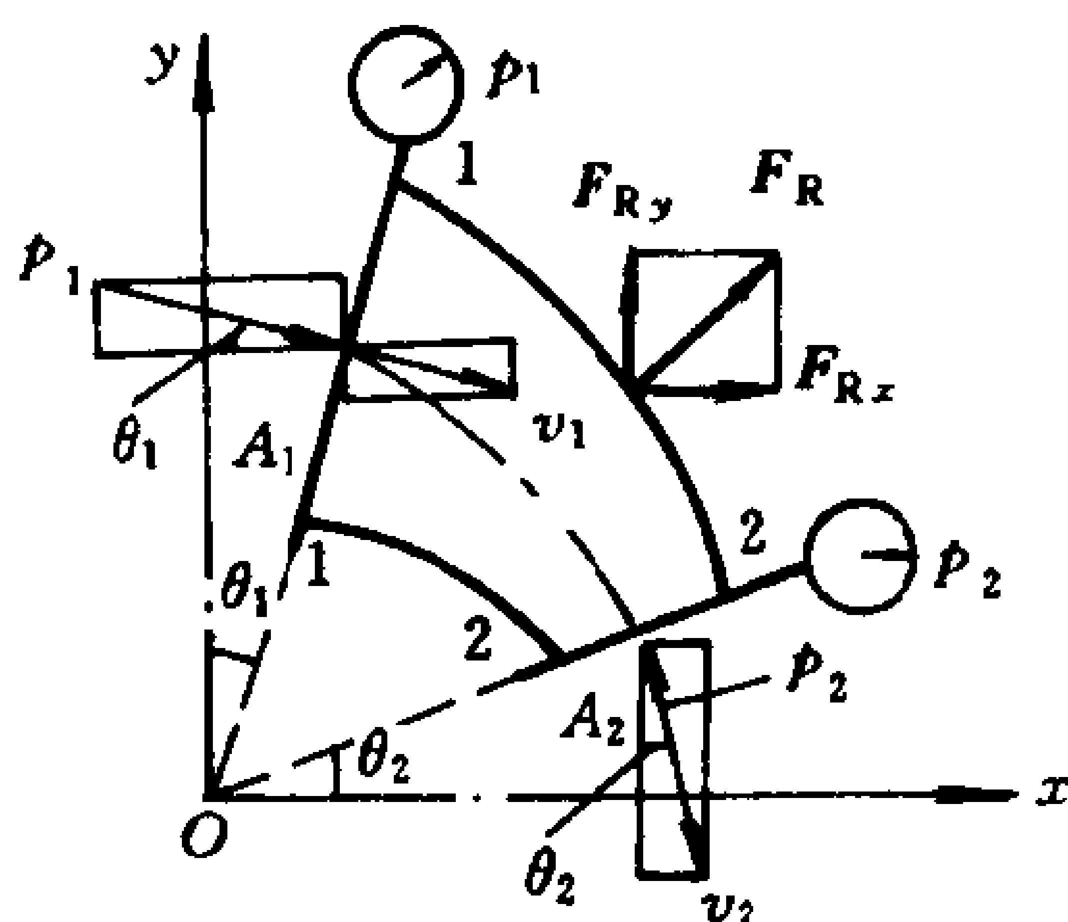


图3－32　变径弯管

v_2,要求密度为ρ、流量为q_V的流体对弯管的作用力F_{Rx}和F_{Ry}。

首先可取1－1、2－2断面及弯管内表面为流管控制体,作用在流体质点系的总外力包括:弯管对控制体内流体的作用力$-F_{Rx}$和$-F_{Ry}$及过流断面上外界流体对控制体内流体的作用力p_1A_1和p_2A_2。假定管道在水平平面内或者重力可以不加考虑,动量修正系数取为1。

按图中所示p_1、p_2、v_1、v_2的方向,可以定出各已知量的正负,待求的流体对弯管的作用力F_{Rx}、F_{Ry}则暂按图中所示方向假定为正。于是由(3－107)式可得以下二式

$$
\left.\begin{aligned}
&p_1A_1\cos\theta_1-p_2A_2\sin\theta_2-F_{Rx}\\
&=\rho q_V[(v_2\sin\theta_2)-(v_1\cos\theta_1)],\\
&-p_1A_1\sin\theta_1+p_2A_2\cos\theta_2-F_{Ry}\\
&=\rho q_V[(-v_2\cos\theta_2)-(-v_1\sin\theta_1)]
\end{aligned}\right\}
$$

这里圆括号内的正负号是表示分速度本身在坐标轴上的正负；而圆括号外的正负号则表示对控制体的流出或流入，这是公式(3-107)中所固有的。

由此解出流体对管道的作用力为

$$
\left.\begin{aligned}
F_{Rx}&=p_1A_1\cos\theta_1-p_2A_2\sin\theta_2+\rho q_V(v_1\cos\theta_1-v_2\sin\theta_2)\\
F_{Ry}&=p_2A_2\cos\theta_2-p_1A_1\sin\theta_1+\rho q_V(v_2\cos\theta_2-v_1\sin\theta_1)
\end{aligned}\right\}
\tag{3-108}
$$

计算结果如果等式右端为正，则流体对管道的作用力方向与原假定一致；如果等式右端为负，则 F_{Rx} 或 F_{Ry} 与图中假定方向相反。有了 F_{Rx} 与 F_{Ry} 后也可以求出合力的大小和方向：

$$
F_R=\sqrt{F_{Rx}^2+F_{Ry}^2},\alpha=\arctan\frac{F_{Ry}}{F_{Rx}}
$$

以上述变径弯管的讨论为基础，可以引伸出图 3-33 所示的六种特例。

［**特例 1**］ 直角变径弯管

令(3-108)式中的 $\theta_1=\theta_2=0$，$q_V=v_1A_1=v_2A_2$，即得流体对直角变径弯管的作用力为

$$
\left.\begin{aligned}
F_{Rx}&=(p_1+\rho v_1^2)A_1\\
F_{Ry}&=(p_2+\rho v_2^2)A_2
\end{aligned}\right\}
\tag{3-109}
$$

［**特例 2**］ 直角等径弯管

此时 $\theta_1=\theta_2=0$，$A_1=A_2=A$，$q_V=vA$，于是由(3-108)式可得

$$
\left.\begin{aligned}
F_{Rx}&=(p_1+\rho v^2)A\\
F_{Ry}&=(p_2+\rho v^2)A
\end{aligned}\right\}
\tag{3-110}
$$

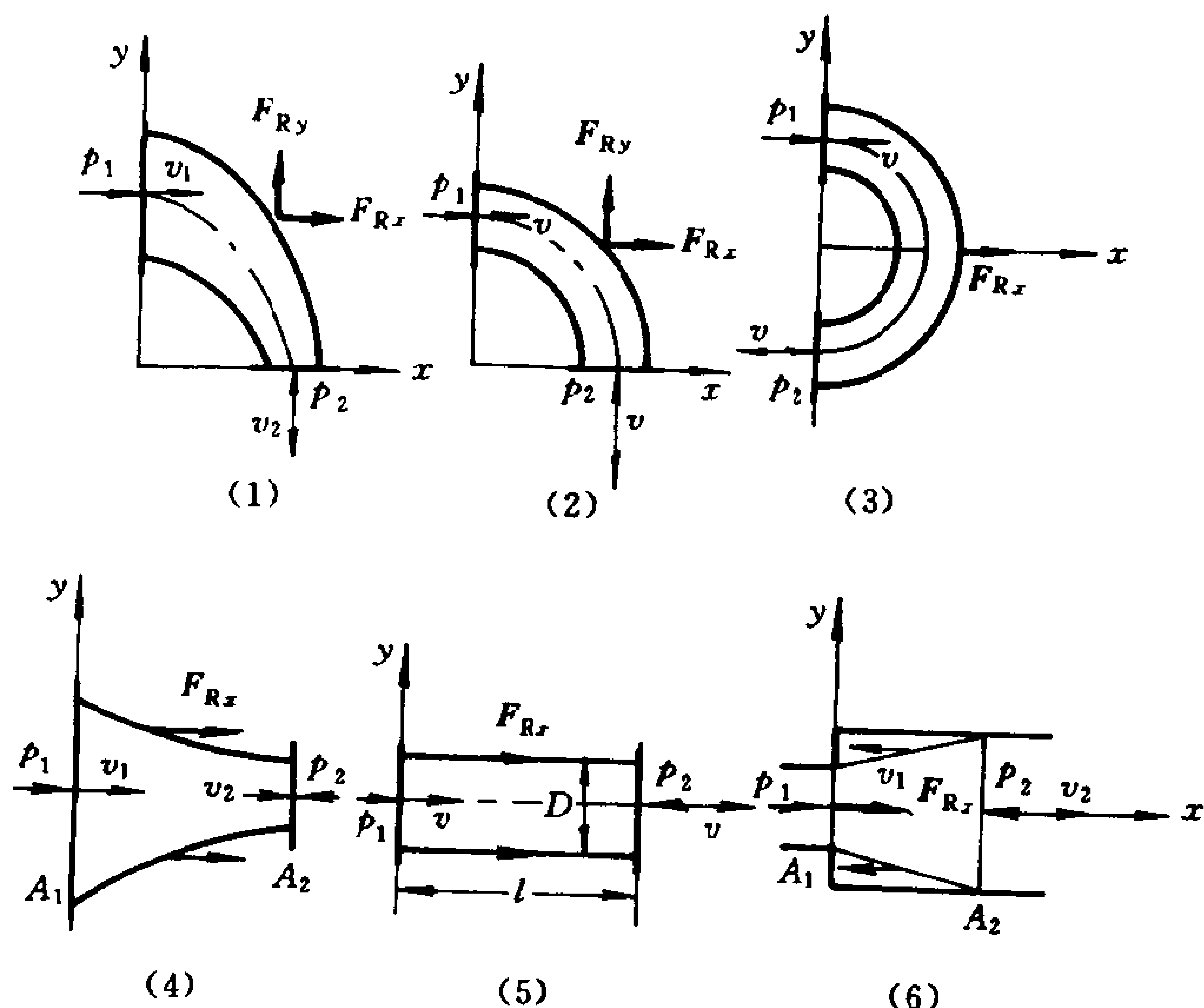


图 3－33　流体对弯管的作用力

［**特例 3**］　反向等径弯管

此时 $\theta_1=0, \theta_2=-90°, A_1=A_2=A, v_1=v_2=v, q_V=vA$，由(3－108)式可得

$$\left.\begin{aligned}F_{Rx}&=(p_1+p_2+2\rho v^2)A\\F_{Ry}&=0\end{aligned}\right\}\qquad(3-111)$$

［**特例 4**］　逐渐收缩管

此时 $\theta_1=0, \theta_2=90°, q_V=v_1A_1=v_2A_2$，由(3－108)式可得

$$\left.\begin{aligned}F_{Rx}&=(p_1+\rho v_1^2)A_1-(p_2+\rho v_2^2)A_2\\F_{Ry}&=0\end{aligned}\right\}\qquad(3-112)$$

［**特例 5**］　等径直管

此时 $\theta_1=0, \theta_2=90°, A_1=A_2=A, v_1=v_2=v$，由(3－108)式可得

$$\left.\begin{aligned}F_{Rx}&=(p_1-p_2)A\\F_{Ry}&=0\end{aligned}\right\}\tag{3-113}$$

等径直管中流体对管道的作用力 F_{Rx} 实质上就是作用在管壁上的摩擦力，将 F_{Rx} 除以管壁的摩擦面积 $2\pi Rl$，即可得管壁上的切应力为

$$\begin{aligned}\tau_0&=\frac{F_{Rx}}{2\pi Rl}=\frac{(p_1-p_2)\pi R^2}{2\pi Rl}=\frac{(p_1-p_2)R}{2l}\\&=\frac{\Delta pR}{2l}=\frac{\Delta pd}{4l}\end{aligned}\tag{3-114}$$

只要测出相距为 l 的两断面上的压强差，则直管壁面上的切应力和摩擦力都是可以计算出来的。(3-114)式也说明，管壁上存在的摩擦力必然导致管中的压强沿流动方向逐渐下降，如果对 1,2 两断面列伯努利方程式，由于 $z_1=z_2,v_1=v_2$，可得

$$h_f=\frac{p_1-p_2}{\rho g}=\frac{4\tau_0 l}{\rho gd}\tag{3-115}$$

此式说明管路中由于摩擦而产生的所谓沿程水头损失 h_f 与管长成正比，与管直径成反比。

(3-114)及(3-115)式对于管中层流与管中湍流都同样适用，这两个公式在第五章的管中流动理论方面都有重要的作用。

[**特例 6**] 突然扩大管

此时 $\theta_1=0,\theta_2=90^\circ$，由(3-108)式可得

$$\left.\begin{aligned}F_{Rx}&=(p_1+\rho v_1^2)A_1-(p_2+\rho v_2^2)A_2\\F_{Ry}&=0\end{aligned}\right\}\tag{3-116}$$

突然扩大处流线不能折转，如图 3-33(6)所示，在“死角”处产生涡旋，涡旋区中的流体没有主流方向的运动，因而流体对突然扩大管的作用力 F_{Rx} 不是作用在大管管壁上的摩擦力，而是作用在突然扩大台肩圆环断面 A_2-A_1 上的静压力，此台肩上的静压强是 p_1，静压力的方向向左，即

$$F_{Rx}=-p_1(A_2-A_1)\tag{3-117}$$

令此式与(3-116)式联立,并利用连续方程式

$$v_2 = v_1 \frac{A_1}{A_2}$$

则可解出

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{1}{g}(v_2^2 - v_1 v_2) \tag{3-118}$$

再列1、2两断面上的伯努利方程,可得

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{1}{2g}(v_2^2 - v_1^2) + h_f \tag{3-119}$$

由(3-118)及(3-119)式即可得出突然扩大管的所谓局部水头损失为

$$h_f = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} \tag{3-120}$$

此式称为包达(Borda)定理,即突然扩大的水头损失等于差速度($v_1 - v_2$)的速度水头。

再利用连续方程 $v_1 A_1 = v_2 A_2$ 将(3-120)式改写为

$$\left.\begin{aligned} h_f &= \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \frac{v_1^2}{2g} = \zeta_1 \frac{v_1^2}{2g} \\ \text{或} \quad h_f &= \left(\frac{A_2}{A_1} - 1\right)^2 \frac{v_2^2}{2g} = \zeta_2 \frac{v_2^2}{2g} \end{aligned}\right\} \tag{3-121}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} \zeta_1 &= \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \\ \text{或} \quad \zeta_2 &= \left(\frac{A_2}{A_1} - 1\right)^2 \end{aligned}\right\} \tag{3-122}$$

称为局部阻力系数,这里所得到的突然扩大局部阻力公式(3-121),也是表达一切局部阻力损失的普遍公式。

2. 自由射流的冲击力

从有压喷管或孔口射入大气的一股流束叫作自由射流,自由射流的特点是流束上的流体压强到处均为大气压。自由射流的速

度和射程可按伯努利方程式计算,射流对挡板或叶片的冲击力则可按动量方程式计算。

如图 3－34(1)所示,假定速度为 v、流量为 q_V 的自由射流冲击到固定的二向曲面后,左右对称地分为两股,两股流量均为原流量之半。假定自由射流在同一水平面上,且到处均为大气压,按伯努利方程式可知射流速度的大小处处保持恒定。假定动量修正系

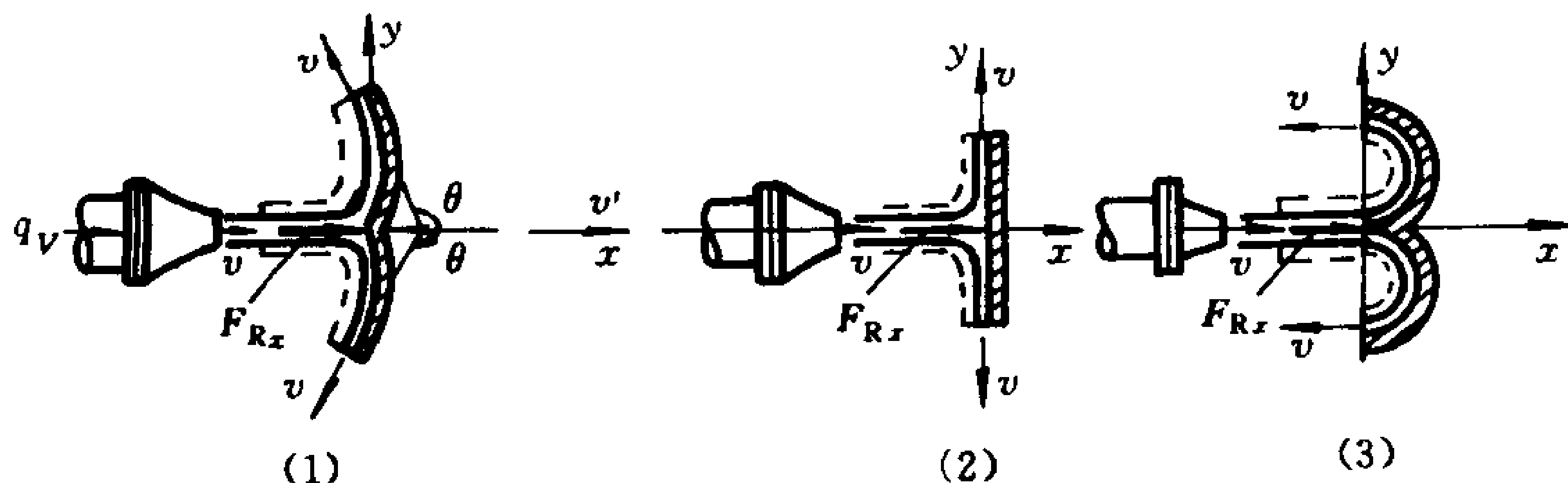


图 3－34　自由射流的冲击力

数 $\beta \approx 1$,取如图虚线所示的控制体,按照动量方程式(3－107)式可得曲面作用在流体上的力为

$$F_x = \rho\left[2\,\frac{q_V}{2}v\cos\theta - q_V v\right] = \rho q_V v(\cos\theta - 1)$$

于是射流对曲面的冲击力为

$$F_{Rx} = -F_x = \rho q_V v(1 - \cos\theta) \qquad (3-123)$$

[**特例 1**]　$\theta = 90°$,如图 3－34(2),即得射流对平面挡板的冲击力为:

$$F_{Rx} = \rho q_V v \qquad (3-124)$$

这种平面挡板是实际中最常见的。

[**特例 2**]　$\theta = 180°$。如图 3－34(3),由(3－123)式可得

$$F_{Rx} = 2\rho q_V v \qquad (3-125)$$

这种反向曲面所受到的冲击力是平面挡板的两倍。为了充分发挥射流的动力性能,在冲击式水轮机上就是采用这种反向曲面作为其叶片形状的。不过为了回水方便,其反向的 θ 角不是180°,

而是160°～170°。

以上是曲面固定时所得到的冲击力。如果挡板装在叶轮机上以小于 v 的圆周速度 v' 进行回转运动，则将控制体取在运动叶片上，冲击力公式中的速度 v 需用相对速度 $v-v'$ 代替，于是冲击力为

$$F_{Rx}=\rho q_V(v-v')(1-\cos\theta) \tag{3-126}$$

转动功率为

$$P=F_{Rx}v'=\rho q_V(vv'-v'^2)(1-\cos\theta) \tag{3-127}$$

当 $\dfrac{dP}{dv'}=\rho q_V(v-2v')(1-\cos\theta)=0$ 时，即 $v'=\dfrac{v}{2}$ 时，可得最大转动功率为

$$P_{max}=\rho q_V\frac{v^2}{4}(1-\cos\theta) \tag{3-128}$$

如果 $\theta=180°$，则

$$P_{max}=\frac{\rho}{2}q_Vv^2 \tag{3-129}$$

这就是说，当 $\theta=180°$，$v'=\dfrac{v}{2}$ 时，射流的全部动能都将转化为叶轮机的输出功率，显然这是一种理想情况。按照上述目标设计的现代冲击式水轮机的效率约为 85%～90%。

[**例题 3-3**] 在液压控制中作为液压放大器、在液压传动中作为换向阀使用的三位四通滑阀如图 3-35 所示，图示位置表示油缸柱塞克服负载向左运动，已知油泵计示压强 $p=2\ 500$ kPa，油缸负载 $F=70$ kN，油缸活塞直径 $D_1=20$ cm，油缸活塞杆直径 $D_2=4$ cm，滑阀直径 $d=2$ cm，滑阀通向油缸的两个开口的轴向开口量均为 $x=5$ mm，液流方向角 $\theta=69°$，流速系数 $C_v=0.98$，流量系数 $C_q=0.62$。

油管中的摩擦损失均忽略不计，试求开口量稳定不变时，液流作用在滑阀上的轴向力。

[**解**] 由于油缸两端进出流量相等，故经过两个开口处的流量 q_V 和速

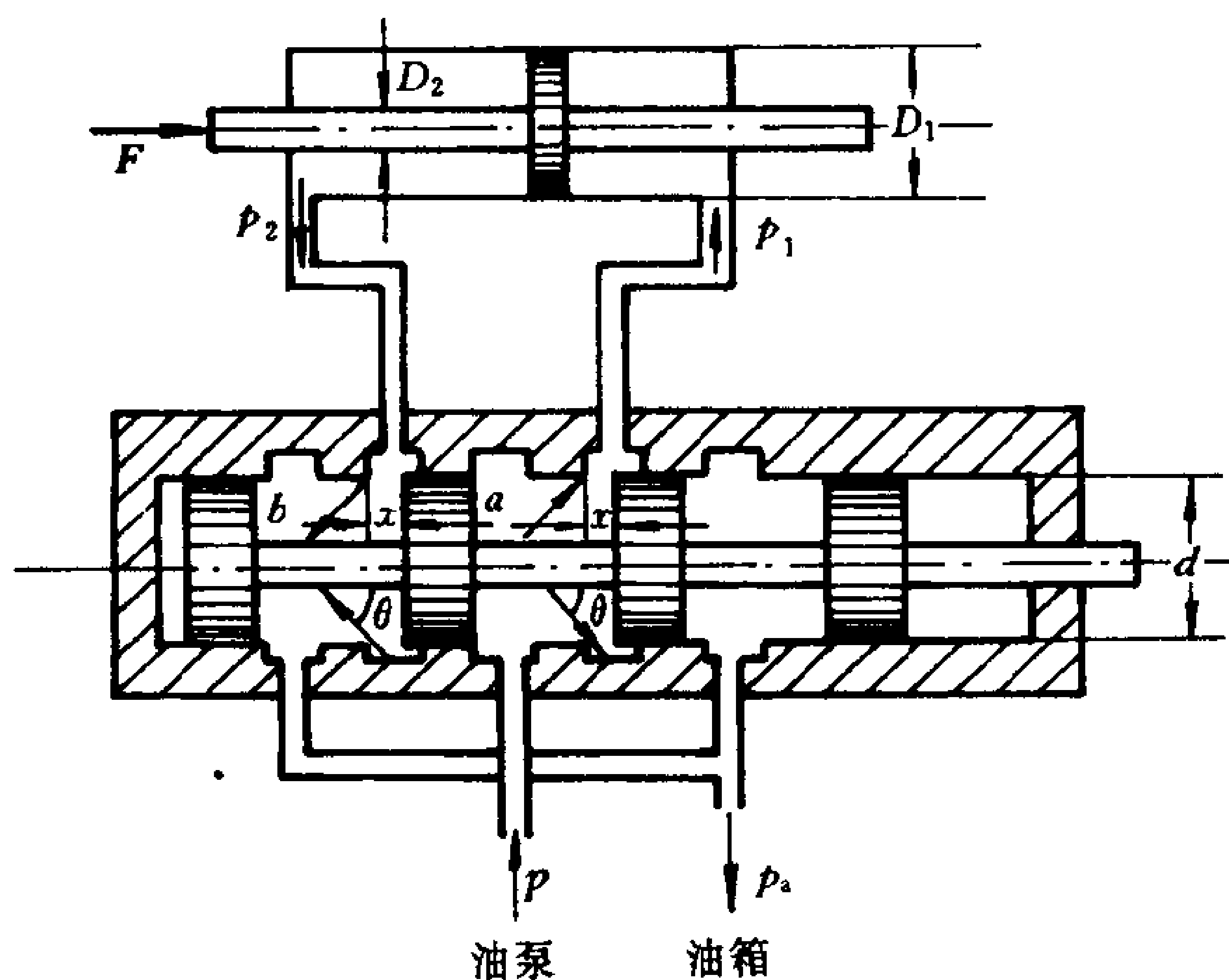


图 3－35　换向阀

度v亦相等，取 a、b 两腔油液的外轮廓为控制体，分别列出这两个控制体沿滑阀轴向的动量方程式，然后相加，即可得出作用在油液上的作用力为

$$F_x = F_{ax} + F_{bx} = \rho q_V[v\cos\theta - 0] + \rho q_V[0 - (-v\cos\theta)]$$
$$= 2\rho q_V v\cos\theta$$

油液作用在滑阀上的力为

$$F_{Rx} = -F_x = -2\rho q_V v\cos\theta \qquad (3-130)$$

下面再根据(3－93)、(3－94)及(3－100)式，由滑阀开口前后的压强差 Δp，计算经过滑阀的速度和流量。

因为 $p-\Delta p = p_1$ 及 $p_2 - \Delta p = p_a = 0$，故

$$\Delta p = \frac{1}{2}[p-(p_1-p_2)] = \frac{1}{2}\left[p - \frac{4F}{\pi(D_1^2-D_2^2)}\right]$$

于是

$$v = C_v\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} = C_v\sqrt{\frac{1}{\rho}\left[p - \frac{4F}{\pi(D_1^2-D_2^2)}\right]}$$

$$q_V = C_q x\pi d\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} = C_q x\pi d\sqrt{\frac{1}{\rho}\left[p - \frac{4F}{\pi(D_1^2-D_2^2)}\right]}$$

将 v、q_V 代回(3－130)式，则得

$$F_{Rx} = -2C_q C_v x\pi d\cos\theta\left[p - \frac{4F}{\pi(D_1^2-D_2^2)}\right]$$

代入已知数值,即可得作用在滑阀上的轴向力为

$$F_{R,r} = -2\times0.62\times0.98\times0.005\times\pi\times0.02\times\cos69^\circ\times\left[2\ 500\times10^3-\frac{4\times70\times10^3}{\pi\times(0.2^2-0.04^2)}\right]$$

$$= -24.5\ \text{N}$$

“-”号说明作用力的方向向左。

当滑阀作为换向阀使用时,此力有使滑阀开口量减小的趋势。为了消除这种影响,有时将滑阀阀芯加工成特定曲线形状,借以改变油液方向角,减小液流对滑阀的作用力,有时也可适当增大滑阀的径向间隙,同样也能改变液流方向角。

当滑阀作为液压放大器使用时,上述轴向力是增加滑阀运动稳定性的一种有利因素。

[**例题 3-4**] 喷水推进船(如图 3-36)从前舱进水,然后用泵及直径为 $d=15$ cm 的排水管从后舱排向水中。

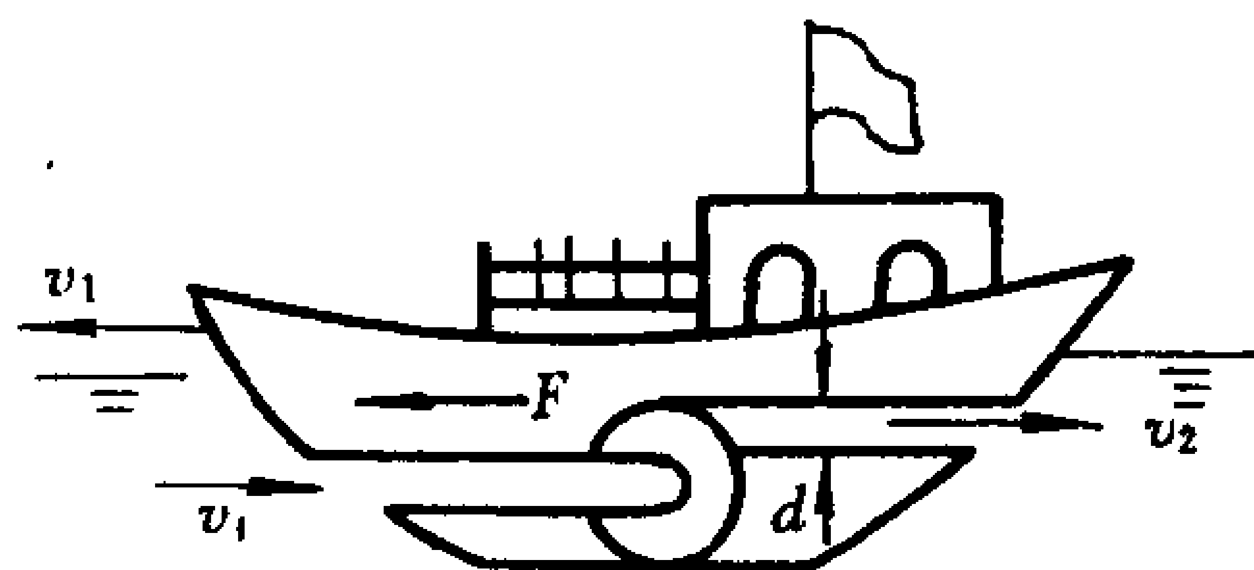


图 3-36 喷水推进船

已知船速 $v_1=36$ km/h,推进力 $F=2$ kN,试求水泵的排水量及推进装置的效率。

[**解**] 取船内流管的全部内壁轮廓为控制体,已知进水速度为 $v_1=36$ km/h=10 m/s,设相对于船艇的排水速度为 v_2,排水量为 q_V,则

$$F=\rho q_V(v_2-v_1)=\rho q_V\left(\frac{4q_V}{\pi d^2}-v_1\right) \tag{3-131}$$

或

$$q_V^2-\frac{\pi}{4}d^2v_1q_V-\frac{\pi}{4}d^2\frac{F}{\rho}=0$$

代入已知数据

$$q_V^2-0.176\ 7q_V-0.035\ 3=0$$

所以

$$q_V=0.296\ \text{m}^3/\text{s}$$

$$v_2=\frac{4q_V}{\pi d^2}=16.75\ \mathrm{m/s}$$

推进装置的输出功率是 $Fv_1=\rho q_V(v_2-v_1)v_1$

推进装置的输入功率是

$$\rho g q_V\frac{v_2^2-v_1^2}{2g}=\rho q_V\frac{v_2^2-v_1^2}{2}$$

故推进装置的效率为

$$\eta=\frac{\rho q_V(v_2-v_1)v_1}{\rho q_V\dfrac{v_2^2-v_1^2}{2}}=\frac{2v_1}{v_1+v_2} \tag{3-132}$$

代入数值,则 $$\eta=\frac{2\times 10}{10+16.75}=0.748=74.8\%$$

从(3－131)及(3－132)式来看,当航速 v_1 一定时,适当降低排水速度 v_2(在舱体允许的条件下适当加大直径 d)可以提高效率,但推力要受到影响。当 v_2 一定时,适当提高航行速度 v_1 亦可提高效率,但 v_1 提高后,推力减小,尤其是船艇阻力增长得更大,因而这种推进装置的应用是有局限性的。通常采用增大流量而降低 v_2-v_1 的办法来兼顾推力和效率指标。

上述推进力和效率的矛盾在喷射推进装置(如喷气发动机、火箭、气垫船、螺旋桨等等)中是一个带有普遍性的问题。设计师应该善于针对具体情况,分清矛盾的主次顺序,统筹安排妥善地解决这种矛盾。

§3－8 动量矩方程式

根据矢量运算法则,用一个矢量 $\boldsymbol{a}$ 对矢量等式 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}$ 两端同时进行矢性积运算,所得结果仍然相等,即

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d}$$

我们知道动量方程式(3－105)式也是一个矢量方程式,公式左端 $\Sigma\boldsymbol{F}$ 是作用在控制体上的合外力矢量,公式右端第一项 $\dfrac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_V\rho\boldsymbol{v}\mathrm{d}V$ 是控制体中动量矢量对时间的变化率,公式右端第二项 $\oiint\limits_A\rho\boldsymbol{v}v\mathrm{d}A$ 是通过控制面的净动量矢量。式中 $\boldsymbol{v}$ 是控制体中

任意点的速度矢量，如果用 $\boldsymbol{r}$ 表示该点在坐标系中的矢径，则用此矢量 $\boldsymbol{r}$ 对动量方程式两端进行矢性积运算，可得动量矩方程式为

$$\boldsymbol{r} \times \Sigma \boldsymbol{F} = \frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v})\mathrm{d}V + \oiint_A \rho(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}) v \mathrm{d}A \tag{3-133}$$

等式左端是控制体上合外力对于坐标原点的合力矩，可用 $\boldsymbol{M}$ 表示。等式右端第一项是控制体内动量矩对时间的变化率，在定常流动（例如定转速的叶轮机）中，这一项等于零。等式右端第二项是通过控制面流出与流入的流体的动量矩之差，或通过控制面的净动量矩。

在定转速的叶轮机中（如图 3－37）取叶轮出、入口的圆柱面

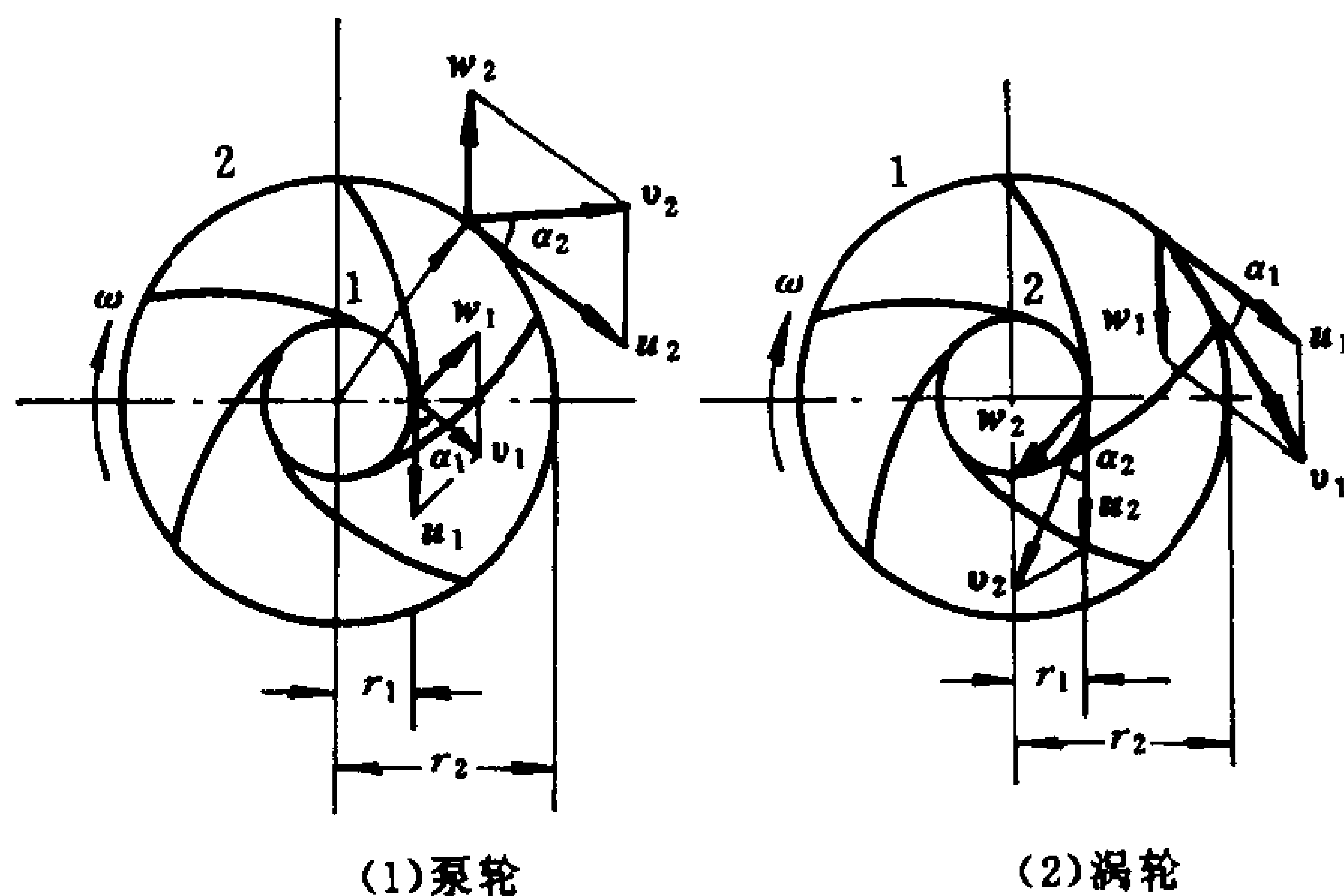


图 3－37　叶轮的速度三角形

与叶轮侧壁之间的整个叶轮流动区域为控制体。不论泵轮或涡轮，统一用下标 1 表示入口，下标 2 表示出口。用 u 表示牵连速度，w 表示流体在叶轮内的相对速度，用 v 表示流体的绝对速度。假定叶轮轮片数目无限多，每个叶片的厚度均为无限薄，则流体在叶片间的相对速度 w 必沿叶片截线的切线方向。于是将动量矩方程式用于叶轮机时，需用绝对速度 v 代替（3－133）式中的质点

速度，由于定常运动，故得

$$M = \oint\!\!\!\!\oint_A \rho(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}) v \mathrm{d}A = \iint_{A_2} \rho(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}) v \mathrm{d}A - \iint_{A_1} \rho(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}) v \mathrm{d}A \tag{3-134}$$

这就是常用于叶轮机中的定常流动的动量矩方程式。

由图 3-37 所示的速度三角形可以看到

$$|\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}| = rv\sin(\widehat{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{v}}) = rv\cos\alpha$$

因而(3-134)式可以写成

$$M = \rho q_V (r_2 v_2 \cos\alpha_2 - r_1 v_1 \cos\alpha_1)$$

因为叶轮机的角速度为

$$\omega = \frac{u}{r} = \frac{u_1}{r_1} = \frac{u_2}{r_2}$$

故叶轮机的功率

$$P = M\omega = \rho q_V (v_2 u_2 \cos\alpha_2 - v_1 u_1 \cos\alpha_1) \tag{3-135}$$

或

$$\frac{P}{\rho g q_V} = \frac{1}{g}(v_2 u_2 \cos\alpha_2 - v_1 u_1 \cos\alpha_1) = H \tag{3-136}$$

(3-136)与前面(3-89)式是完全一致的，一种问题可以采用不同方法解决，这种情况有助于启发人们的思路。

(3-135)及(3-136)式既适用于泵类机械，也适用于涡轮类机械，公式是统一的，但实质却不同。

对泵类机械来说，叶轮出口处的流体能量大于入口处的流体能量。P 代表机械对流体作功，H 称为泵产生的扬程。对涡轮类机械来说，叶轮出口处的流体能量小于入口处的流体能量。P 代表流体对机械作功，H 称为作用于涡轮上的水头。

在液力传动的偶合器与变矩器中，这两种叶轮联合工作，借运动流体传递或改变扭矩。在涡轮增压器中，废气推动涡轮带动压气机将空气增压后再送入内燃机汽缸。在燃气轮机中，空气经压气机增压燃烧后再去推动涡轮增大动力。在水轮泵中，水推动涡

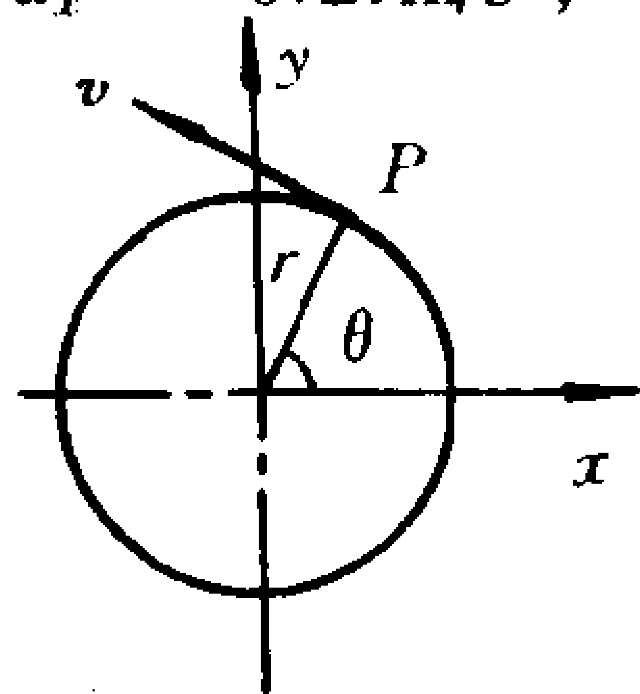
轮从而带动泵将低处的水压送高处。凡此种种都说明流体能量与机械功的相互转化在机械工程中是非常普遍的。动量矩方程式在叶轮式机械中的应用也是非常广泛的。

习　题

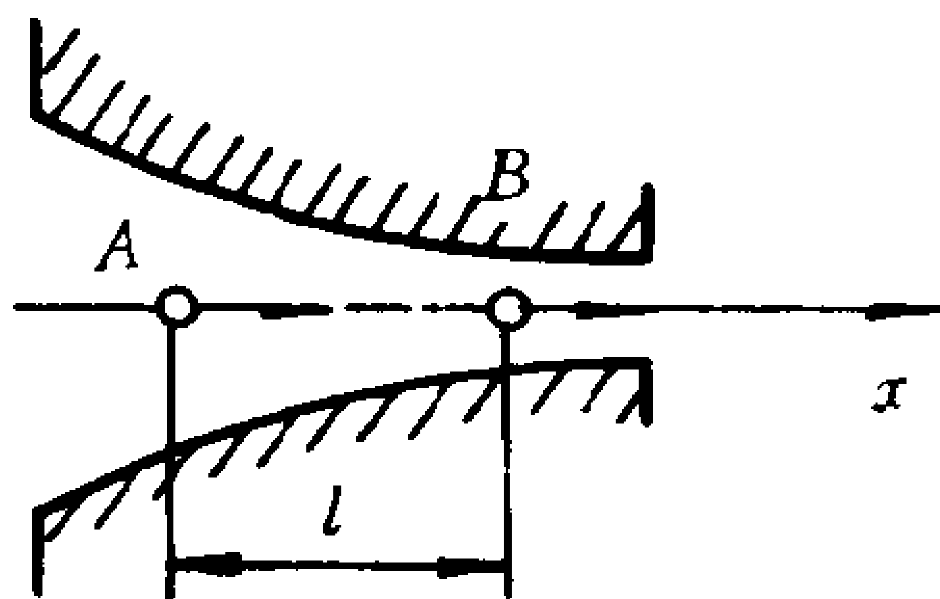
3-1. 二元、定常的逆时针转动流动中，已知 P 点($r=2\ \mathrm{m},\theta=60^\circ$)的切速度为 $v=1.04\ \mathrm{m/s}$，试求该点在 x,y 方向上的速度和加速度分量。

[答：$v_x=-0.9\ \mathrm{m/s}$，　$v_y=0.52\mathrm{m/s}$，

$a_x=-0.27\mathrm{m/s^2}$，　$a_y=-0.47\mathrm{m/s^2}$]



题 3-1 图



题 3-3 图

3-2. 二元不可压缩流场中

$$v_x=5x^3,\quad v_y=-15x^2y$$

试求($x=1\ \mathrm{m},y=2\ \mathrm{m}$)点上的速度和加速度。

[答：$v=30.41\ \mathrm{m/s}$，　$a=167.7\ \mathrm{m/s^2}$]

3-3. 流体质点速度沿 x 方向成线性规律变化，已知相距 $l=50\ \mathrm{cm}$ 两点的速度为 $v_A=2\mathrm{m/s}, v_B=6\mathrm{m/s}$。流动是定常的，试求 A、B 两点的质点加速度。

[答：$a_A=16\ \mathrm{m/s^2}$，　$a_B=48\ \mathrm{m/s^2}$]

3-4. 已知流场的速度为

$$v_x=2kx\quad v_y=2ky\quad v_z=-4kz$$

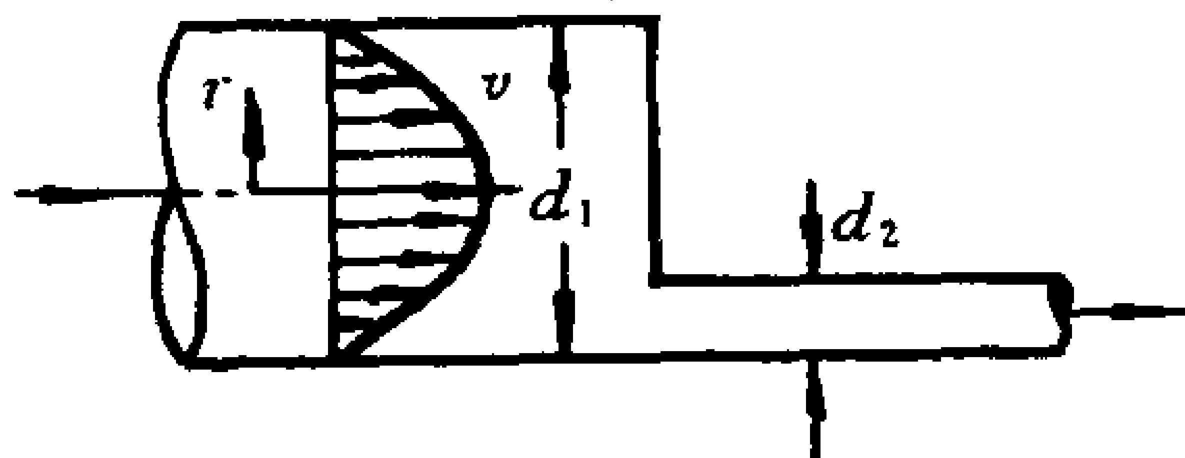
式中 k 为常数，试求通过(1,0,1)点的流线方程。

$\left[答：y=0, z=\dfrac{1}{x^2}\right]$

3-5. 已知流场的速度为 $v_x=1+At$，$v_y=2x$，试确定 $t=t_0$ 时通过(x_0,y_0)点的流线方程。A 为常数。

[答：$y-y_0=\frac{1}{1+At_0}(x^2-x_0^2)$]

3-6. 大管直径 $d_1=5$ m，小管直径 $d_2=1$ m，已知大管中过流断面上的速度分布为 $v=6.25-r^2$ m/s(式中 r 表示点所在半径、以 m 计)。



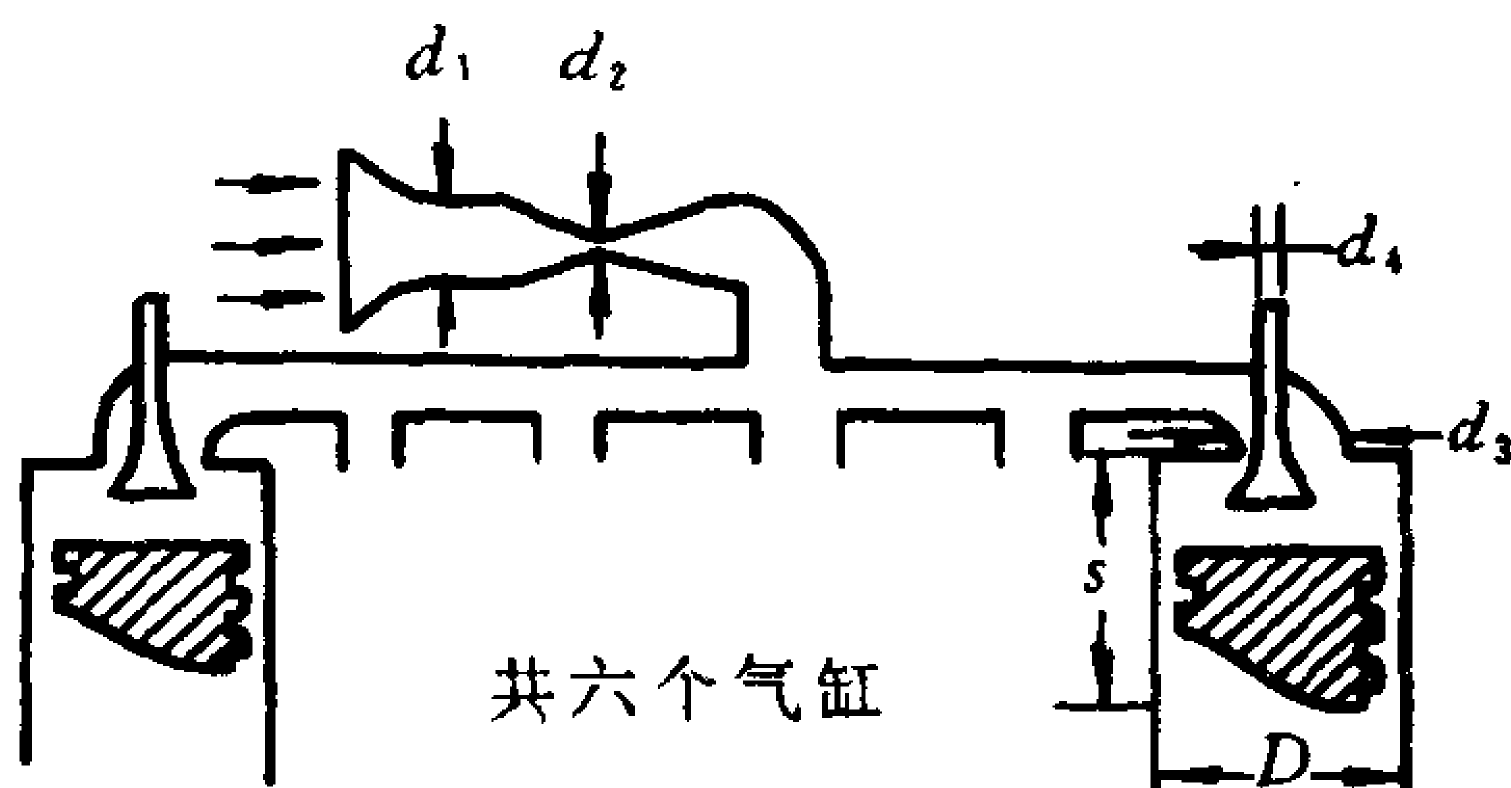
题 3-6 图

试求管中流量及小管中的平均速度。

[答：$q_V=61.36$ m³/s，$v=78.13$ m/s]

3-7. 四冲程六缸汽油发动机进气管路如图，试求进入发动机的空气质量流量 q_m 及进气管、喉部、气门处的气流速度 v_1、v_2、v_3。已知条件如下：

环境大气压 $p=101\ 300$ Pa，环境气温 $t=20$ ℃，进气管直径 $d_1=6$ cm，喉部直径 $d_2=3$ cm，气门直径 $d_3=2.5$ cm，气门杆直径 $d_4=0.8$ cm，气缸直径 $D=10$ cm，活塞冲程 $s=12$ cm，发动机曲轴转速 $n=2\ 500$ r/min，由于进

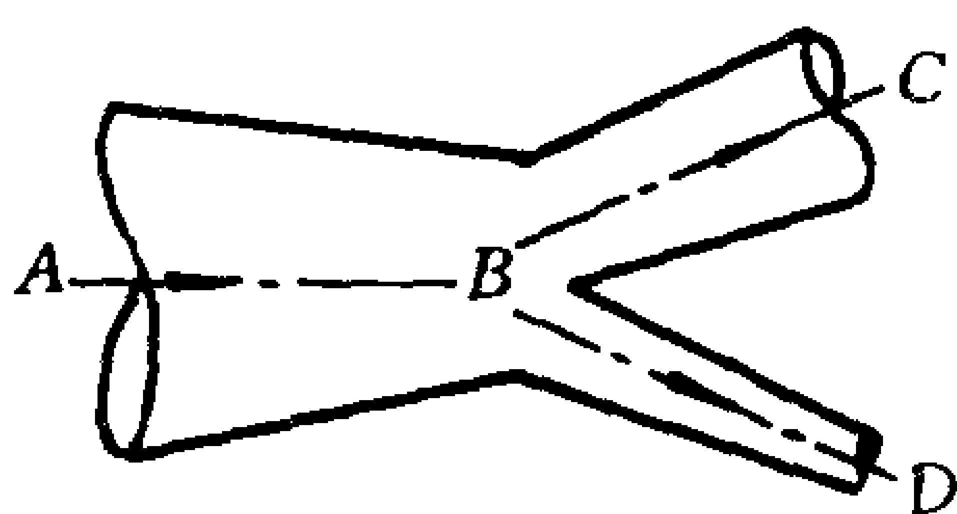


题 3-7 图

排气重叠，实际进气量与理论容积之比称为充气系数，充气系数 $\eta_v=0.8$，四冲程发动机每两转，六缸各吸气一次，据此计算理论容积。

[答：$q_m=0.11$ kg/s、$v_1=33.3$ m/s、$v_2=133.3$ m/s、$v_3=35.6$ m/s]

3-8. 管路 AB 在 B 点分为 BC、BD 两支，已知 $d_A=45$ cm，$d_B=30$ cm，$d_C=20$ cm，$d_D=15$ cm，$v_A=2$ m/s，$v_C=4$ m/s。



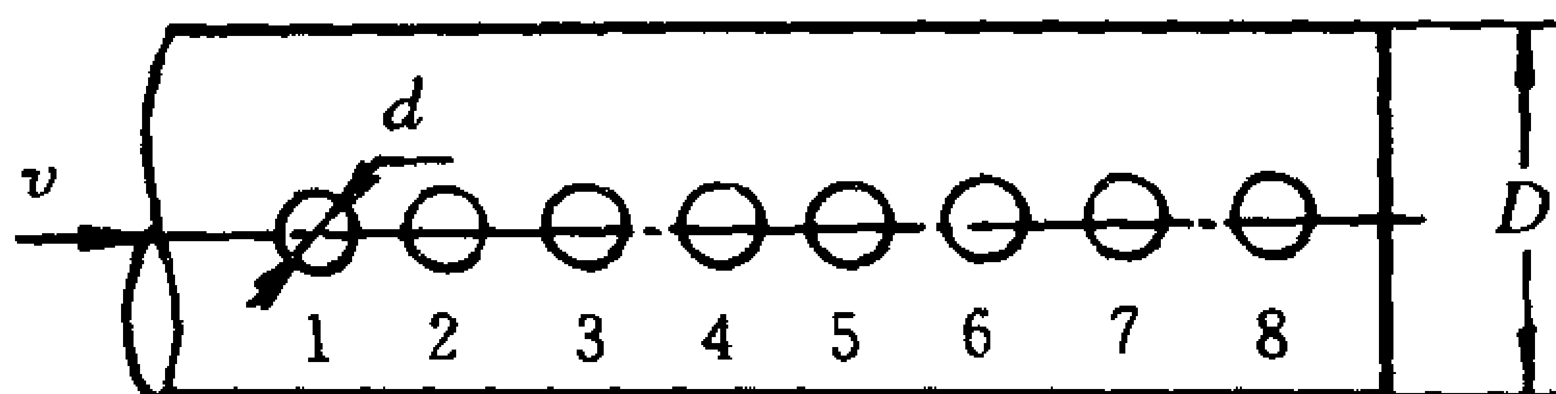
题 3－8 图

试求 v_B、v_D。

[答：$v_B = 4.5$ m/s，$v_D = 10.88$ m/s]

3－9．以平均速度 $v = 0.15$ m/s 流入直径为 $D = 2$ cm 的排孔管中的液体，全部经 8 个直径 $d = 1$ mm 的排孔流出，假定每孔出流速度依次降低 2%，试求第一孔与第八孔的出流速度各为多少？

[答：$v_1 = 8.04$ m/s，　$v_8 = 6.98$ m/s]

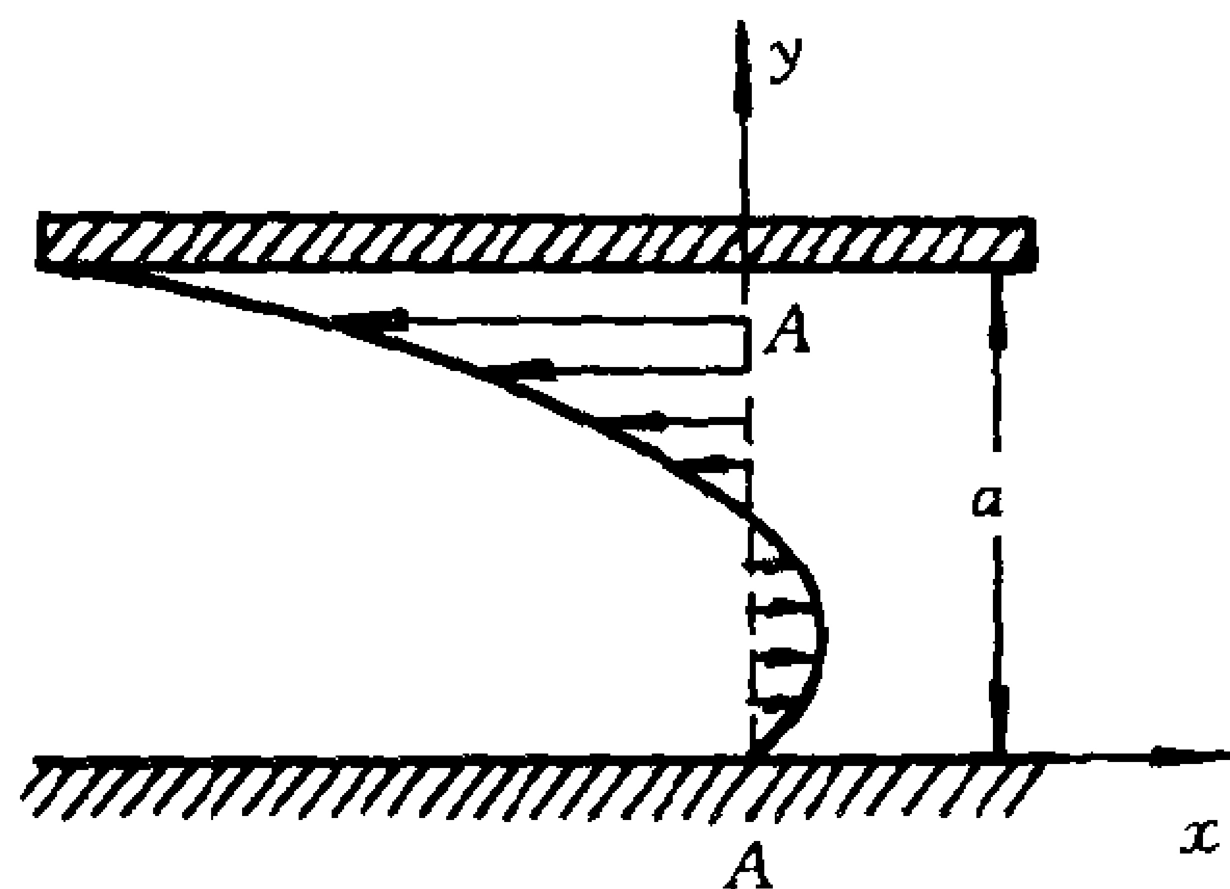


题 3－9 图

3－10．平行平板间 AA 断面上的速度分布为

$$v = \frac{10}{a}\left(y - \frac{2y^2}{a}\right)$$

a 为断面高度，垂直于纸面宽度为 1 单位。试求断面上的流量和平均速度。



题 3－10 图

[答：$q_V=-\frac{5}{3}a$ 单位，$v=-\frac{5}{3}$ 单位，方向向左]

3-11. 三元不可压缩流场中，已知

$$v_x=x^2+y^2z^3$$

$$v_y=-(xy+yz+zx)$$

且已知 $z=0$ 处 $v_z=0$，试求流场中的 v_z 表达式

[答：$v_z=-xz+\frac{z^2}{2}$]

3-12. 二元不可压缩流场中，已知圆周方向的分速度为 $v_\theta=-\frac{c}{r^2}\sin\theta$，试求径向分速度 v_r 与合速度 v。

[答：$v_r=-\frac{C}{r^2}\cos\theta, v=\frac{C}{r^2}$]

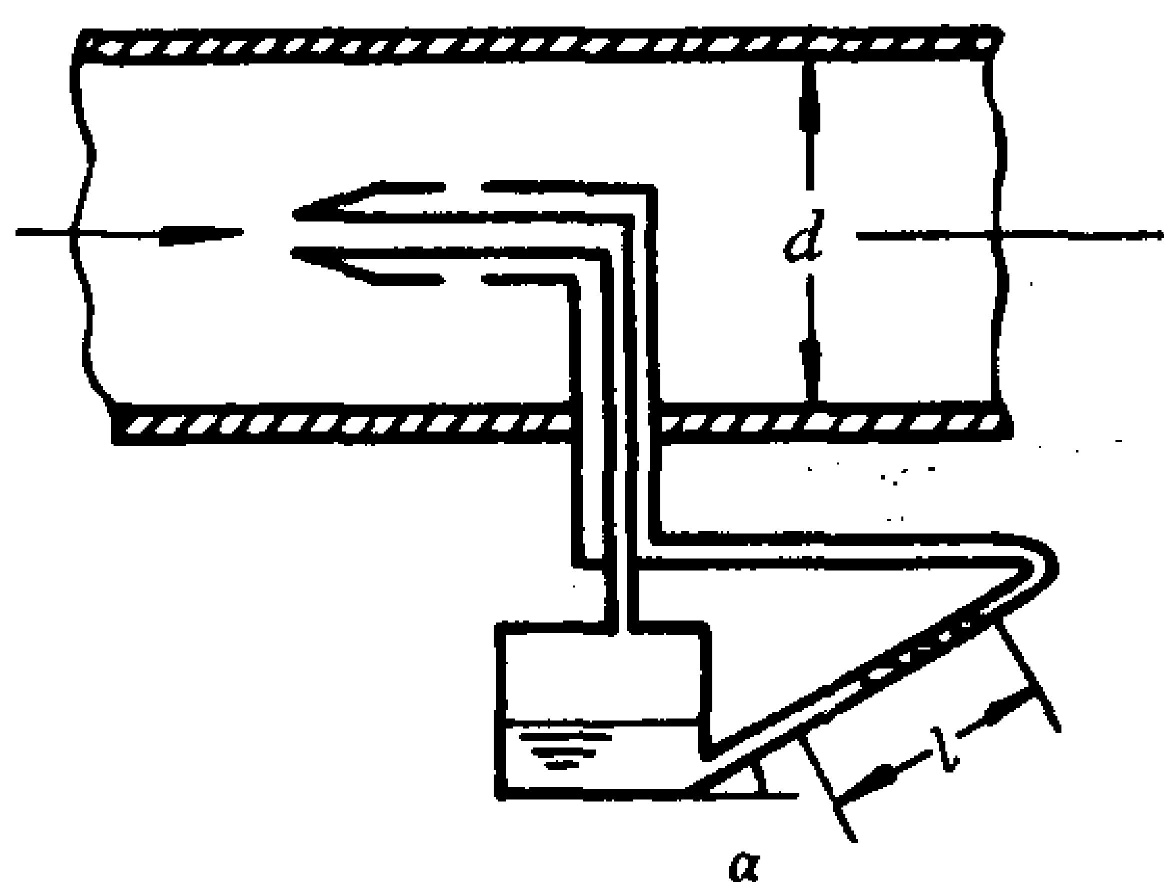
3-13. 水平放置的水管，直径由 $d_1=15$ cm 收缩到 $d_2=7.5$ cm，已知 $p_1=4g$ N/cm^2　$p_2=1.5g$ N/cm^2（g 为重力加速度），不计损失，试求管中流量。

[答：$q_V=0.101$ m^3/s]

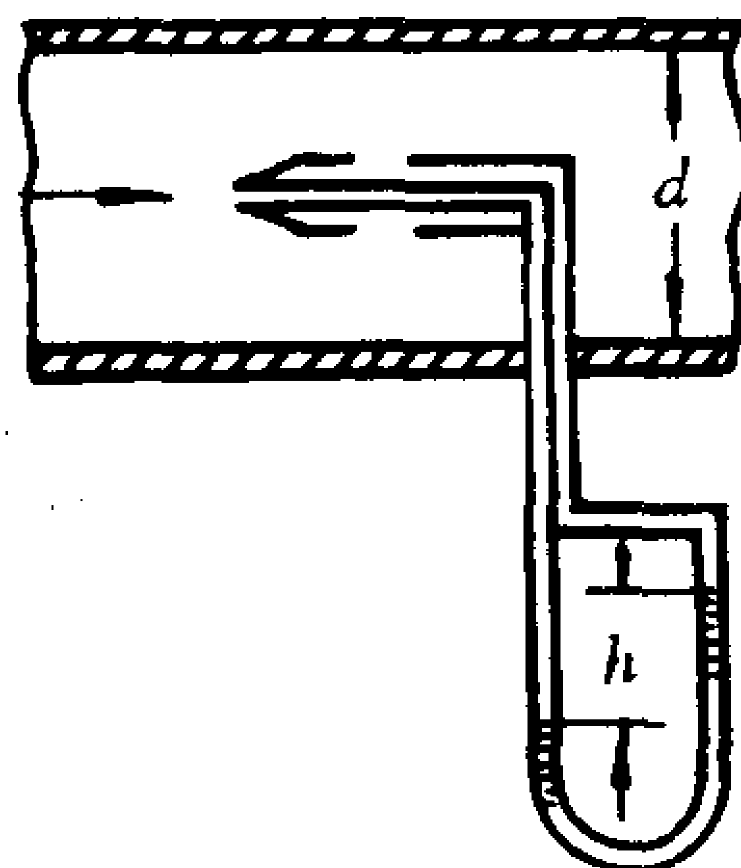
3-14. 用皮托静压管测量气体管道轴心的速度 v_{max}，皮托静压管与倾斜酒精差压计相连，$v_{max}=1.2\bar{v}$。

已知 $d=200$ mm，$\sin\alpha=0.2$，$l=75$ mm，气体密度为 1.66 kg/m^3、酒精密度为 800 kg/m^3，试求气体质量流量。

[答：$q_m=0.52$ kg/s]



题 3-14 图



题 3-15 图

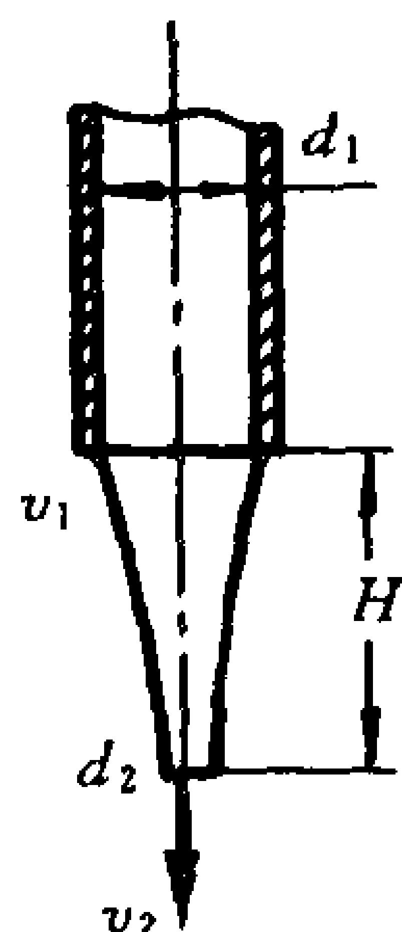
3-15. 皮托静压管与汞差压计相连，借以测定水管中的最大轴向速度

v_{max},已知 $h=400$ mm,$d=200$ mm,$v_{max}=1.2\bar{v}$,试求管中的流量。

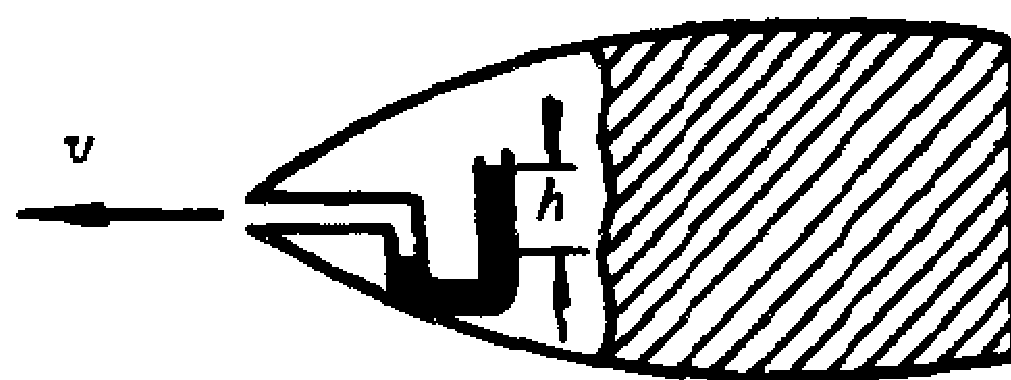
[答 $q_V=261$ l/s]

3-16. 油从铅直圆管向下流出。管直径 $d_1=10$ cm,管口处的速度为 $v_1=1.4$ m/s,试求管口下方 $H=1.5$ m 处的速度和油柱直径。

[答:$v_2=5.6$ m/s,$d_2=5$ cm]



题 3-16 图

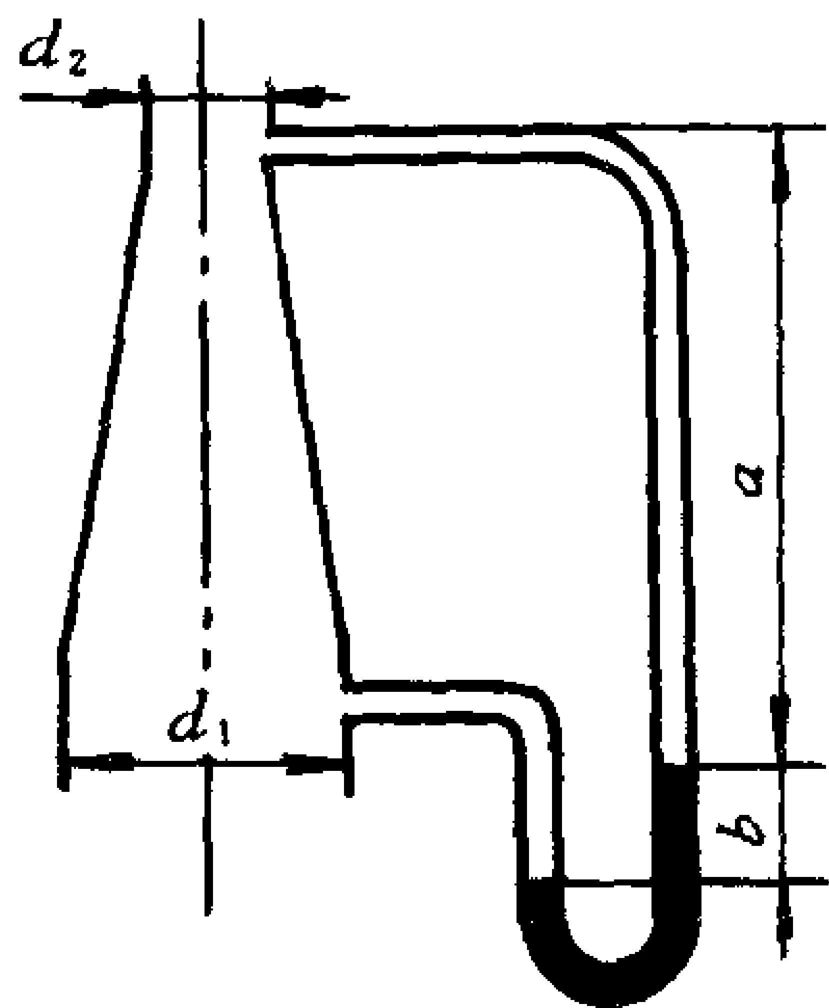


题 3-17 图

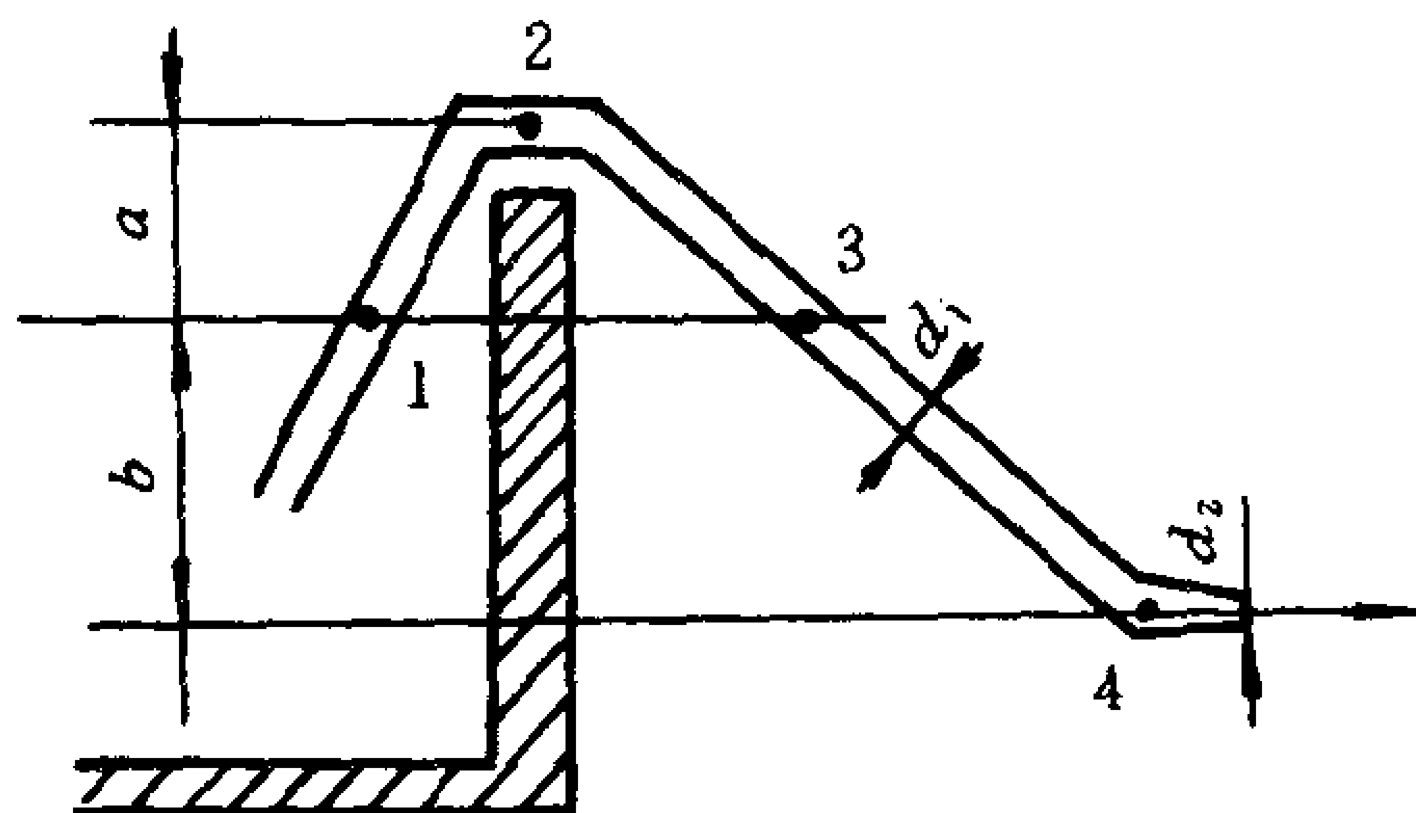
3-17. 潜艇水平运动时,前舱皮托管汞 U 形管上读数为 $h=17$ cm,海水相对密度为 1.026,皮托管流速系数 $C_v=0.98$,试求潜艇航速。

[答:$v=6.266$m/s]

3-18. 水自下而上流动,已知:$d_1=30$ cm,$d_2=15$ cm,U 形管中装有汞,$a=80$ cm、$b=10$ cm,试求流量。



题 3-18 图



题 3-19 图

[答：$q_V = 0.091\ m^3/s$]

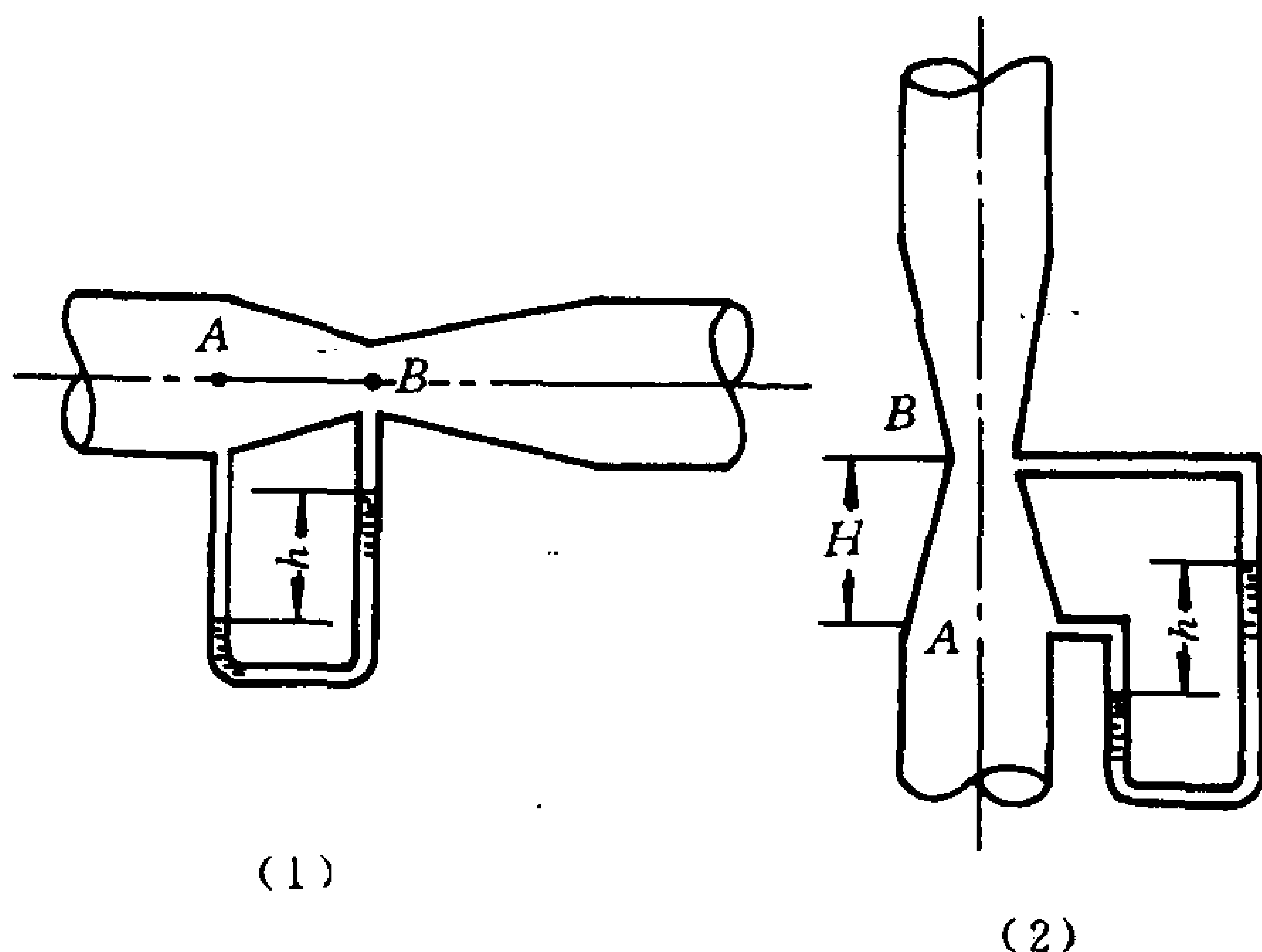
3－19. 虹吸管直径 $d_1 = 10$ cm，管路末端喷嘴直径 $d_2 = 5$ cm，$a = 3$ m，$b = 4.5$ m，管中充满水流并由喷嘴射入大气，忽略摩擦，试求 1、2、3、4 点的计示压强。

[答：$p_1 = -2.8$ kPa，$p_2 = -32$ kPa，$p_3 = -2.8$ kPa，$p_4 = 41$ kPa]

3－20. 用 U 形汞差压计测量变截面水管中 A、B 两点的压强差。

已知：$h = 10$ cm，$H = 20$ cm，试求水管水平与垂直两种情况下的压强差 $p_A - p_B$。

[答：水平时 $p_A - p_B = 12.36$ kPa，垂直时 $p_A - p_B = 14.32$ kPa]



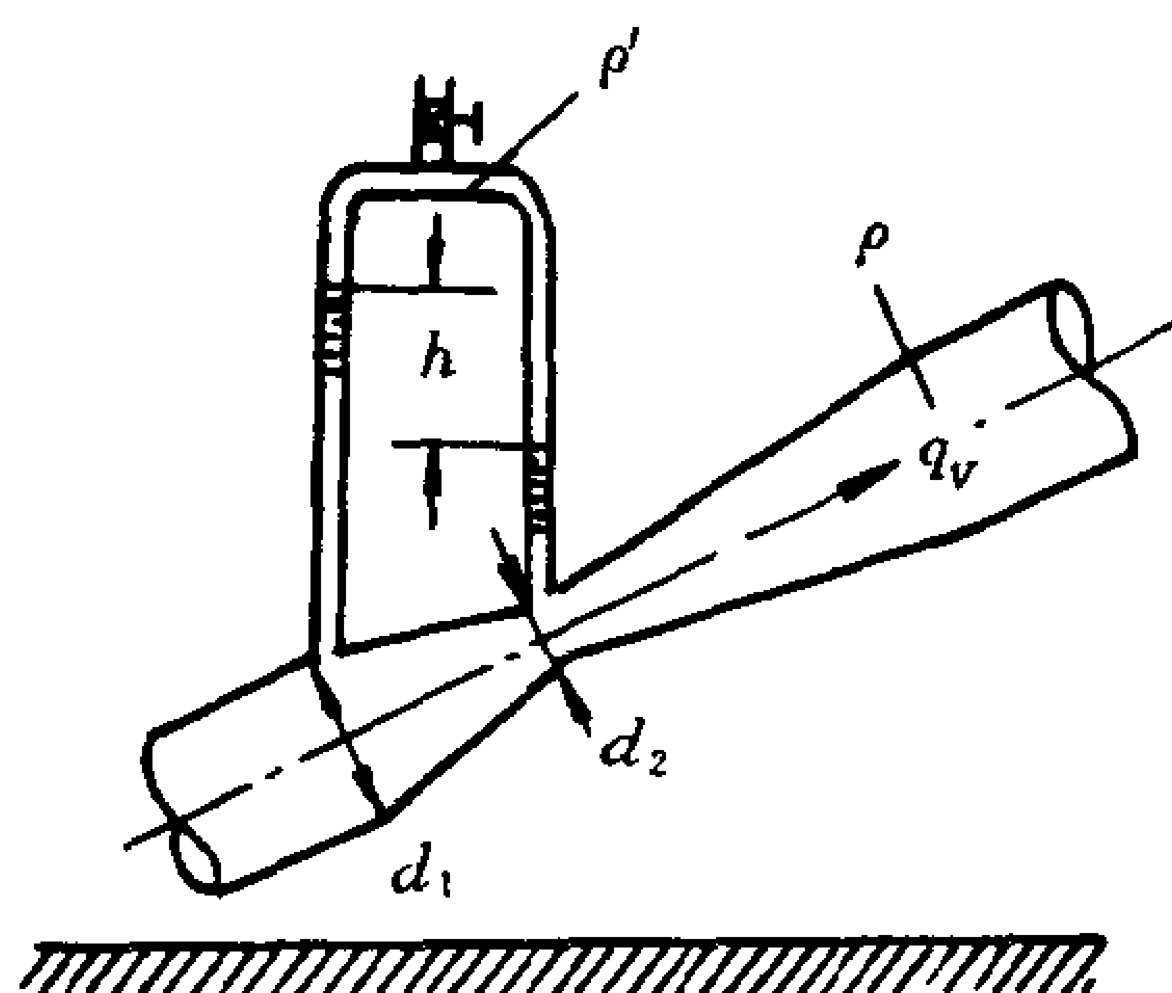
题 3－20 图

3－21. 倾斜水管上的文丘里流量计 $d_1 = 30$ cm，$d_2 = 15$ cm，倒 U 形差压计中装有相对密度为 0.6 的轻质不混于水的液体，其读数为 $h = 30$ cm，收缩管中的水头损失为 d_1 管中速度水头的 20%，试求喉部速度 v_2 与管中流量 q_V。

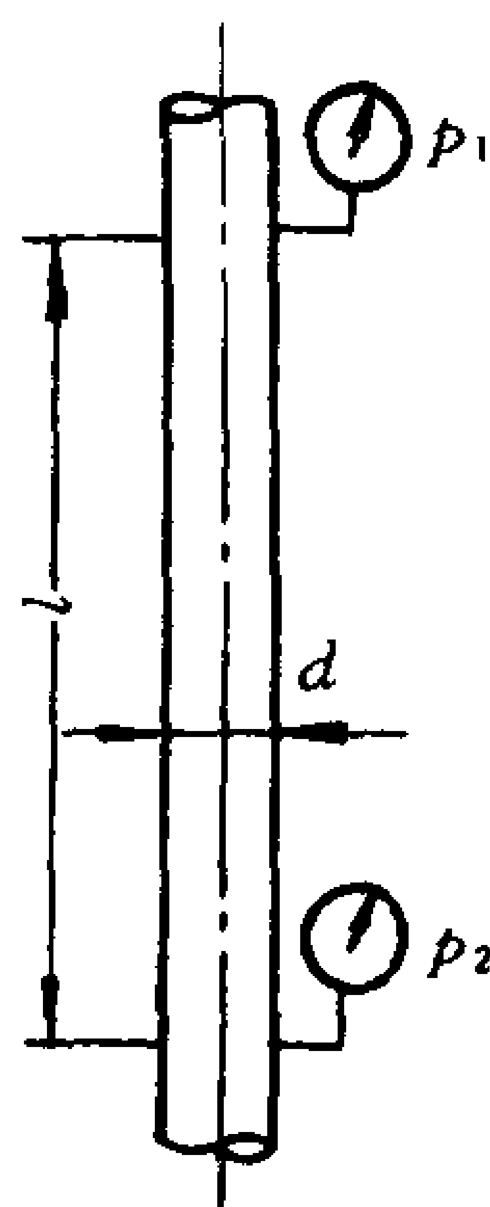
[答：$v_2 = 1.574$ m/s，$q_V = 0.027\,8\ m^3/s$]

3－22. 在铅直管道中有密度 $\rho = 900\ kg/m^3$ 的原油流动，管道直径 $d = 20$ cm，在 $l = 20$ m 的两处读得 $p_1 = 196.2$ kPa，$p_2 = 588.6$ kPa。试问流动方向如何？损失水头多少？

[答：向上，$h_f = 24.4$ m 油柱]



题 3－21 图

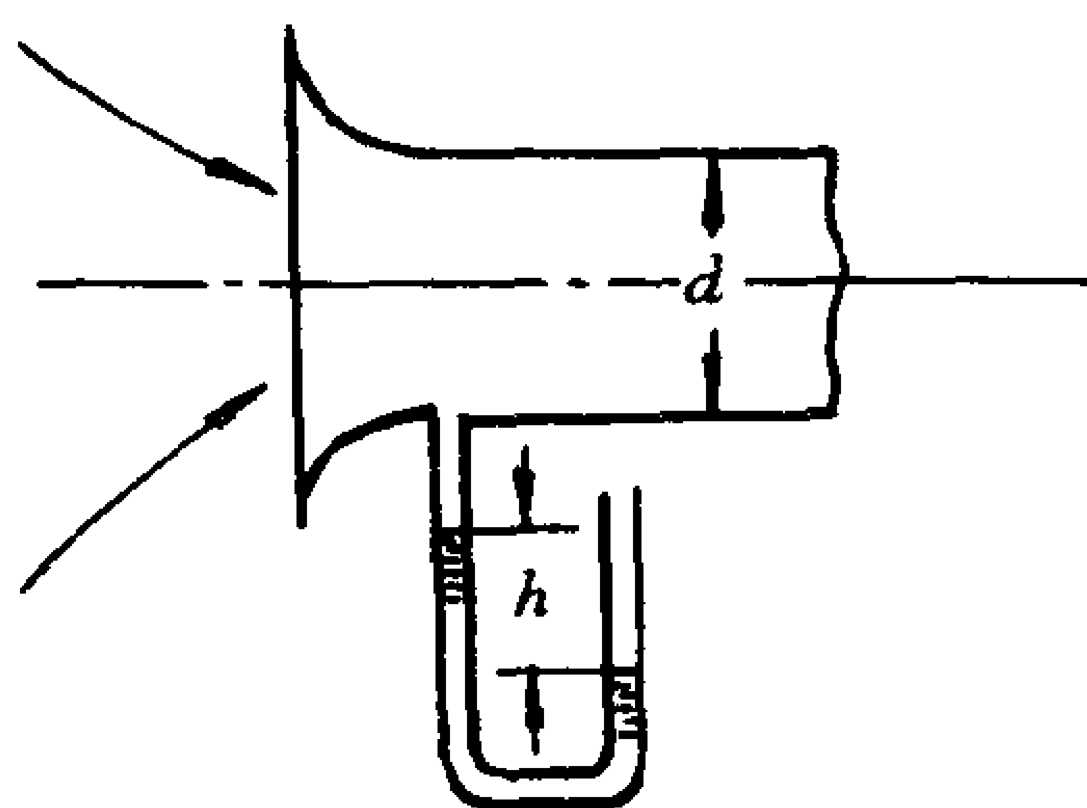


题 3－22 图

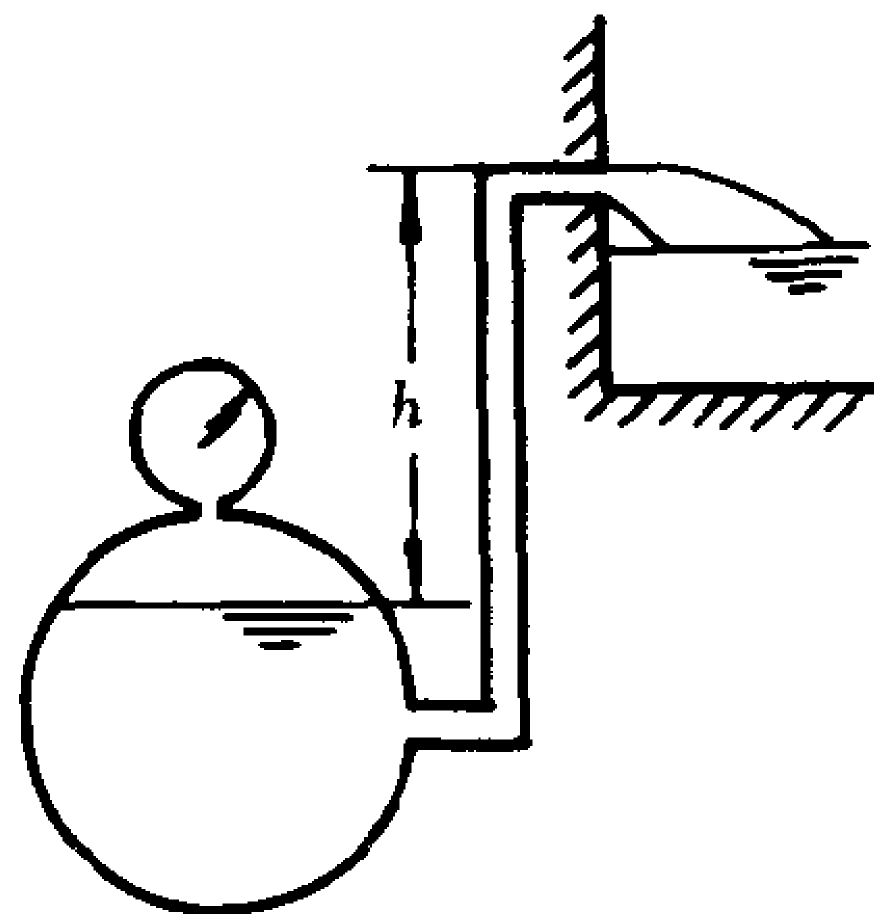
3－23. 压气机进气管直径 $d=200$ mm，汞柱测压计读数为 $h=20$ mm，流量系数为 0.98，空气密度为 1.25 kg/m^3，试求压气机的空气流量。

[答：$q_V=2$ m^3/s]

3－24. 用密封水罐向 $h=2$ m 高处供水，要求供水量为 $q_V=15$ l/s，管道直径 $d=5$ cm，水头损失为 50 cm 水柱，试求水罐所需要的压强 p 是多少？



题 3－23 图



题 3－24 图

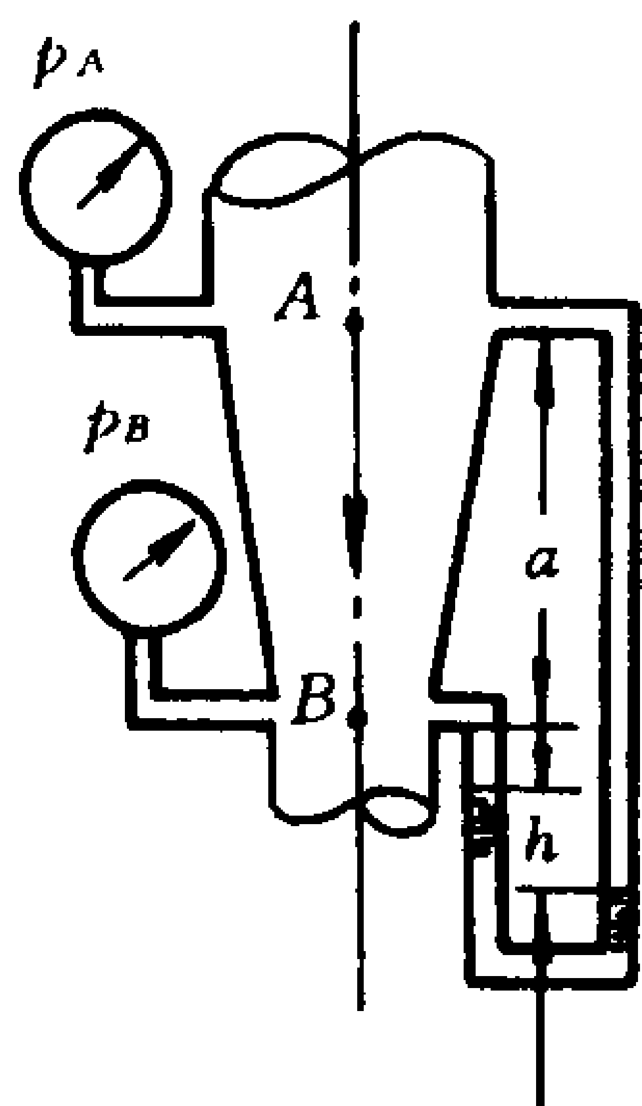
[答：53.66 kPa]

3－25. 已知 $d_A=15$ cm，$d_B=7.5$ cm，$a=2.4$ m，水的流量 $q_V=0.02$ m^3/s，$p_B-p_A=11\ 772$ N/m^2。

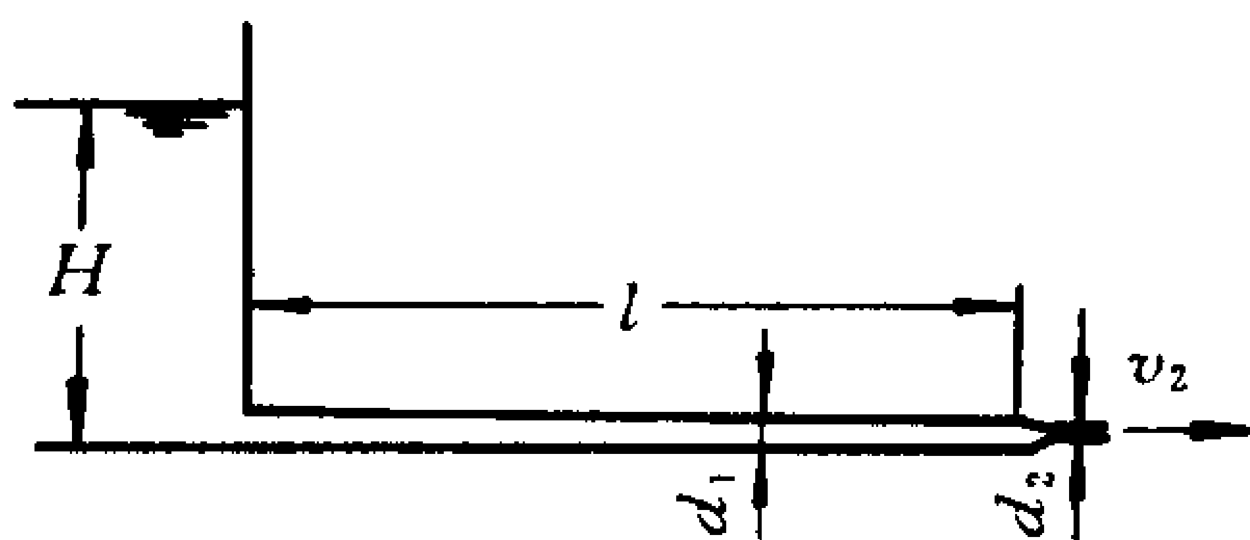
(1) 如果 AB 之间的水头损失表示为 $\zeta\dfrac{v_A^2}{2g}$，试求 ζ 值。

(2) 求汞差压计中的读数 h。

[答:$\zeta=3.4$,　$h=9.5$ cm]



题 3－25 图

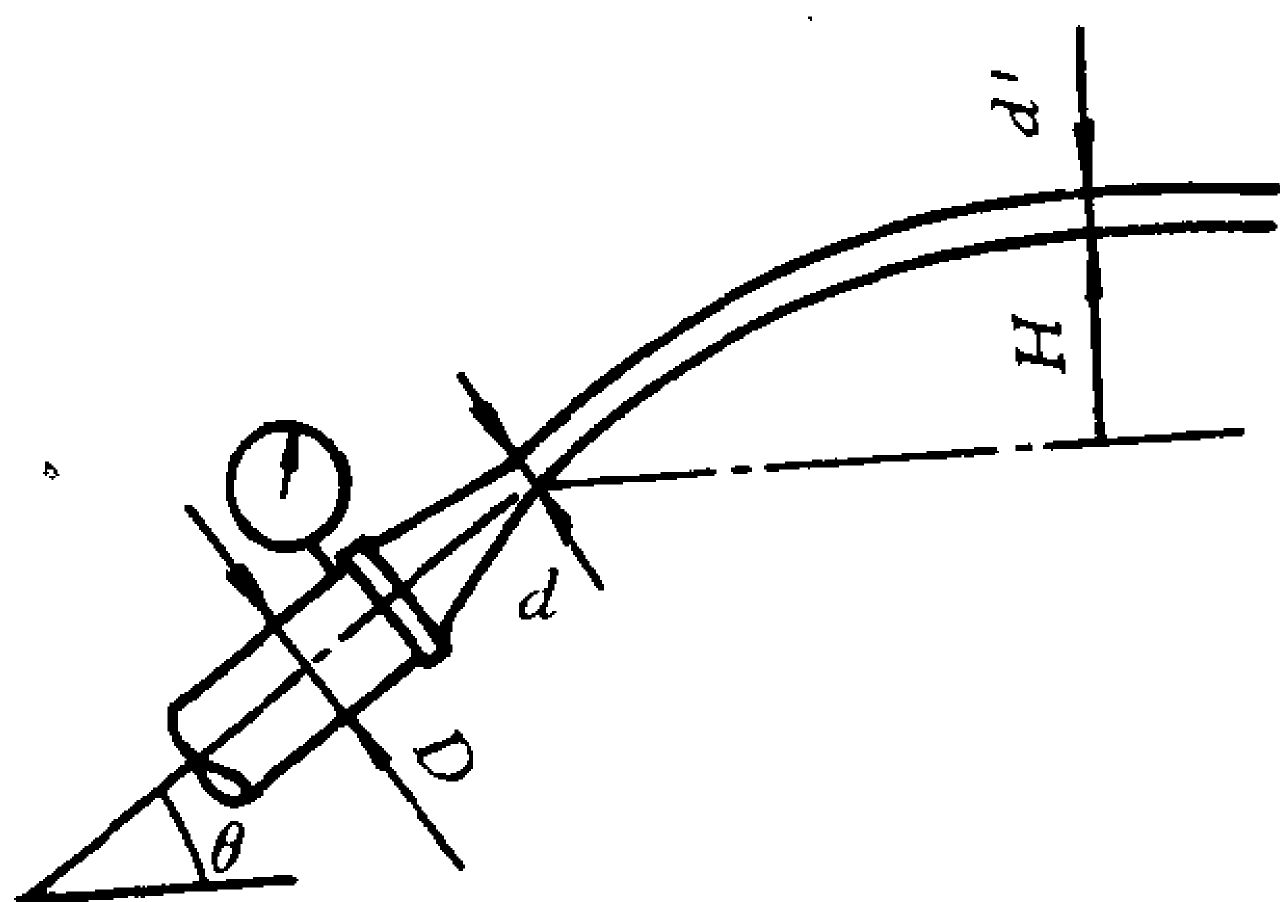


题 3－26 图

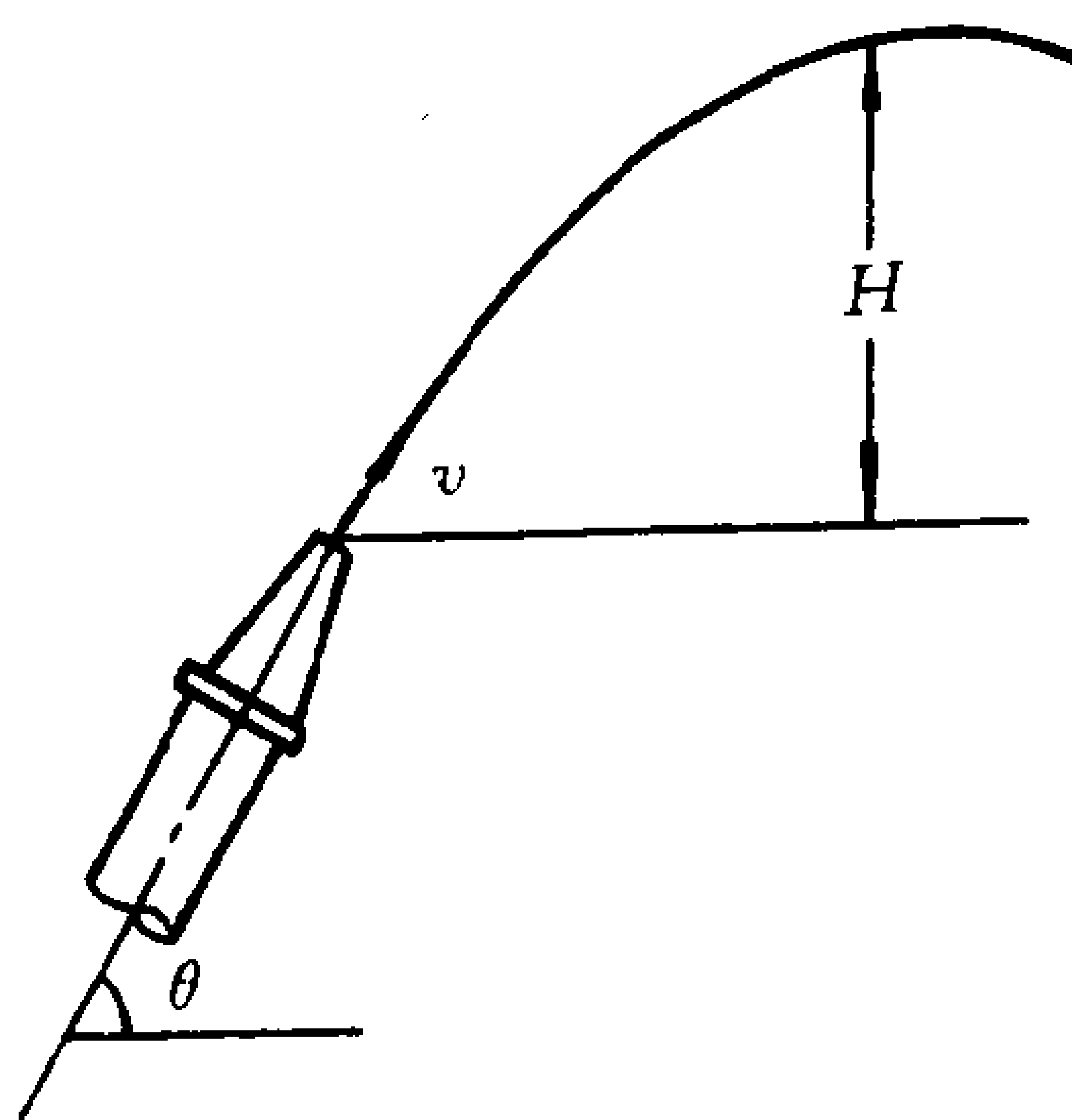
3－26. 管道 $l=1\ 500$ m,$d_1=30$ cm,$H=200$ m,$\lambda=0.02$,出口端的喷嘴出口直径 $d_2=5$ cm,其流速系数为 $C_v=0.97$,试求水的射流速度 v_2、射流流量 q_V 和射流功率 P。

[答:$v_2=58.67$ m/s,$q_V=0.115$ m^3/s,$P=197.9$ kW]

3－27. 喷嘴直径 $d=75$ mm,水管直径 $D=150$ mm,水枪倾斜角 $\theta=30°$,压强表读数 $h=3$ m 水柱。试求水枪的出口速度 v,最高射程 H,最高点



题 3－27 图



题 3－28 图

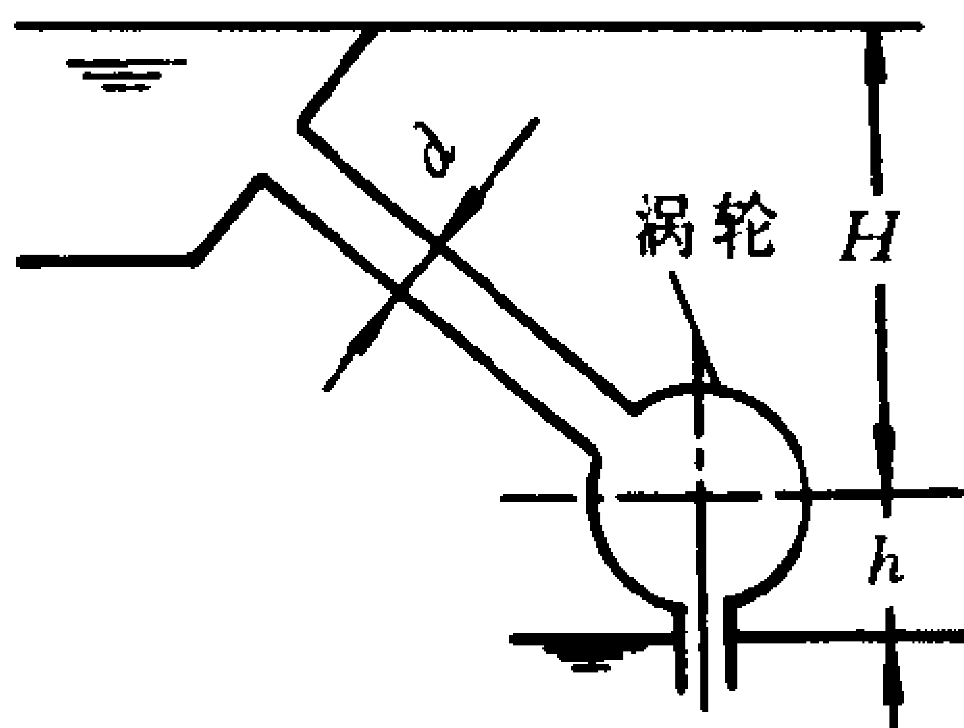
处的射流直径 d'。

[答：$v=7.92$ m/s，$H=0.8$ m，$d'=81$ mm]

3-28. 由喷嘴射出速度 $v=7$ m/s的自由射流，欲达到 $H=2$ m，试问喷嘴轴线的倾斜角 θ 是多少？

[答：$\theta=63°30'$]

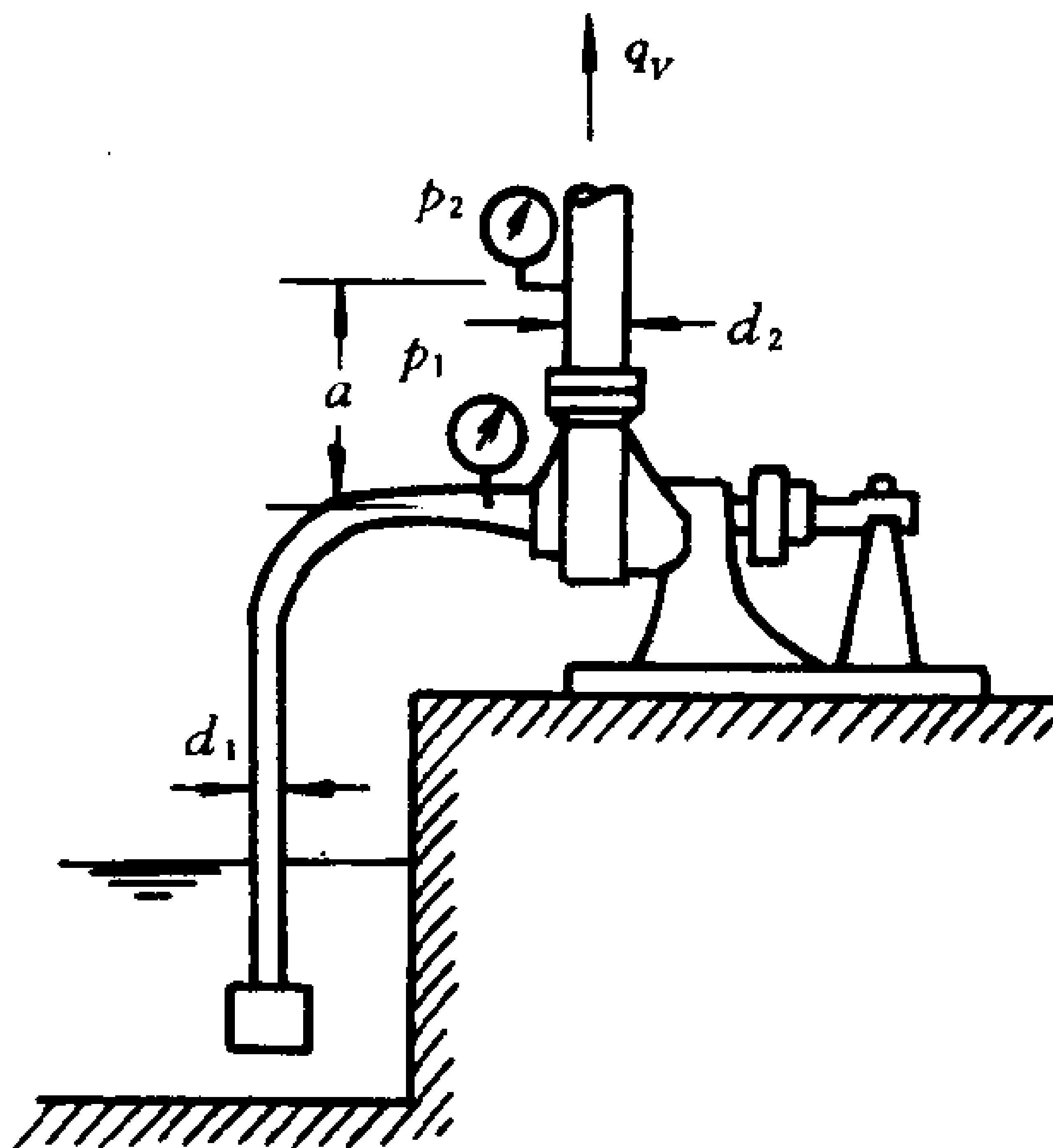
3-29. 在直径 $d=1$ m的管道上安装有涡轮机，已知 $H=45$ m，$h=5$ m，涡轮机流量为 $q_V=1\ \mathrm{m^3/s}$，进水管与出水管的水头损失分别为管中速度水头的10倍和0.5倍，试求涡轮机进、出口的压强及涡轮机所得到的功率。



题 3-29 图

[答：$p_1=4.3\times10^5$ Pa，$p_2=-0.49\times10^5$ Pa，$P=482$ kW]

3-30. 在离心水泵的实验装置上测得吸水管上的计示压强 $p_1=$



题 3-30 图

$-0.4g\times10^4$ Pa,压水管上的计示压强 $p_2=2.8g\times10^4$ Pa(g 为重力加速度),$d_1=30$ cm,$d_2=25$ cm,$a=1.5$ m,$q_V=0.1$ m^3/s。试求水泵的输出功率。

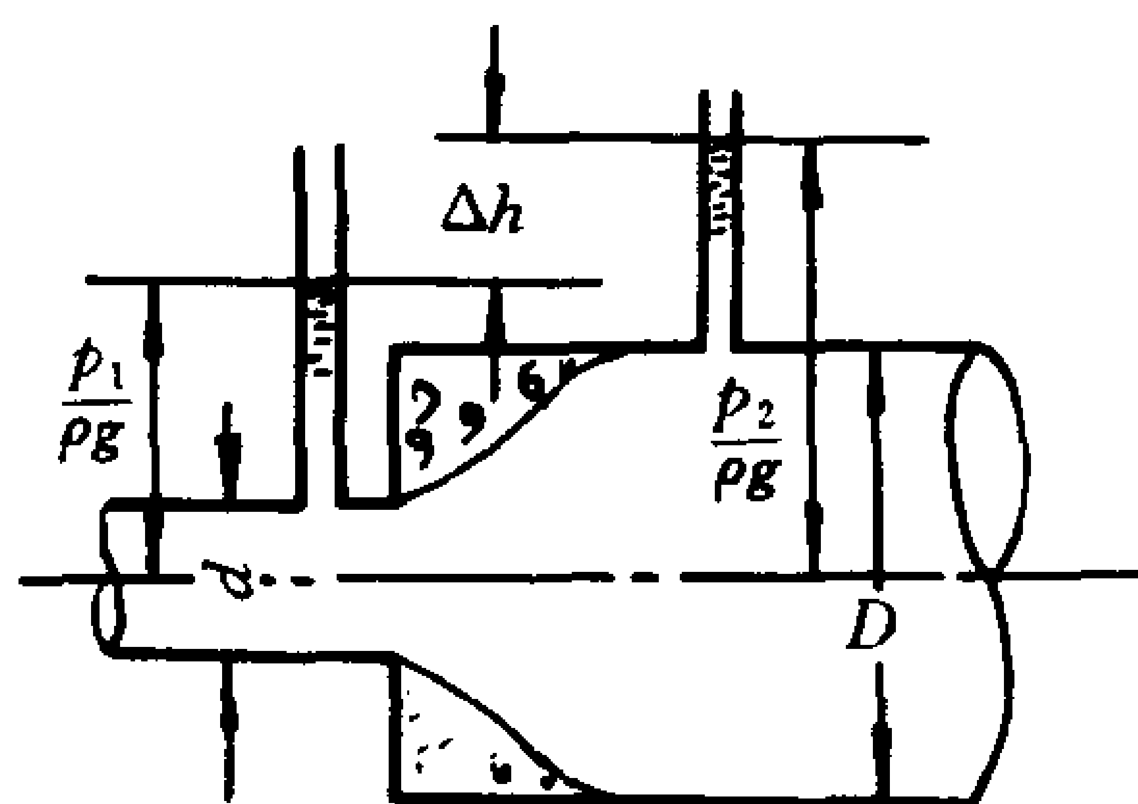
[答:$P=32.96$ kW]

3-31. 水在 $p_1=5\ 000$ kPa 压强下进入 $d_1=6$ cm 的管道,又在 $p_2=4\ 500$ kPa 压强下离开 $d_2=3$ cm 的管道,此二断面的垂直距离(即出口比入口高出的距离)为 4 m,流量 $q_V=42.4\times10^{-4}$ m^3/s,试求克服管道摩擦所消耗的功率。

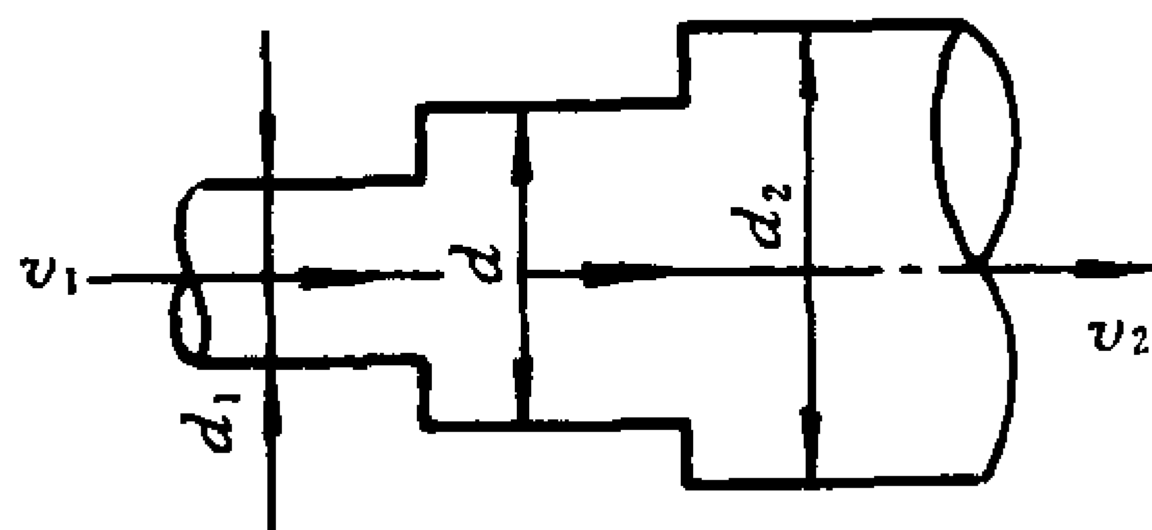
[答:$P=1.88$ kW]

3-32. 试确定突然扩大的直径比 $\frac{D}{d}$,以保证测压管的读数 Δh 可以得到极大值。

$\left[答:\frac{D}{d}=\sqrt{2}\right]$



题 3-32 图



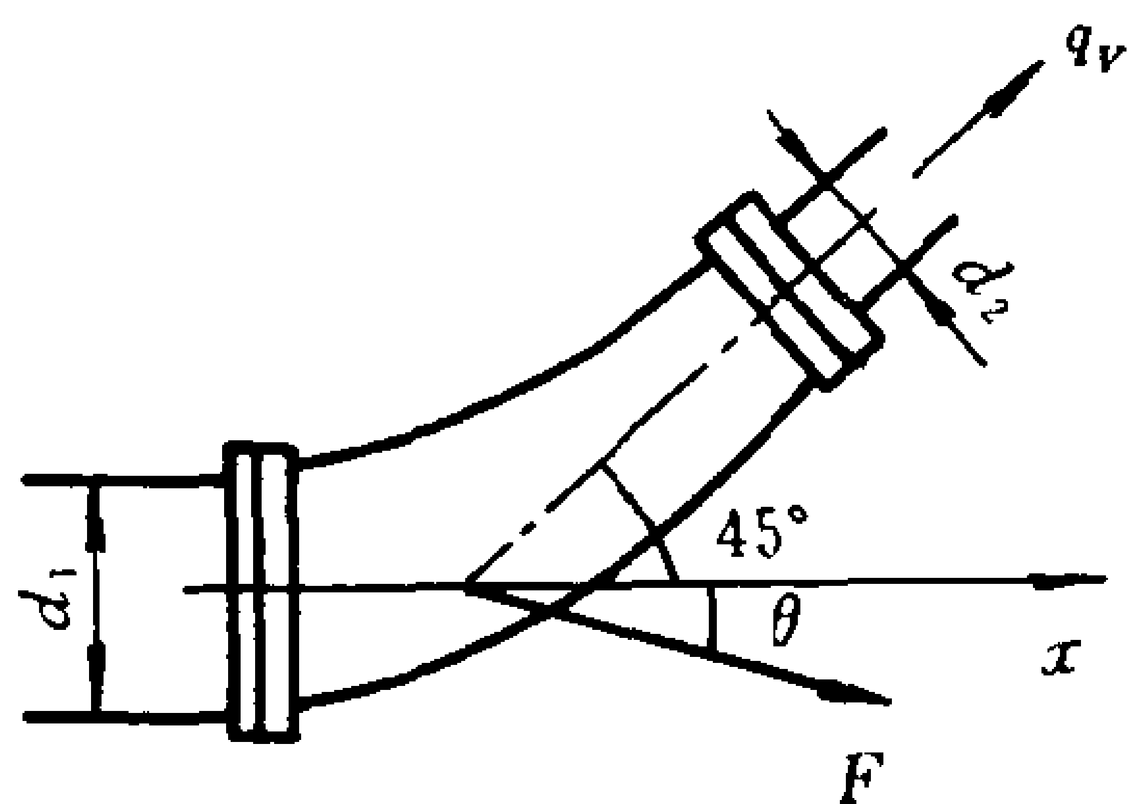
题 3-33 图

3-33. 从 d_1 变成 d_2 的突然扩大损失为 $\frac{(v_1-v_2)^2}{2g}$。为了减少损失,在 d_1 与 d_2 的管道之间再加一个尺寸 d 的管道,试问 d 取何值可使整体的损失为最小?此最小损失为多少?

$$\left[答:d=\frac{\sqrt{2}d_1d_2}{\sqrt{d_1^2+d_2^2}},h_f=\frac{1}{2}\left[\frac{(v_1-v_2)^2}{2g}\right]\right]$$

3-34. 在水平平面上的45°弯管,入口直径 $d_1=600$ mm,出口直径 $d_2=300$ mm,入口压强 $p_1=140$ kPa,流量 $q_V=0.425$ m^3/s,忽略摩擦,试求水对弯管的作用力。

[答:$F=38.46$ kN,力的方向与 x 轴夹角 $\theta=2°42'$]

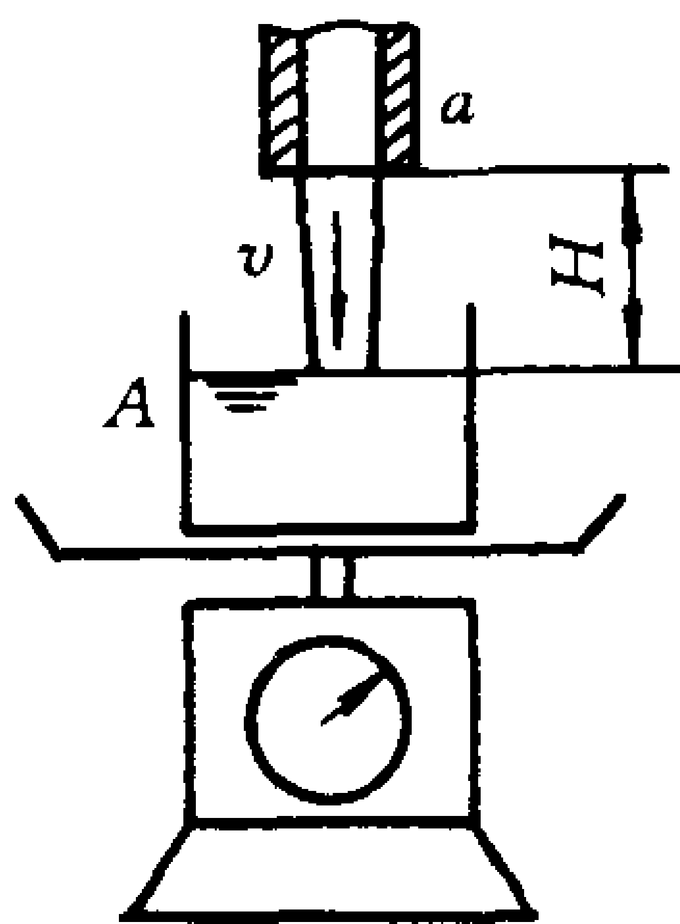


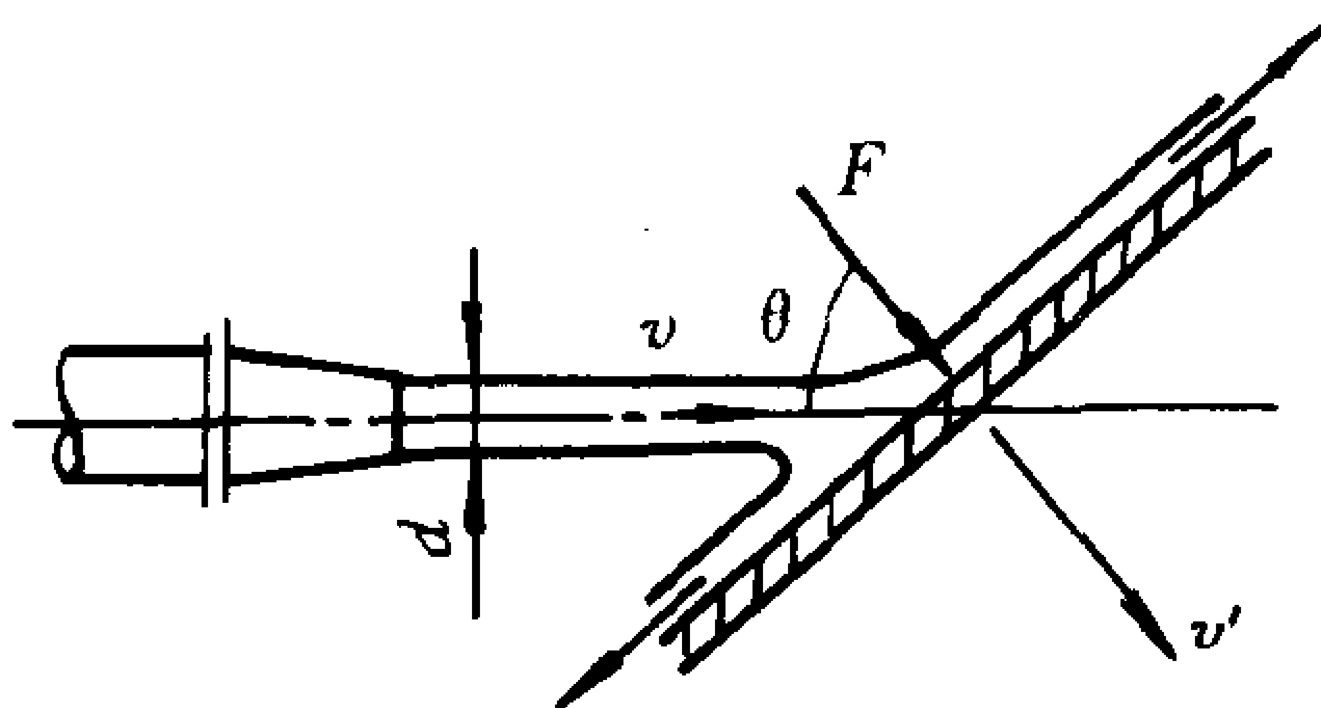
题 3－34 图

3－35. 量水桶放在磅秤上，若在水由垂直上方落入桶中的同时测量水桶的重力 W，问它比水桶的实际重力 W_0 相差多少？

已知管断面面积为 a，管出口处的速度是 v，管出口到水面的距离为 H，水桶断面面积为 A。

$$\left[答：W = W_0 + \rho va\left(\sqrt{v^2 + 2gH} + v\frac{a}{A}\right)\right]$$





题 3－35 图

题 3－36 图

3－36. 水射流直径 $d = 4$ cm，速度 $v = 20$ m/s，平板法线与射流方向的夹角 $\theta = 30°$，平板沿其法线方向运动速度 $v' = 8$ m/s。

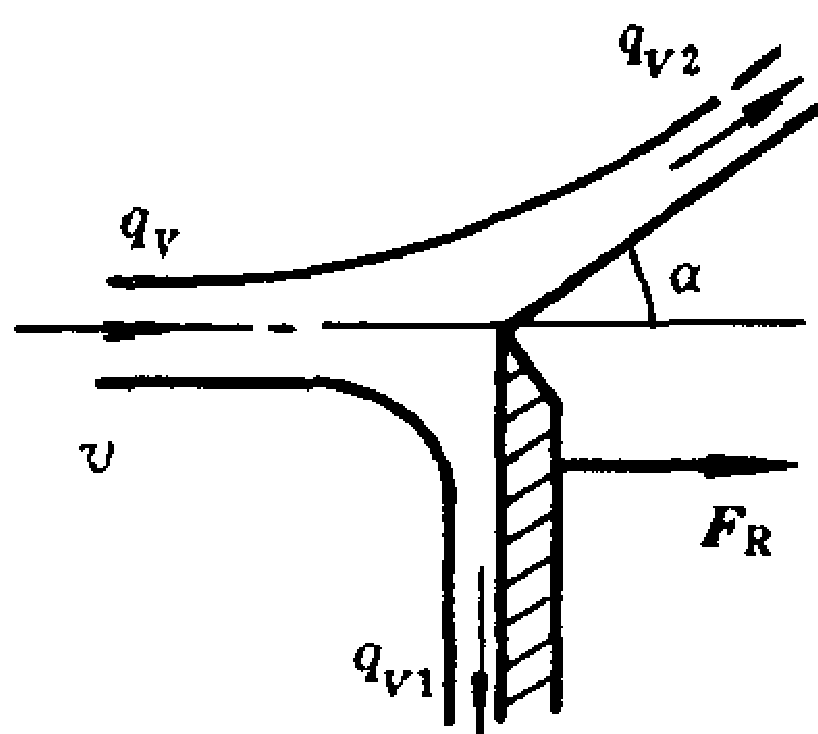
试求作用在平板法线方向上的力 F。

$$\left[答：F = \rho\frac{\pi}{4}d^2\frac{(v\cos\theta - v')^2}{\cos\theta} = 125.96\ \mathrm{N}\right]$$

3－37. 将锐边平板插入水的自由射流中，并使平板与射流垂直，该平板将射流分成两股，已知射流速度 $v = 30$ m/s，总流量 $q_V = 36$ l/s，$q_{V_1} = \frac{1}{3}q_V$，

$q_{V2}=\frac{2}{3}q_V$，试求射流偏转角 α 及射流对平板的作用力 F_R。

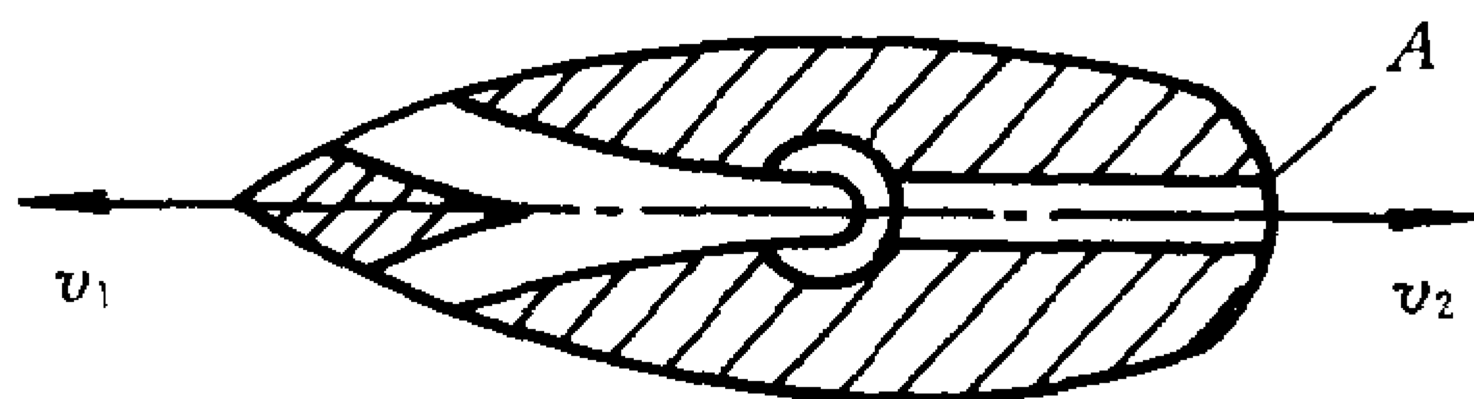
[答：$\alpha=30°$，$F_R=456.5$ N]



题 3－37 图

3－38. 喷射推进船航行速度 $v_1=54$ km/h，推进力 $F=4\ 000$ N，出口面积 $A=0.02\ m^2$，试求射流出口的速度 v_2 及推进装置的效率 η。

[答：$v_2=23.5$ m/s，　$\eta=0.46$]



题 3－38 图

3－39. 边长 $b=30$ cm 的正方形铁板闸门，上边铰链连接于 O，其重力为 $W=117.7$ N，水射流直径 $d=2$ cm 的中心线通过闸板中心 C，射流速度 $v=15$ m/s。

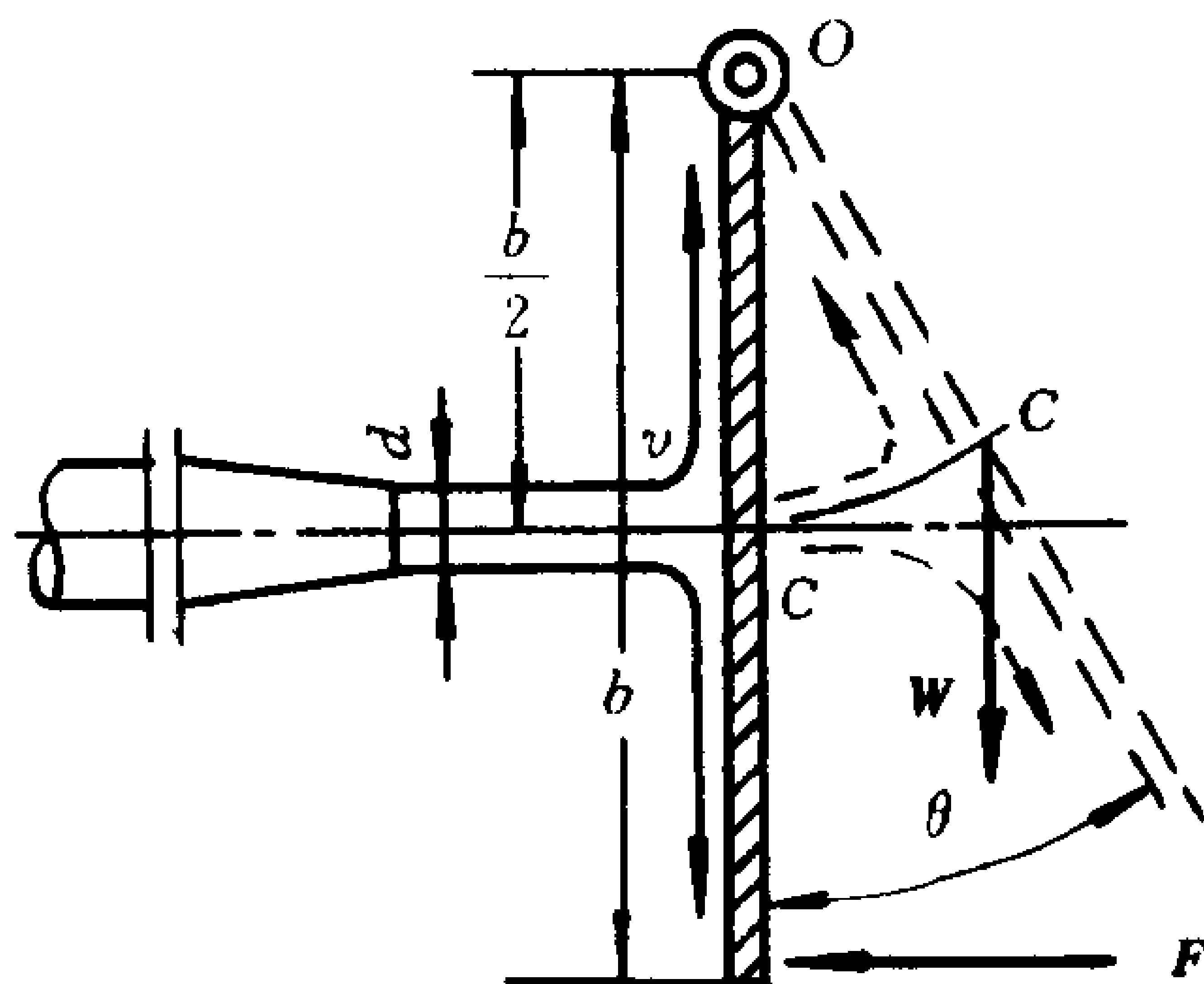
(1) 为使闸门保持垂直位置，在其下边应加多大的 F 力？

(2) 撤消 F 力后，闸门倾斜角 θ 是多少？忽略铰链摩擦。

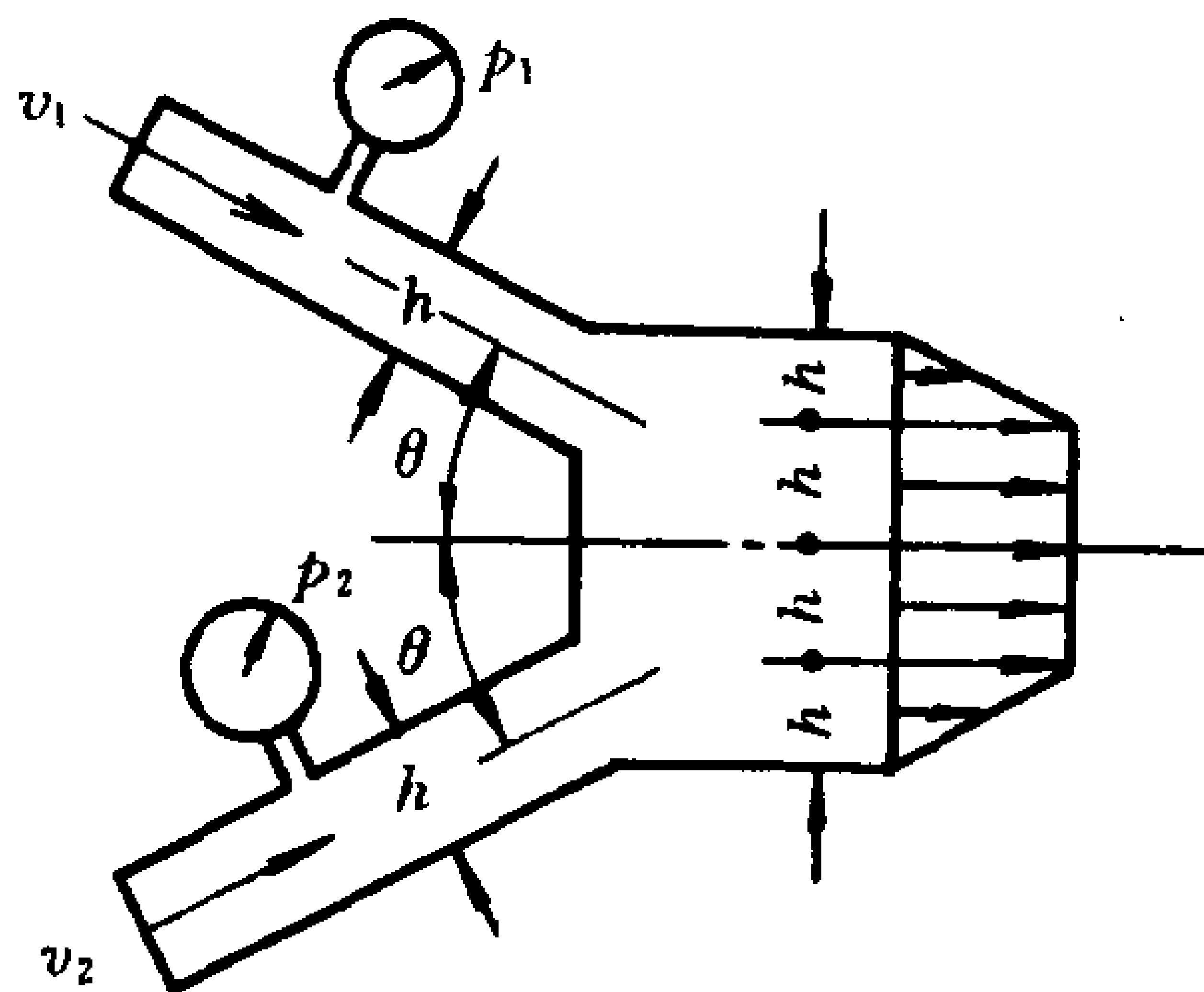
[答：$F=35.3$ N，　$\theta=36°52'$]

3－40. 混流器的横断面如图所示，两股水分别从左边两口流入。混合后经右边出口流出，混流器宽度 B(垂直于纸面)很大。任何横断面的流动情况与图示断面相同。

已知入口高度为 h，入口夹角为 θ，水的密度为 ρ，混流器宽度为 B，入口处计示压强为 p_1，入口处平均速度为 v_1。出口处为大气压，出口处的速度大小不知道，但速度分布如图所示：在中心两侧各为 h 的范围内速度相等，



题 3－39 图



题 3－40 图

在外侧各为 h 的范围内速度成线性分布，上、下壁面处速度为零。试求流体对混流器的总作用力。

$\left[答: F=2p_1 hB\cos\theta+\rho v_1^2 hB\left(2\cos\theta-\frac{32}{27}\right)\right]$

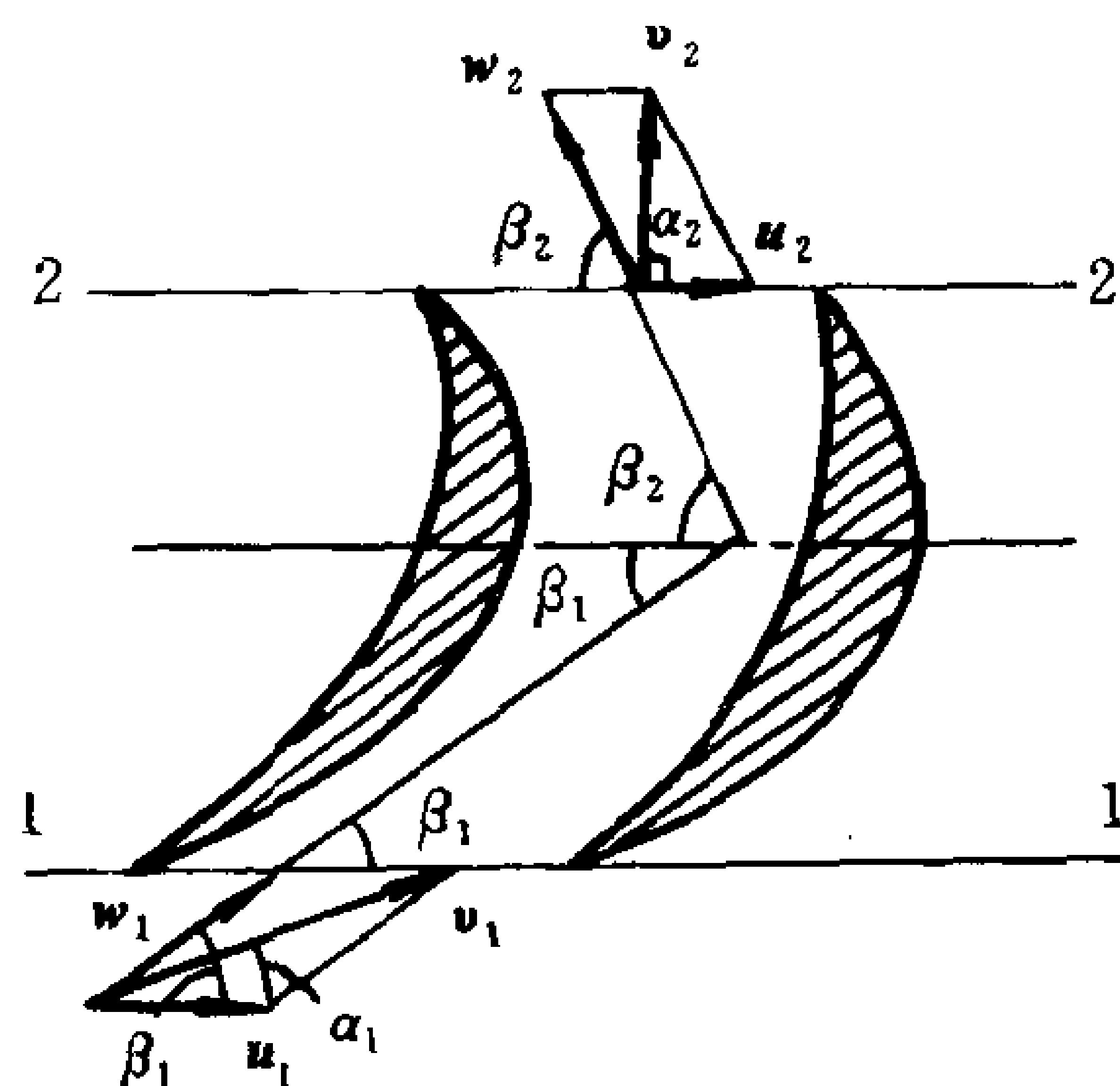
3－41. 1－1 为叶轮机入口，2－2 为叶轮机出口，u 代表牵连速度，w 代表相对速度，v 代表绝对速度。

已知：$u_1=u_2=15$ m/s，$v_1=45$ m/s，v_1、u_1 之间的夹角 $\alpha_1=20°$

$w_2=0.9w_1$，v_2、u_2 之间的夹角 $\alpha_2=90°$，试求：

(1) w_1 与 u_1 的夹角 β_1，w_2 与 u_2 的夹角 β_2

(2) 叶轮机的扬程 H



题 3-41 图

(3) 叶轮机的效率 $\eta = \dfrac{H}{v_1^2/(2g)}$

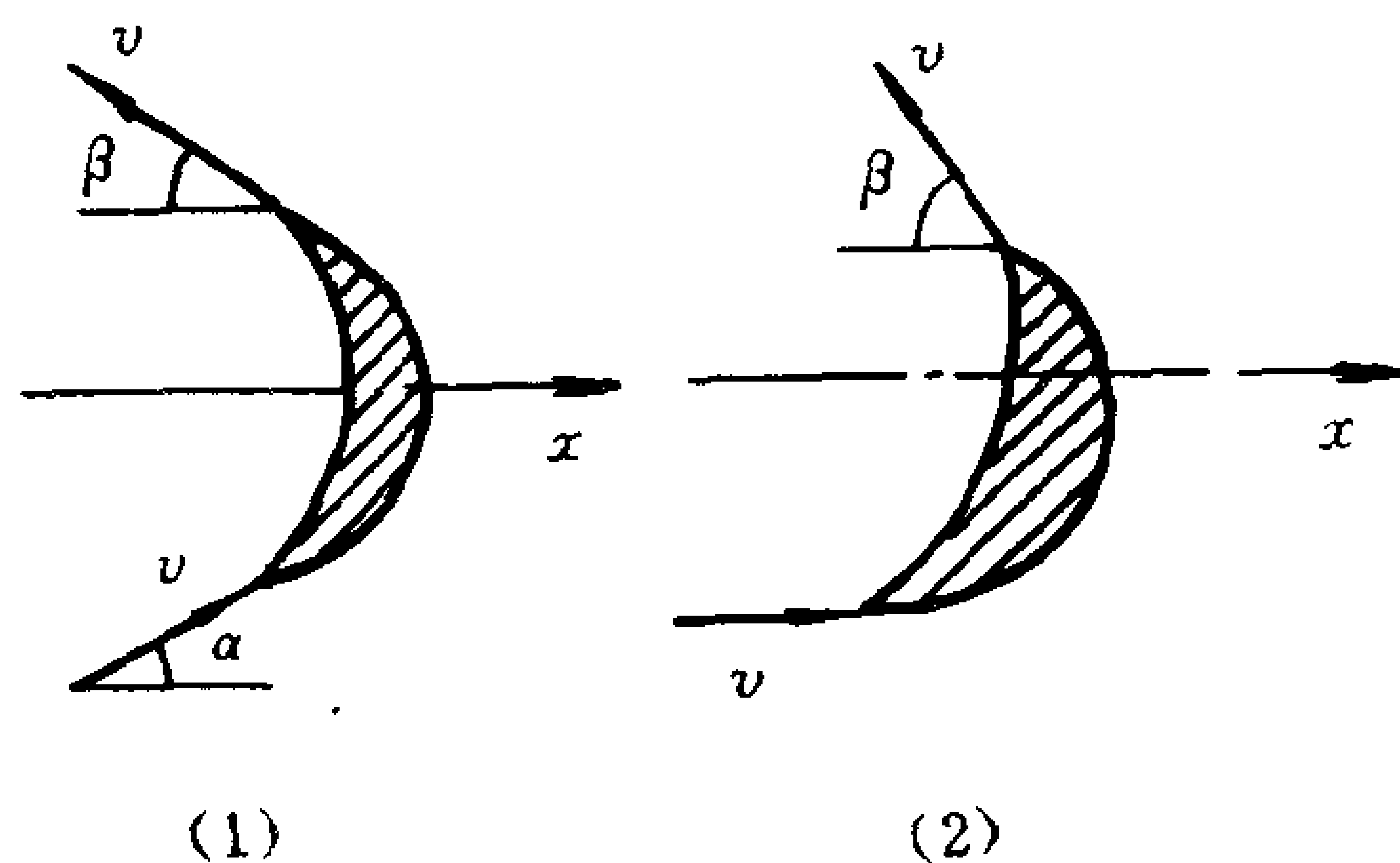
[答：$\beta_1 = 29°24'$，$\beta_2 = 58°54'$，$H = 64\ 66$ m，$\eta = 62.65\%$]

3-42. 直径为 $d = 4$ cm，速度为 $v = 30$ m/s 的水射流，在叶片一端流入，从另一端流出，速度大小不变，但方向随叶片而偏转，试求下列两种情况下射流对叶片作用力。

(1) $\alpha = \beta = 30°$，(2) $\alpha = 0$，$\beta = 60°$。

[答： (1) $F = F_x = 1\ 958$ N，$\theta = 0$

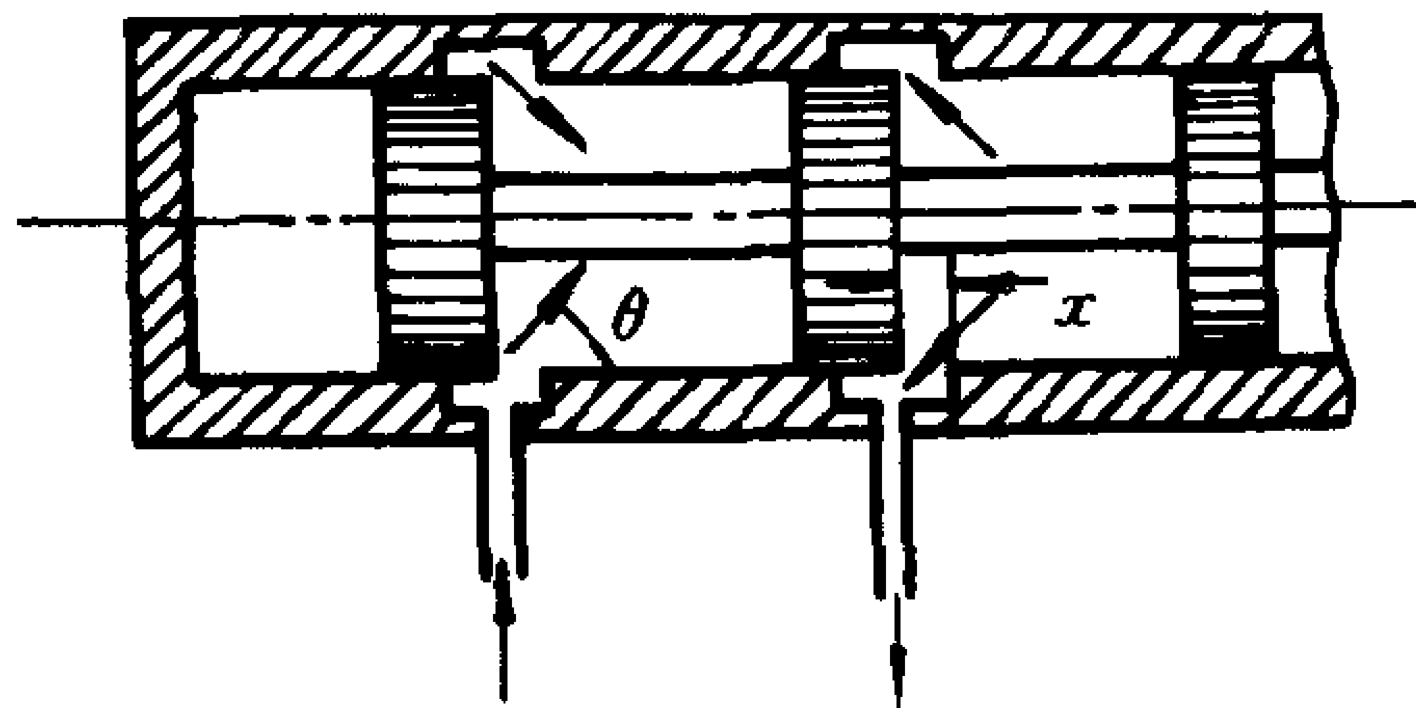
(2) $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 1\ 958$ N，$\theta = \arctan\dfrac{F_y}{F_x} = -30°$]



题 3-42 图

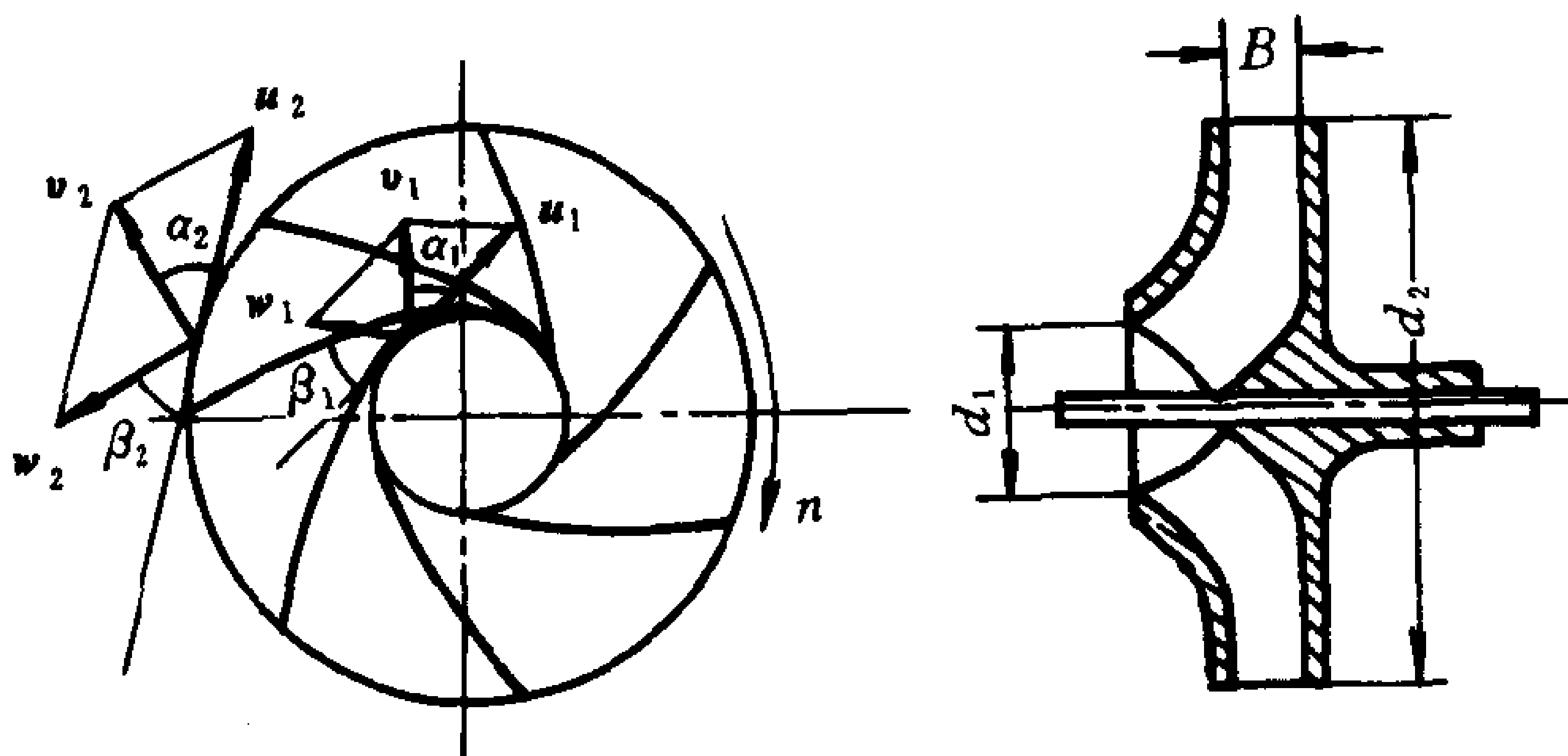
3-43. 换向阀直径 $d=30$ mm，开口量 $x=2$ mm，液流方向角 $\theta=69°$，油液密度 $\rho=900$ kg/m^3，流量 $q_V=100$ l/min，试求作用在换向阀上的轴向力。

[答：$F=10.18$ N，方向向左]



题 3-43 图

3-44. 离心式鼓风机叶轮内径 $d_1=12.5$ cm，外径 $d_2=30$ cm，叶轮流道宽度 $B=2.5$ cm，叶轮转速 $n=1\ 725$ r/min，流量 $q_V=372$ m^3/h，入口温度 $t_1=20$ ℃，入口绝对压强 $p_1=97\ 000$ Pa。用 α_1，α_2 表示气流的入口与出口的气流方向角（即绝对速度 v 与牵连速度 u 之间的夹角），用 β_1，β_2 表示入口与出口的叶片安装角（即相对速度 w 与切线之间的锐角）。



题 3-44 图

已知：$\alpha_1=90°$，$\beta_2=30°$，气流按不可压缩流体计算。

试求：(1) 入口气流速度 v_1 与入口安装角 β_1

(2) 出口气流速度 v_2 与出口气流角 α_2

(3) 叶轮机的扭矩和功率

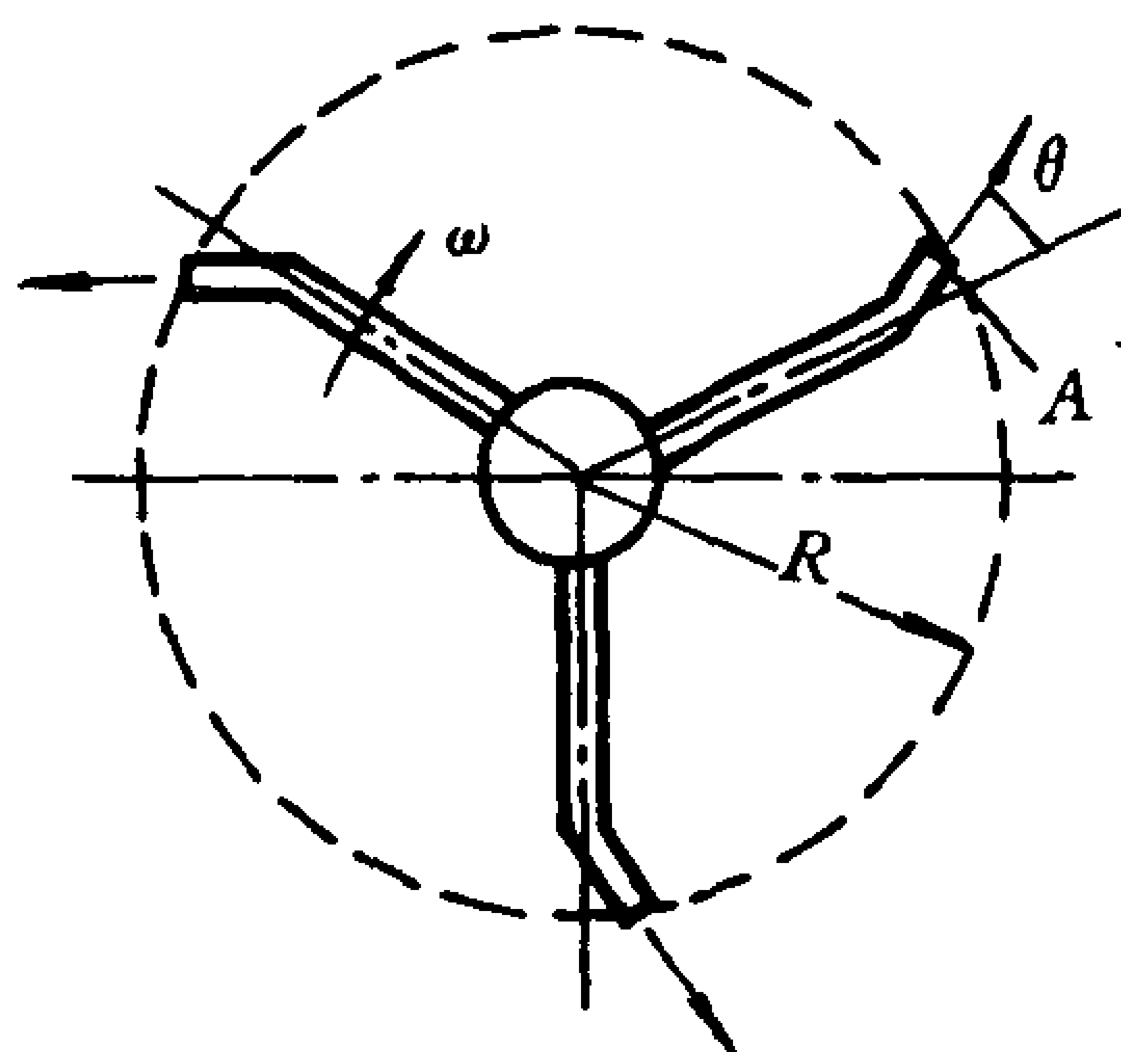
[答：$v_1 = 10.5$ m/s，$\beta_1 = 43°$；$v_2 = 20$ m/s，$\alpha_2 = 14°$；$T = 0.346$ Nm，$P = 62.5$ W]

3-45. 旋转式喷水器由三个均布在水平平面上的旋转喷嘴组成；总供水量为 q_V，喷嘴出口截面积为 A，旋臂长为 R，喷嘴出口速度方向与旋臂的夹角为 θ。

(1) 不计一切摩擦，试求旋臂的旋转角速度 ω

(2) 如果使已经有 ω 角速度的旋臂停止，需要施加多大的外力矩 M？

$$\left[\text{答：}\omega = \frac{q_V}{3AR}\sin\theta ; M = \frac{\rho R q_V^2}{3A}\sin\theta\right]$$



题 3-45 图

第四章　相似和量纲分析

实验既是发展理论的依据又是检验理论的准绳，解决科技问题往往离不开实验手段的配合。在探讨流体运动的内在机理和物理本质方面，当根据不同问题提出研究方法、发展流体力学理论、解决各种工程实际问题时，都必须以科学实验为基础。

工程流体力学中的实验主要有两种：一种是工程性的模型实验，目的在于预测即将建造的大型机械或水工结构上的流动情况；另一种是探索性的观察实验，目的在于寻找未知的流动规律。指导这些实验的理论基础就是相似原理和量纲分析。

本章内容就是介绍工程流体力学实验中所需要的这些基本原理。

§4-1　相似原理

一、力学相似的基本概念

为了能够在模型流动上表现出实物流动的主要现象和性能，也为了能够从模型流动上预测实物流动的结果，必须使模型流动和与其相似的实物流动保持力学相似关系，所谓力学相似是指实物流动与模型流动在对应点上对应物理量都应该有一定的比例关系，具体地说力学相似应该包括下列三个方面。

1. 几何相似，即模型流动与实物流动有相似的边界形状，一切对应的线性尺寸成比例。

如果用无上标的物理量符号表示实物流动，用有上标“′”的物理量符号表示模型流动。则线性比例尺

$$\delta_l = \frac{l}{l'} \tag{4-1}$$

是应该确定的基本比例尺，据此不难得出

面积比例尺

$$\delta_A = \frac{A}{A'} = \frac{l^2}{l'^2} = \delta_l^2 \tag{4-2}$$

体积比例尺

$$\delta_V = \frac{V}{V'} = \frac{l^3}{l'^3} = \delta_l^3 \tag{4-3}$$

因为线性尺寸 l 的量纲是 L，面积 A 的量纲是 L^2，体积 V 的量纲是 L^3，可见导出比例尺（δ_A，δ_V）与基本比例尺（δ_l）的关系就是导出物理量（A，V）的量纲与基本物理量（l）的量纲之间的关系。或者说对照导出物理量的量纲，可以直接写出导出物理量的比例尺，这一结论不但适用于几何相似，也适用于下面将要讨论的运动相似和动力相似。

2. 运动相似，即实物流动与模型流动的流线应该几何相似，而且对应点上的速度成比例。因此

速度比例尺

$$\delta_v = \frac{v}{v'} \tag{4-4}$$

是应该确定的又一个基本比例尺，其它运动学的比例尺可以按照物理量的定义或量纲由 δ_l 及 δ_v 确定出来，即

时间比例尺

$$\delta_t = \frac{t}{t'} = \frac{l/v}{l'/v'} = \frac{\delta_l}{\delta_v} \tag{4-5}$$

加速度比例尺

$$\delta_a = \frac{a}{a'} = \frac{v/t}{v'/t'} = \frac{\delta_v}{\delta_t} = \frac{\delta_v^2}{\delta_l} \tag{4-6}$$

流量比例尺

$$\delta_q = \frac{q_V}{q'_V} = \frac{l^3/t}{l'^3/t'} = \frac{\delta_l^3}{\delta_t} = \delta_l^2\delta_v \tag{4-7}$$

运动粘度比例尺

$$\delta_\nu = \frac{\nu}{\nu'} = \frac{l^2/t}{l'^2/t'} = \frac{\delta_l^2}{\delta_t} = \delta_l\delta_v \tag{4-8}$$

角速度比例尺

$$\delta_\omega = \frac{\omega}{\omega'} = \frac{v/l}{v'/l'} = \frac{\delta_v}{\delta_l} \tag{4-9}$$

由这些公式可以看出，只要确定了 δ_l 及 δ_v，则一切运动学比例尺都可以确定。

3. 动力相似，即实物流动与模型流动应该受同种外力作用，而且对应点上的对应力成比例。

密度比例尺

$$\delta_\rho = \frac{\rho}{\rho'} \tag{4-10}$$

是应该确定的第三个基本比例尺，其他动力学的比例尺均可按照物理量的定义或量纲由 δ_ρ、δ_l 及 δ_v 确定出来，即

质量比例尺

$$\delta_m = \frac{m}{m'} = \frac{\rho V}{\rho' V'} = \delta_\rho\delta_l^3 \tag{4-11}$$

力的比例尺

$$\delta_F = \frac{F}{F'} = \frac{ma}{m'a'} = \delta_m\delta_a = \delta_\rho\delta_l^2\delta_v^2 \tag{4-12}$$

力矩(功、能)比例尺

$$\delta_M = \frac{Fl}{F'l'} = \delta_F \delta_l = \delta_\rho \delta_l^3 \delta_v^2 \tag{4-13}$$

压强(应力)比例尺

$$\delta_p = \frac{F/A}{F'/A'} = \frac{\delta_F}{\delta_A} = \delta_\rho \delta_v^2 \tag{4-14}$$

动力粘度的比例尺

$$\delta_\mu = \frac{\mu}{\mu'} = \frac{\rho\nu}{\rho'\nu'} = \delta_\rho \delta_\nu = \delta_\rho \delta_l \delta_v \tag{4-15}$$

功率的比例尺

$$\delta_P = \frac{P}{P'} = \frac{\delta_\rho \delta_l^3 \delta_v^2}{\delta_t} = \delta_\rho \delta_l^2 \delta_v^3 \tag{4-16}$$

值得注意的是

无量纲系数的比例尺

$$\delta_C = 1 \tag{4-17}$$

即在相似的实物流动与模型流动之间存在着一切无量纲系数皆对应相等的关系,这提供了在模型流动上测定实物流动中的流速系数、流量系数、阻力系数等等的可能性。

此外由于模型和实物大多是处于同样的地心引力范围,故单位质量重力(或重力加速度)g 的比例尺 δ_g 一般都是等于 1 的,即

单位质量力比例尺或重力加速度的比例尺

$$\delta_g = \frac{g}{g'} = 1 \tag{4-18}$$

所有这些力学相似的比例尺均列于表 4－1 的“力学相似”栏中,基本比例尺 δ_l、δ_v、δ_ρ 是各自独立的,基本比例尺确定之后,其他一切物理量的比例尺都可确定,模型流动与实物流动之间一切物理量的换算关系也就都确定了。

二、相似准则

模型流动与实物流动如果力学相似，则必然存在着许许多多的比例尺，但是我们却不可能也不必要用一一检查比例尺的方法去判断两个流动是否力学相似，因为这样是不胜其繁的，判断相似的标准是相似准则。

设模型流动符合不可压缩流体的运动微分方程式，其 x 方向的投影为

$$f_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\nabla^2 u_x = \frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t} \tag{4-19}$$

则与其力学相似的实物流动中各物理量必与模型流动中各物理量存在一定的比例尺关系，故实物流动的运动方程式可以表示为

$$\delta_g f_x - \frac{\delta_p}{\delta_\rho \delta_l}\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\delta_\nu \delta_v}{\delta_l^2}\nu\nabla^2 u_x = \frac{\delta_v^2}{\delta_l}\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t} \tag{4-20}$$

我们知道 N－S 方程式中的所有各项都具有加速度的量纲 LT^{-2}，故(4－20)式每一项前面的比例尺都是加速度的比例尺，它们应该是相等的，即

$$\delta_g = \frac{\delta_p}{\delta_\rho \delta_l} = \frac{\delta_\nu \delta_v}{\delta_l^2} = \frac{\delta_v^2}{\delta_l} \tag{4-21}$$

由(4－19)及(4－20)式可以看到，这公式中的四项都有确定的物理意义，它们分别代表实物流动与模型流动中，作用在单位质量流体上的质量力之比、压力之比、粘性力之比与惯性力之比。

用(4－21)式中的前三项分别去除第四项，则可写出下列三个等式：

1.
$$\frac{\delta_v^2}{\delta_g \delta_l} = 1 \tag{4-22}$$

或

$$\frac{v^2}{gl} = \frac{v'^2}{g'l'} \tag{4-23}$$

$\frac{v^2}{gl}=Fr$ 称为弗劳德(Froude)数,它代表惯性力与重力之比。

2. $$\frac{\delta_\rho \delta_v^2}{\delta_p}=1 \text{ 或 } \frac{\delta_p}{\delta_\rho \delta_v^2}=1 \tag{4-24}$$

即

$$\frac{p}{\rho v^2}=\frac{p'}{\rho' v'^2} \tag{4-25}$$

式中$\frac{p}{\rho v^2}=Eu$ 称为欧拉(Euler)数,它代表压力与惯性力之比。

3. $$\frac{\delta_v \delta_l}{\delta_\nu}=1 \tag{4-26}$$

或

$$\frac{vl}{\nu}=\frac{v'l'}{\nu'} \tag{4-27}$$

或中$\frac{vl}{\nu}=Re$ 称为雷诺(Reynold)数,它代表惯性力与粘性力之比。

总结以上可见,如果两个流动成力学相似,则它们的弗劳德数、欧拉数、雷诺数必须各自相等。于是

$$\left.\begin{aligned} Fr &= Fr' \\ Eu &= Eu' \\ Re &= Re' \end{aligned}\right\} \tag{4-28}$$

称为不可压缩流体定常流动的力学相似准则。据此判断两个流动是否相似,显然比一一检查比例尺要方便得多。

相似准则不但是判别相似的标准,而且也是设计模型的准则,因为满足相似准则实质上意味着相似比例尺之间要保持下列三个互相制约的关系

$$\left.\begin{aligned} \delta_v^2 &= \delta_g \delta_l \\ \delta_p &= \delta_\rho \delta_v^2 \\ \delta_\nu &= \delta_l \delta_v \end{aligned}\right\} \tag{4-29}$$

设计模型时,所选择的三个基本比例尺 δ_l、δ_v、δ_ρ 如果能满足

这三个制约关系，当然模型流动与实物流动是完全力学相似的。但这是有困难的。因为，如前所述一般单位质量力的比例尺 $\delta_g=1$，于是

从(4－29)的第一式中可得

$$\delta_v=\delta_l^{\frac{1}{2}} \qquad (4-30)$$

从(4－29)的第三式中可得

$$\delta_v=\frac{\delta_\nu}{\delta_l} \qquad (4-31)$$

因此

$$\delta_\nu=\delta_l^{\frac{3}{2}} \qquad (4-32)$$

模型可大可小，即线性比例尺是可以任意选择的，但流体运动粘度的比例尺 δ_ν 要保持 $\delta_l^{\frac{3}{2}}$ 的数值这就不容易了。工程上固然有办法配制各种运动粘度的流体(如用不同百分比的甘油水溶液等)，但用这种化学性质不稳定而又昂贵的流体作为模型流体是并不合适的。模型实验一般用水和空气作为工作介质者居多，如水洞、水工试验池、风洞等等。模型流体的粘度通常不能满足(4－32)式的要求。

一般情况下，模型与实物流动中的流体往往就是同一种介质(例如，航空器械往往在风洞中实验，水工模型往往用水作实验，液压元件往往就用工作油液实验)，此时 $\delta_\nu=1$，于是

由(4－29)第一式可得

$$\delta_v=\delta_l^{\frac{1}{2}} \qquad (4-33)$$

由(4－29)第三式可得

$$\delta_v=\frac{1}{\delta_l} \qquad (4-34)$$

显然速度比例尺绝对不可能使这两者同时满足，除非 $\delta_l=1$，但这又不是模型而是原型实验了。

由于比例尺制约关系的限制，同时满足弗劳德和雷诺准则是

困难的，因而一般模型实验难于实现全面的力学相似。欧拉准则与上述两个准则并无矛盾，因此如果放弃弗劳德和雷诺准则，或者放弃其一，那么选择基本比例尺就不会遇到困难。这种不能保证全面力学相似的模型设计方法叫作近似模型法。

三、近似模型法

近似模型法也不是没有科学根据的，弗劳德数代表惯性力与重力之比，雷诺数代表惯性力与粘性力之比，这三种力在一个具体问题上不一定具有同等的重要性，只要我们能够针对所要研究的具体问题，保证它在主要方面不致失真，而有意识地摒弃与问题本质无关的次要因素，不仅无碍于实际问题的研究，而且从突出主要矛盾来说甚至是有益的。

近似模型法有三种。

1. 弗劳德模型法

在水利工程及明渠无压流动中，处于主要地位的力是重力。用水位落差形式表现的重力是支配流动的原因，用静水压力表现的重力是水工结构中的主要矛盾。粘性力有时不起作用，有时作用不甚显著，因此弗劳德模型法的主要相似准则是

$$\frac{v^2}{gl}=\frac{v'^2}{g'l'}$$

一般模型流动与实物流动中的重力加速度是相同的，于是

$$\frac{v^2}{l}=\frac{v'^2}{l'} \tag{4-35}$$

或

$$\delta_v=\delta_l^{\frac{1}{2}} \tag{4-36}$$

此式说明在弗劳德模型法中，速度比例尺可以不再作为需要选取的基本比例尺。将(4－36)式代入(4－1)至(4－18)的有关公式中，则可得出各物理量的比例尺与基本比例尺 δ_l，δ_ρ 的关系（均列于表 4－1 的“重力相似”栏中）。

表 4－1　力学相似及近似模型法的比例尺

模　型　法	力学相似	重力相似 弗劳德模型法	粘性力相似 雷诺模型法	压力相似 欧拉模型法
相似准则	$Fr=Fr'$ $Re=Re'$ $Eu=Eu'$	$\frac{v^2}{gl}=\frac{v'^2}{g'l'}$	$\frac{vl}{\nu}=\frac{v'l'}{\nu'}$	$\frac{p}{\rho v^2}=\frac{p'}{\rho' v'^2}$
比例尺的制约关系	$\delta_l\delta_v\delta_\rho$ 各自独立	$\delta_v=\delta_l^{\frac{1}{2}}$	$\delta_v=\frac{\delta_\nu}{\delta_l}$	$\delta_p=\delta_\rho\delta_v^2$
线性比例尺 δ_l	基本比例尺	基本比例尺	基本比例尺	与"力学相似"栏相同
面积比例尺 δ_A	δ_l^2	δ_l^2	δ_l^2	
体积比例尺 δ_V	δ_l^3	δ_l^3	δ_l^3	
速度比例尺 δ_v	基本比例尺	$\delta_l^{\frac{1}{2}}$	$\frac{\delta_\nu}{\delta_l}$	
时间比例尺 δ_t	$\frac{\delta_l}{\delta_v}$	$\delta_l^{\frac{1}{2}}$	$\frac{\delta_l^2}{\delta_\nu}$	
加速度比例尺 δ_a	$\frac{\delta_v^2}{\delta_l}$	1	$\frac{\delta_\nu^2}{\delta_l^3}$	
流量比例尺 δ_q	$\delta_l^2\delta_v$	$\delta_l^{\frac{5}{2}}$	$\delta_\nu\delta_l$	
运动粘度比例尺 δ_ν	$\delta_l\delta_v$	$\delta_l^{\frac{3}{2}}$	基本比例尺	
角速度比例尺 δ_ω	$\frac{\delta_v}{\delta_l}$	$\delta_l^{-\frac{1}{2}}$	$\frac{\delta_\nu}{\delta_l^2}$	
密度比例尺 δ_ρ	基本比例尺	基本比例尺	基本比例尺	
质量比例尺 δ_m	$\delta_\rho\delta_l^3$	$\delta_\rho\delta_l^3$	$\delta_\rho\delta_l^3$	
力的比例尺 δ_F	$\delta_\rho\delta_l^2\delta_v^2$	$\delta_\rho\delta_l^3$	$\delta_\rho\delta_\nu^2$	
力矩比例尺 δ_M	$\delta_\rho\delta_l^3\delta_v^2$	$\delta_\rho\delta_l^4$	$\delta_\rho\delta_l\delta_\nu^2$	
功、能比例尺 δ_E	$\delta_\rho\delta_l^3\delta_v^2$	$\delta_\rho\delta_l^4$	$\delta_\rho\delta_l\delta_\nu^2$	
压强(应力)比例尺 δ_p	$\delta_\rho\delta_v^2$	$\delta_\rho\delta_l$	$\frac{\delta_\rho\delta_\nu^2}{\delta_l^2}$	
动力粘度比例尺 δ_μ	$\delta_\rho\delta_l\delta_v$	$\delta_\rho\delta_l^{3/2}$	$\delta_\rho\delta_\nu$	
功率比例尺 δ_P	$\delta_\rho\delta_l^2\delta_v^3$	$\delta_\rho\delta_l^{\frac{7}{2}}$	$\frac{\delta_\rho\delta_\nu^3}{\delta_l}$	
单位质量力比例尺 δ_g	1	1	1	
无量纲系数比例尺 δ_C	1	1	1	
适用范围	原理论证;自模区的管流等	水工结构,明渠水流,波浪阻力,闸孔出流等	管中流动,液压技术,孔口出流,水力机械等	自动模型区的管流 风洞实验,气体绕流等

弗劳德模型法在水利工程上应用甚广,大型水利工程设计必须首先经过模型实验的论证而后方可投入施工。

2. 雷诺模型法

管中有压流动是在压差作用下克服管道摩擦而产生的流动,粘性力决定压差的大小,粘性力决定管内流动的性质,此时重力是无足轻重的次要因素,因此雷诺模型法的主要准则是

$$\frac{vl}{\nu}=\frac{v'l'}{\nu'} \tag{4-37}$$

或

$$\delta_v=\frac{\delta_\nu}{\delta_l} \tag{4-38}$$

这说明速度比例尺 δ_v 依变于线性比例尺 δ_l 和运动粘度比例尺 δ_ν。将此式代入(4-1)至(4-18)的有关公式中即可得出各物理量的比例尺与基本比例尺 δ_l、δ_ν、δ_ρ 的关系(列于表 4-1 的"粘性力相似"栏中)。

雷诺模型法的应用范围也很广泛,管道流动、液压技术、水力机械等方面的模型实验多数采用雷诺模型法。

3. 欧拉模型法

第五章将要讲到粘性流动中的如下一种特殊现象,当雷诺数增大到一定界限以后,惯性力与粘性力之比也大到一定程度,粘性力的影响相对减弱,此时继续提高雷诺数,也不再对流动现象和流动性能发生质和量的影响,此时尽管雷诺数不同,但粘性效果却是一样的。这种现象叫作自动模型化,产生这种现象的雷诺数范围叫作自动模型区,雷诺数处在自动模型区时,雷诺准则失去判别相似的作用。

这也就是说,研究雷诺数处于自动模型区时的粘性流动不满足雷诺准则也会自动出现粘性力相似。因此设计模型时,粘性力的影响不必考虑了;如果是管中流动,或者是气体流动,其重力的影响也不必考虑;这样我们只需考虑代表压力和惯性力之比的欧

拉准则就可以了。事实上欧拉准则的比例尺制约关系

$$\delta_p = \delta_\rho \delta_v^2$$

就是全面力学相似中的压强比例尺(4－15)式,这说明我们需要独立选取基本的比例尺仍然是 δ_l、δ_v、δ_ρ,于是按欧拉准则设计模型实验时,其他物理量的比例尺与力学相似的诸比例尺是完全一致的。

欧拉模型法用于自动模型区的管中流动、风洞实验及气体绕流等情况。

[**例题 4－1**] 图 4－1 表示深为 $H=4$ m的水在弧形闸门下的流动。

(1) 试求 $\delta_\rho=1$,$\delta_l=10$ 的模型上的水深 H'。

(2) 在模型上测得流量

$$q'_V=155\ \text{l/s},$$

收缩断面的速度

$$v'=1.3\ \text{m/s},$$

作用在闸门上的力 $F'=50$ N,力矩 $M'=70$ Nm。

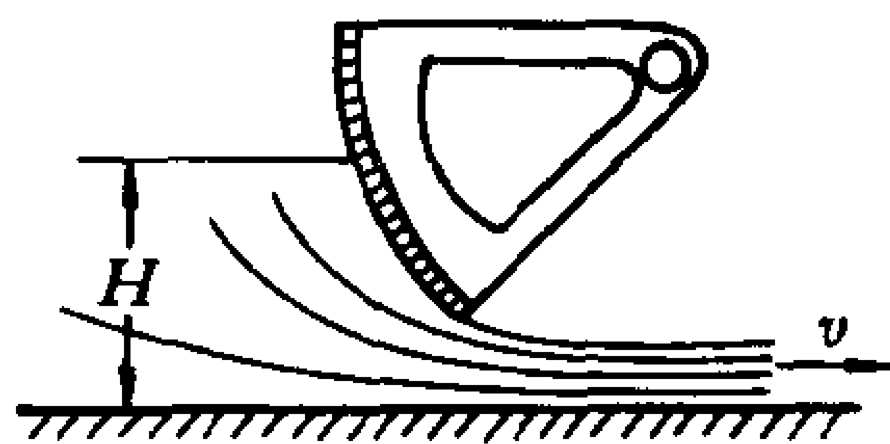


图 4－1　弧形闸门

试求实物流动上的流量、收缩断面上的速度、作用在闸门上的力和力矩。

[**解**] 闸门下的水流是在重力作用下的流动,因而模型应该是按照弗劳德模型法设计,其比例尺可由表 4－1 查得。

(1) 模型水深

$$H'=\frac{H}{\delta_l}=\frac{4}{10}=0.4\ \text{m}$$

(2) 实物上的流量

$$q_V=\delta_q q'_V=\delta_l^{\frac{5}{2}} q'_V=10^{\frac{5}{2}}\times 0.155=49\ \text{m}^3/\text{s}$$

实物收缩断面上的速度

$$v=\delta_v v'=\delta_l^{\frac{1}{2}} v'=\sqrt{10}\times 1.3=4.11\ \text{m/s}$$

实物闸门上的力

$$F=\delta_F F'=\delta_\rho \delta_l^3 F'=1\times 10^3\times 50=5\times 10^4\ \text{N}$$

实物闸门上的力矩

$$M=\delta_M M'=\delta_\rho\delta_l^4 M'=1\times10^4\times75=75\times10^4\ \text{Nm}。$$

［**例题 4－2**］ 图 4－2 所示的溢流阀，直径$D=30$ mm，开度 $h=3$ mm，油的流量 $q_V=0.9$ l/s。

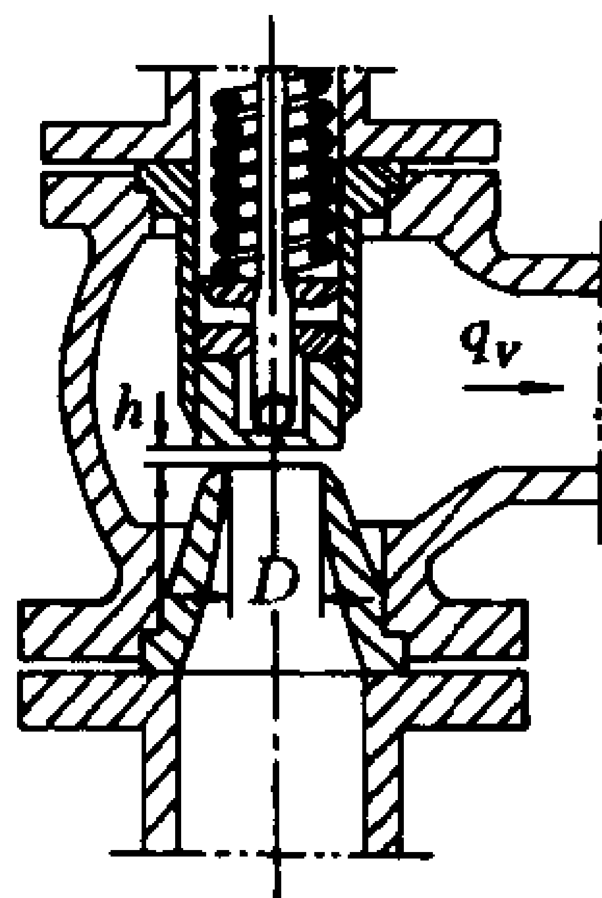


图 4－2

(1) 假如模型与实物所用油的密度相同，但模型油的运动粘度为实物油运动粘度之半，模型上的流量为0.3 l/s，试求模型阀的直径与开度。

(2) 如果测得模型阀前后的压强差 $\Delta p'=5\times10^5$ Pa，阀芯上的作用力 $F'=157$ N，阀的消耗功率为 $P'=0.15$ kW。试求实物阀的压强差及阀芯上的作用力及消耗功率。

［**解**］ 液压阀的模型实验应该用雷诺模型法设计。

由题意知 $\delta_\rho=1,\delta_\nu=2,$

$$\delta_q=\frac{0.9}{0.3}=3$$

根据表 4－1 中的公式得 $\delta_l=\dfrac{\delta_q}{\delta_\nu}=\dfrac{3}{2}$，于是可得

(1) 模型阀的直径 $D'=\dfrac{D}{\delta_l}=\dfrac{30}{\frac{3}{2}}=20$ mm

模型阀的开度 $h'=\dfrac{h}{\delta_l}=\dfrac{3}{\frac{3}{2}}=2$ mm

(2) 实物阀的压强差

$$\Delta p=\delta_p\Delta p'=\frac{\delta_\rho\delta_\nu^2}{\delta_l^2}\Delta p'=\frac{1\times4}{\frac{9}{4}}\times5\times10^5=8.89\times10^5\ \text{Pa}$$

实物阀芯上作用力

$$F=\delta_F F'=\delta_\rho\delta_\nu^2 F'=1\times4\times157=628\ \text{N}$$

实物阀的消耗功率

$$P=\delta_P P'=\frac{\delta_\rho\delta_\nu^3}{\delta_l}P'=\frac{1\times8}{\frac{3}{2}}\times0.15=0.8\ \text{kW}$$

[**例题 4-3**] 直径 20 cm 的模型螺旋桨在 $v'=75$ m/s, $t'=30$ ℃的风洞中试验(如图 4-3)时,获得试验数据如下:

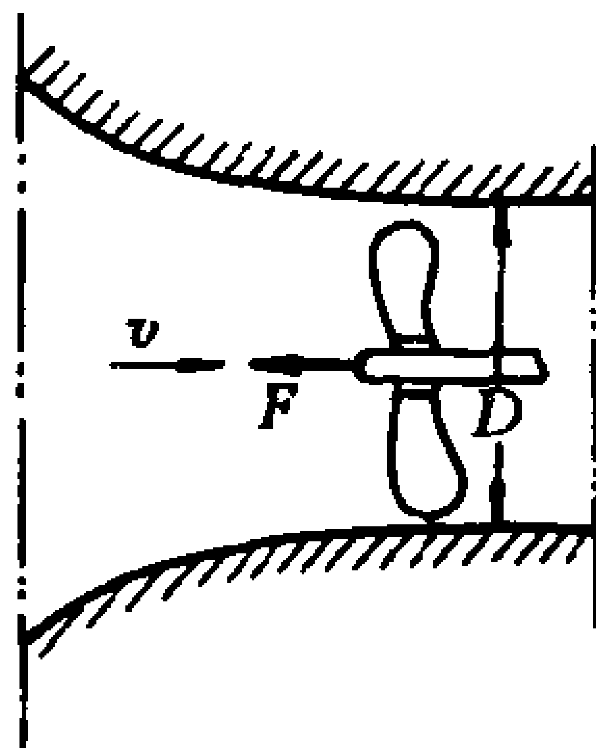


图 4-3 航空螺旋桨

空气流量 $q'_V=6.7\ \text{m}^3/\text{s}$

螺旋桨叶片前后的压强差

$\Delta p'=2\ 000\ \text{N/m}^2$

螺旋桨的推力 $F'=160$ N

螺旋桨的功率 $P'=12$ kW

试问直径 2 m 的航空螺旋桨在 0 ℃空气中飞行速度为 405 km/h 时的各项性能参数(q_V、Δp、F、P)是多少?

[**解**] 由表 1-3 可得 $t=30$ ℃时空气密度 $\rho'=1.165\ \text{kg/m}^3$,运动粘度 $\nu'=16.6\times10^{-6}\ \text{m}^2/\text{s}$; $t=0$℃时空气密度 $\rho=1.293\ \text{kg/m}^3$,运动粘度 $\nu=13.7\times10^{-6}\ \text{m}^2/\text{s}$。

实物螺旋桨的飞行速度为

$$v=\frac{405\times1\ 000}{3\ 600}=112.5\ \text{m/s}$$

实物螺旋桨的雷诺数为

$$Re=\frac{vD}{\nu}=\frac{112.5\times2}{13.7\times10^{-6}}=1.64\times10^6$$

这样高的雷诺数通常已经进入自动模型区,雷诺准则已经自动失去作用,模型的雷诺数与实物的雷诺数不一定相等,事实上经过下面验算也可以得出这一结论。

模型螺旋桨的雷诺数为

$$Re'=\frac{v'D'}{\nu'}=\frac{75\times0.20}{16.6\times10^{-6}}=0.9\times10^6\neq Re$$(与实物螺旋桨的雷诺数并不相等)

这种自动模型化的问题自然是按照欧拉模型法设计模型的。它的三个基本比例尺为

$$\delta_l=\frac{D}{D'}=\frac{2}{0.2}=10$$

$$\delta_\rho=\frac{\rho}{\rho'}=\frac{1.293}{1.165}=1.11$$

$$\delta_v=\frac{v}{v'}=\frac{112.5}{75}=1.5$$

根据表 4－1 中的公式可以算出各项比例尺。因而实物螺旋桨的各项性能参数为：

流量　$q_V = \delta_q q'_V = \delta_l^2 \delta_v q'_V = 100 \times 1.5 \times 6.7 = 1\ 005\ \text{m}^3/\text{s}$

压强差

$$\Delta p = \delta_p \Delta p' = \delta_\rho \delta_v^2 \Delta p' = 1.11 \times 1.5^2 \times 2\ 000 = 4\ 995\ \text{N/m}^2$$

推力

$$F = \delta_F F' = \delta_\rho \delta_l^2 \delta_v^2 F' = 1.11 \times 100 \times 1.5^2 \times 160 = 39\ 960\ \text{N}$$

功率

$$P = \delta_P P' = \delta_\rho \delta_l^2 \delta_v^3 P' = 1.11 \times 100 \times 1.5^3 \times 12 = 4\ 496\ \text{kW}$$

§4－2　π 定理和量纲分析的应用

在流体力学及其他许多科学领域中都会遇到这样的情况：根据分析判断可以知道若干个物理量之间存在着函数关系，或者说其中一个物理量 N 受其余物理量 $n_i(i = 1 \sim k)$ 的影响，但是由于情况复杂，运用已有的理论方法尚不能确定出准确描述这种变化过程的方程式，这时揭示这若干个物理量之间函数关系的唯一方法就是科学实验。

如果用依次改变每个自变量的方法实验，显然对于有多种影响因素的情况来说是不适宜的。为了合理地选择实验变量，同时又能使实验结果具有普遍适用价值，一般需要将物理量之间的函数式转化为无量纲数之间的函数式。用无量纲数之间的函数式所表达的实验曲线具有更普遍的使用价值。

怎样确定实验中的无量纲数，就需要 π 定理和量纲分析的知识。

一、π 定理

在流体动力学中需要进行实验研究的物理规律有很多。例如，能量损失、阻力、升力、推进力的公式等等。影响这些物理规律的因素那就更多，例如，流体的粘度、压强、温度、重力加速度、弹性

模量、流量、回转角速度、表面粗糙度、线性尺寸、管道直径、流体速度、密度等等。

假定用函数

$$N=f(n_1,n_2,n_3,\cdots,n_i,\cdots,n_k) \quad (4-39)$$

表示一个需要研究的物理规律，在一定的单位制下，这 $k+1$ 个物理量都有一定的单位和数值。使用的单位制不同(如国际制、工程制、英制等)，物理量的单位和数值也不同，但物理规律是客观存在的，它与单位制的选择无关。

我们现在不取通常所用的长度、时间、质量(或力)为基本单位，而是取对所研究的问题有重大影响的几个物理量，例如取 n_1、n_2、n_3 作为基本单位。当然这种特殊的 n_1、n_2、n_3 单位制也必须满足下列两点要求：(1)基本单位应该是各自独立的，(2)利用这几个基本单位应该能够导出其它所需要的一切物理量的单位。由于研究问题各不相同，对每种问题起重大影响的因素自然也不同，满足上述两点要求的基本单位可以有很多种组合形式。

例如研究水头损失及流动阻力等问题时，其影响因素常离不开线性尺寸 l、流体运动速度 v 及流体密度 ρ 这样三个基本物理量。这三个物理量分别具有几何学、运动学和动力学的特征，它们各自独立，而且也足以导出其它任何物理量的单位。因而以 $n_1=l,n_2=v,n_3=\rho$ 就可以组成一组特殊单位制。

当研究其它问题时，可令 n_1、n_2、n_3 分别代表另外三个有重大影响而又满足上述两点要求的基本物理量。在 n_1、n_2、n_3 单位制下，每一种物理量都应该有一定的单位和数值。因而(4-39)式中的物理量都可以表示成这三种基本单位的一定幂次组合(即新的单位)与一个无量纲数的乘积，即

$$\left.\begin{aligned} N&=\pi\, n_1^{x}\, n_2^{y}\, n_3^{z} \\ \text{与} \quad n_i&=\pi_i\, n_1^{x_i}\, n_2^{y_i}\, n_3^{z_i} \end{aligned}\right\} \quad (4-40)$$

式中无量纲数

$$\left.\begin{aligned}\pi &= \frac{N}{n_1^x\ n_2^y\ n_3^z}\\ \pi_i &= \frac{n_i}{n_1^{x_i}\ n_2^{y_i}\ n_3^{z_i}}\end{aligned}\right\}\qquad(4-41)$$

与（上式）

就是物理量 N 与 n_i 在 n_1、n_2、n_3 基本单位制下的数值，或者说在新的单位制下 N 与 n_i 的数值各自变小了 $n_1^x n_2^y n_3^z$ 与 $n_1^{x_i} n_2^{y_i} n_3^{z_i}$ 倍。因而在 n_1、n_2、n_3 基本单位制下(4－39)式的规律仍然不变，只是各物理量的数值有所改变。于是(4－39)式可以写成

$$\frac{N}{n_1^x n_2^y n_3^z} = f\left(\frac{n_1}{n_1^{x_1}\ n_2^{y_1}\ n_3^{z_1}}, \frac{n_2}{n_1^{x_2}\ n_2^{y_2}\ n_3^{z_2}}, \frac{n_3}{n_1^{x_3}\ n_2^{y_3}\ n_3^{z_3}}, \cdots \right.$$
$$\left. \cdots \frac{n_i}{n_1^{x_i}\ n_2^{y_i}\ n_3^{z_i}}\ \cdots\ \frac{n_k}{n_1^{x_k}\ n_2^{y_k}\ n_3^{z_k}}\right) \qquad (4-42)$$

从右端前三项不难看出，其分母上的乘幂为

$$x_1 = 1 \quad y_1 = z_1 = 0$$
$$y_2 = 1 \quad x_2 = z_2 = 0$$
$$z_3 = 1 \quad x_3 = y_3 = 0$$

根据(4－41)式可得 $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = 1$

于是 $\qquad \pi = f(1, 1, 1, \pi_4, \pi_5, \cdots, \pi_i, \cdots, \pi_k)$

或

$$\pi = f(\pi_4, \pi_5, \cdots, \pi_i, \cdots, \pi_k) \qquad (4-43)$$

这样，运用选择新基本单位的办法，可使原来 $k+1$ 个有量纲的物理量之间的函数式(4－39)变成 $k+1-3$ 个即 $k-2$ 个无量纲数之间的函数式(4－43)，这就是泊金汉(E. Buckingham)定理，因为经常用 π 表示无量纲数，故又简称 π 定理。

π 定理实际上只是说明物理量函数式怎样转化为无量纲数的函数式，至于无量纲数的具体确定则要用下面介绍的量纲分析方法。

因为 π 是无量纲数，因而(4－41)式右端分子分母的量纲必

须相同，对每个物理量 n_i 列出其分子分母量纲(L,T,M)的幂次方程，联立求解，即可得出分母上的乘幂 x_i, y_i, z_i，这样逐个分析即可确定出(4－43)式中的所有无量纲数，用这种自变量个数已经减少三个的无量纲函数式安排实验和整理实验结果要比用原来的物理量函数式方便得多。

下面通过几个实例进一步说明量纲分析法的应用。

二、量纲分析法的应用

［**例题 4－4**］ 管中流动的沿程水头损失

根据实际观测知道，管中流动由于沿程摩擦而造成的压强差 Δp 与下列因素有关：管路直径 d、管中平均速度 v、流体密度 ρ、流体动力粘度 μ、管路长度 l、管壁的粗糙度 Δ，试求水管中流动的沿程水头损失。

［**解**］ 根据题意知

$$\Delta p = f(d, v, \rho, \mu, l, \Delta)$$

选择 d、v、ρ 作为基本单位，它们符合基本单位制的两点要求，于是

$$\pi = \frac{\Delta p}{d^x\ v^y\ \rho^z},\quad \pi_4 = \frac{\mu}{d^{x_4}\ v^{y_4}\ \rho^{z_4}},\quad \pi_5 = \frac{l}{d^{x_5}\ v^{y_5}\ \rho^{z_5}}$$

$$\pi_6 = \frac{\Delta}{d^{x_6}\ v^{y_6}\ \rho^{z_6}}$$

各物理量的量纲如下：

物理量	d	v	ρ	Δp	μ	l	Δ
量纲	L	LT^{-1}	ML^{-3}	$ML^{-1}T^{-2}$	$ML^{-1}T^{-1}$	L	L

首先分析 Δp 的量纲，因为其分子分母的量纲应该相同，所以

$$ML^{-1}T^{-2} = (L)^x(LT^{-1})^y(ML^{-3})^z = M^zL^{x+y-3z}T^{-y}$$

由此解得 $z=1, y=2, x=0$

所以 $\pi = \dfrac{\Delta p}{v^2\rho}$

其次再分析 μ 的量纲，同理有

$$ML^{-1}T^{-1} = (L)^{x_4}(LT^{-1})^{y_4}(ML^{-3})^{z_4} = M^{z_4}L^{x_4+y_4-3z_4}T^{-y_4}$$

由此解得 $z_4=1,\ y_4=1,\ x_4=1$

所以
$$\pi_4=\frac{\mu}{dv\rho}$$

然后再分析 l 的量纲

$$\mathrm{L}=(\mathrm{L})^{x_5}(\mathrm{LT}^{-1})^{y_5}(\mathrm{ML}^{-3})^{z_5}=\mathrm{M}^{z_5}\mathrm{L}^{x_5+y_5-3z_5}\mathrm{T}^{-y_5}$$

由此解得
$$z_5=0,\ y_5=0,\ x_5=1$$

所以
$$\pi_5=\frac{l}{d}$$

同理可得
$$\pi_6=\frac{\Delta}{d}$$

将所有 π 值代入(4-43)式可得

$$\frac{\Delta p}{v^2\rho}=f\left(\frac{\mu}{dv\rho},\frac{l}{d},\frac{\Delta}{d}\right)$$

因为管中流动的水头损失 $h_f=\dfrac{\Delta p}{\rho g}$

令 $Re=\dfrac{vd}{\nu}=\dfrac{vd\rho}{\mu}$则

$$h_f=\frac{\Delta p}{\rho g}=\frac{v^2}{g}f\left(\frac{1}{Re},\frac{l}{d},\frac{\Delta}{d}\right)$$

从第三章的(3-115)式知道沿程损失与管长 l 成正比,与管径 d 成反比,故 $\dfrac{l}{d}$可从函数符号中提出。另外,Re 倒数的函数与雷诺数 Re 的函数是一个意思,为写成动能形式,在分母上乘以 2 亦不影响公式的结构,故最后公式可写成

$$h_f=f\left(Re,\frac{\Delta}{d}\right)\frac{l}{d}\ \frac{v^2}{2g}=\lambda\ \frac{l}{d}\ \frac{v^2}{2g}\tag{4-44}$$

此式称为达西(Darcy)公式,它是计算管路沿程水头损失的一个重要公式,式中

$$\lambda=f\left(Re,\frac{\Delta}{d}\right)\tag{4-45}$$

称为沿程阻力系数,它只依变于雷诺数和管壁的相对粗糙度$\dfrac{\Delta}{d}$,在实验中只要改变这两个自变量即可得出 λ 的变化规律。这种实验曲线称为莫迪图(详见第五章图 5-22)。这里只是用量纲分析法说明达西公式的由来,至于怎样利用莫迪图及达西公式解决沿程损失的计算问题则将在第五章中详细阐述。由此可见量纲分析法在解决未知规律和指导实验方面的巨大作用。

[**例题 4-5**] 不可压缩流体中的绕流物体的阻力。

飞行物体在静止空气中运动与风洞中气流绕固定物体流动的力学效果是相同的，根据实际观测知道在不可压缩流体中的绕流物体所受到的阻力 F 与下列因素有关：物体迎风断面的线性尺寸、气流速度 v、气体密度 ρ、气体动力粘度 μ。

试求不可压缩流体中的绕流物体的阻力。

[**解**] 因 $F=f(l、v、\rho、\mu)$

取 l、v、ρ 为基本单位(它们满足基本单位的前述两点要求)。

则 $$\pi=\frac{F}{l^x v^y \rho^z},\ \pi_4=\frac{\mu}{l^{x_4} v^{y_4} \rho^{z_4}}$$

各物理量的量纲为

物理量	F	l	v	ρ	μ
量纲	MLT^{-2}	L	LT^{-1}	ML^{-3}	$ML^{-1}T^{-1}$

由 F 的量纲可得

$$MLT^{-2}=(L)^x(LT^{-1})^y(ML^{-3})^z=M^z L^{x+y-3z}T^{-y}$$

所以 $$z=1,\ y=2,\ x=2,\ \pi=\frac{F}{l^2 v^2 \rho}$$

由 μ 的量纲可得

$$ML^{-1}T^{-1}=(L)^{x_4}(LT^{-1})^{y_4}(ML^{-3})^{z_4}=M^{z_4}L^{x_4+y_4-3z_4}T^{-y_4}$$

所以 $$z_4=1,\ y_4=1,\ x_4=1,\ \pi_4=\frac{\mu}{lv\rho}$$

最后可得 $$\frac{F}{l^2 v^2 \rho}=f\left(\frac{\mu}{lv\rho}\right)$$

或 $$F=l^2 v^2 \rho f\left(\frac{1}{Re}\right)$$

l^2 就是物体迎风断面面积 A(有时可能差一常数，但常数不影响公式结构)。于是公式可改写成

$$F=A\rho\frac{v^2}{2}f(Re)=C_D A\rho\frac{v^2}{2} \tag{4-46}$$

此式称为瑞利(Rayleigh)公式，它是计算绕流物体阻力的一个重要公式，式中

$$C_D=f(Re) \tag{4-47}$$

称为绕流物体的阻力系数,在不可压缩流体中它只与 Re 有关,图 4-4 上示出无限长圆柱形物体在风洞中实验的结果,$C_D - Re\left(=\frac{vd}{\nu}\right)$曲线是绘在双对数坐标上的。

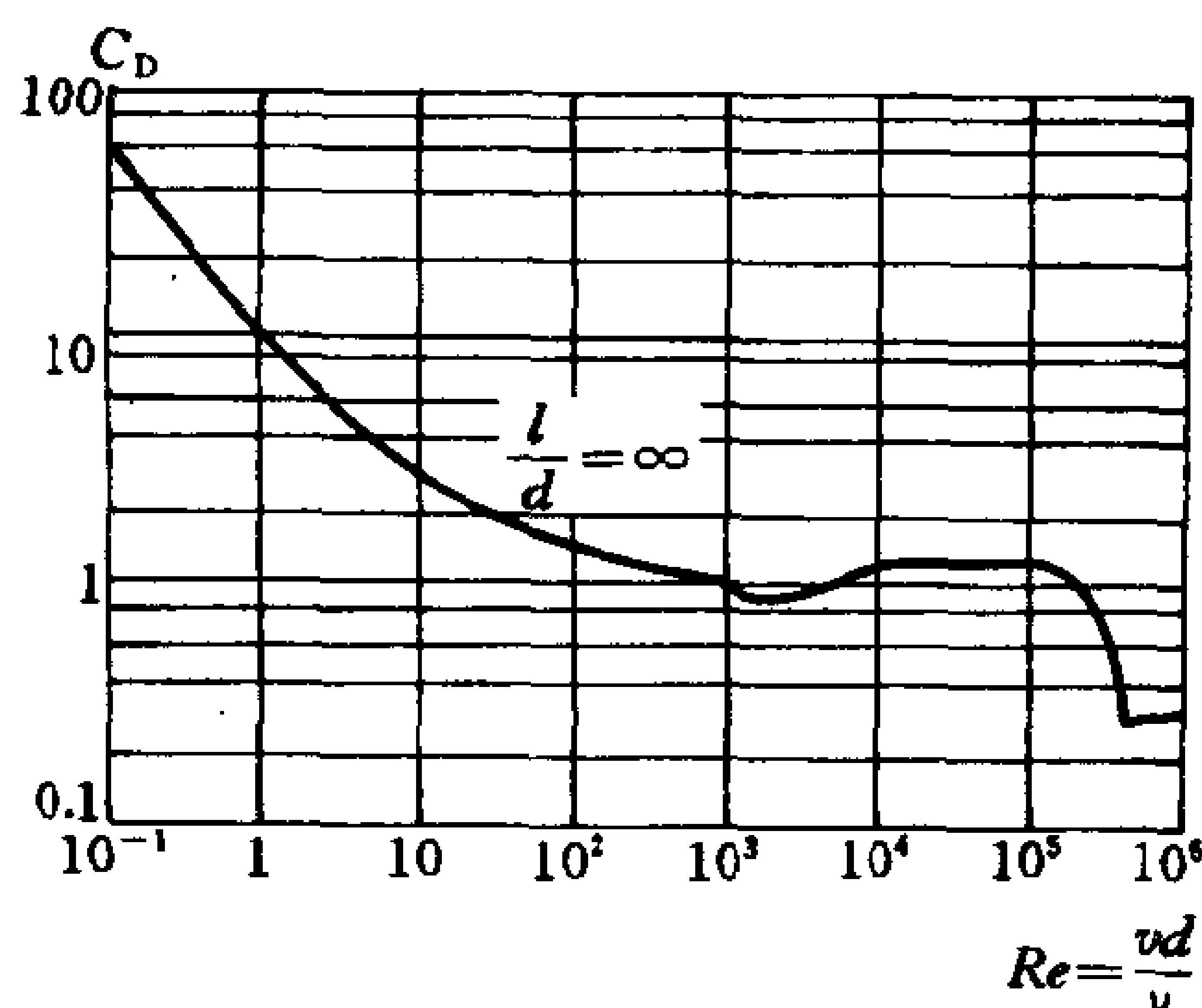


图 4-4 圆柱体的阻力系数

利用 C_D 的实验曲线及公式(4-46)即可解决不可压缩圆柱绕流物体的阻力计算问题。

这里仅从量纲分析法提出瑞利公式的结构,至于这种绕流物体的阻力及阻力系数问题的解决和计算则不再详述了。

通过上面两个例题一方面说明量纲分析法的应用,一方面也得出两个有用的公式,即达西公式和瑞利公式,使用这种公式需要配合由实验得出的系数,在确定系数的实验中,变量一般都是无量纲数,因为使用无量纲数整理实验结果才能有普遍适用价值。由此可见量纲分析法在解决未知函数规律问题上的作用,不过需要注意,使用量纲分析法首先要列出关系式

$$N = f(n_1, n_2, \cdots, n_i, \cdots, n_k)$$

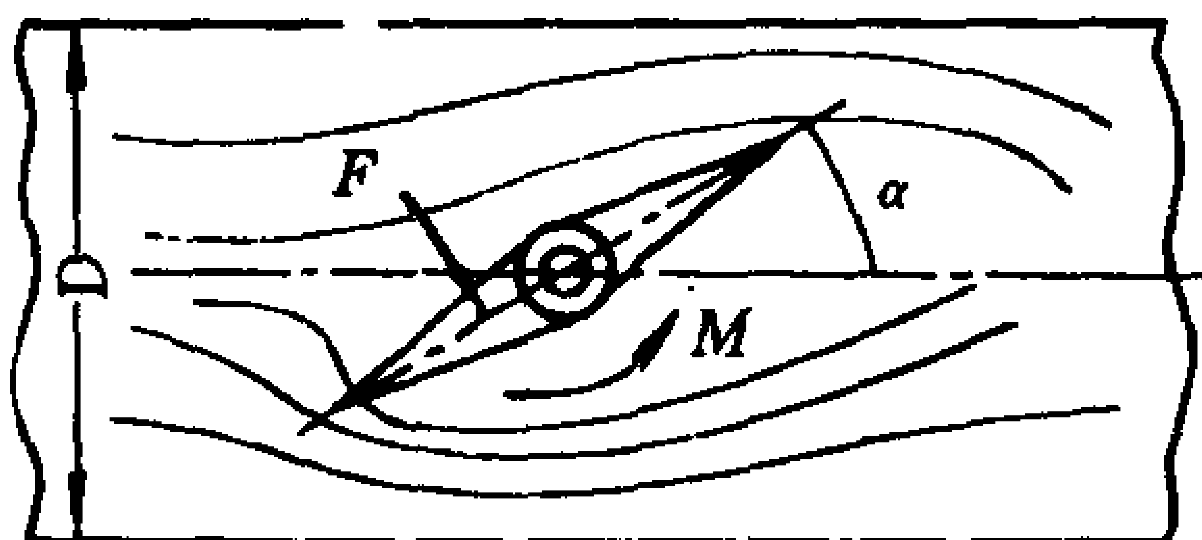
式中的影响因素既要可靠又要全面。从影响因素中选取基本单位时既要是主要物理量又要符合单位制的两项条件。凡此种种都说明只有对所要研究问题的物理本质认识得越透彻,才有可能更好

地运用量纲分析法。归根到底，这种方法只是从实验中来又到实验中去的一种分析手段，缺乏由实验取得的第一手资料而单纯依靠量纲分析是不可能得出什么成果的。与许多其它原理一样，量纲分析法虽然是科学技术上的一种重要手段，但它也并不是万能的。科学没有捷径，只有脚踏实地一步一步去努力攀登。

习　题

4－1．为了求得水管中蝶形阀的特性，预先在空气中作模型实验。两种阀的 α 角相同。

空气密度 $\rho'=1.25\ \mathrm{kg/m^3}$，空气流量 $q'_V=1.6\ \mathrm{m^3/s}$，实验模型的直径 $D'=250$ mm，实验结果得出阀的压强损失 $\Delta p'=275$ kPa，作用力 $F'=140$ N，作用力矩 $M'=3$ Nm，实物蝶阀直径 $D=2.5$ m，实物流量 $q_V=8\ \mathrm{m^3/s}$。



题4－1图

实验是根据力学相似设计的。

(1) 试求速度比例尺 δ_v，长度比例尺 δ_l，密度比例尺 δ_ρ。

(2) 求实物蝶阀上的压强损失、作用力和作用力矩。

[答：$\delta_v=0.05$，$\delta_l=10$，$\delta_\rho=800$，$\Delta p=5.50$ kPa，$F=28\ 000$ N，$M=6\ 000$ Nm]

4－2．煤油管路上的文丘里流量计 $D=300$ mm，$d=150$ mm，流量 $q_V=100$ l/s，煤油运动粘度 $\nu=4.5\times10^{-6}\ \mathrm{m^2/s}$，煤油密度 $\rho=820\ \mathrm{kg/m^3}$。

用 $\nu'=1\times10^{-6}\ \mathrm{m^2/s}$ 的水在缩小为原型 1/3 的模型上试验，试求模型上的流量是多少？

如果在模型上测出水头损失 $h'_f=0.2$ m，收缩管段上压强差 $\Delta p'=10^5$ Pa试求煤油管路上的水头损失和收缩管段的压强差。

[答：$q'_V=7.4$ l/s，$h_f=0.45$ m，$\Delta p=1.845\times10^5$ Pa]

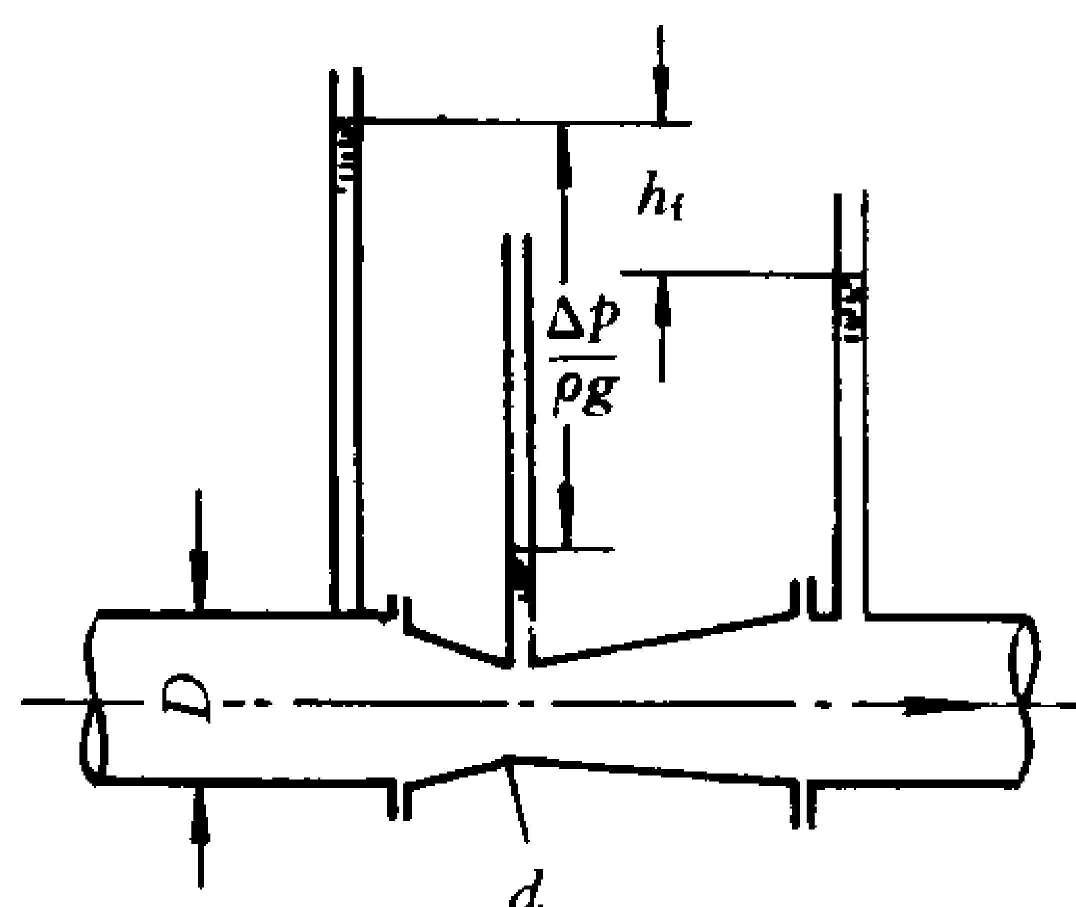
4－3．汽车高度 $h=2$ m，速度 $v=108$ km/h，行驶环境为20℃时的空气。

模型实验的空气为 0 ℃,气流速度为 $v'=60$ m/s。

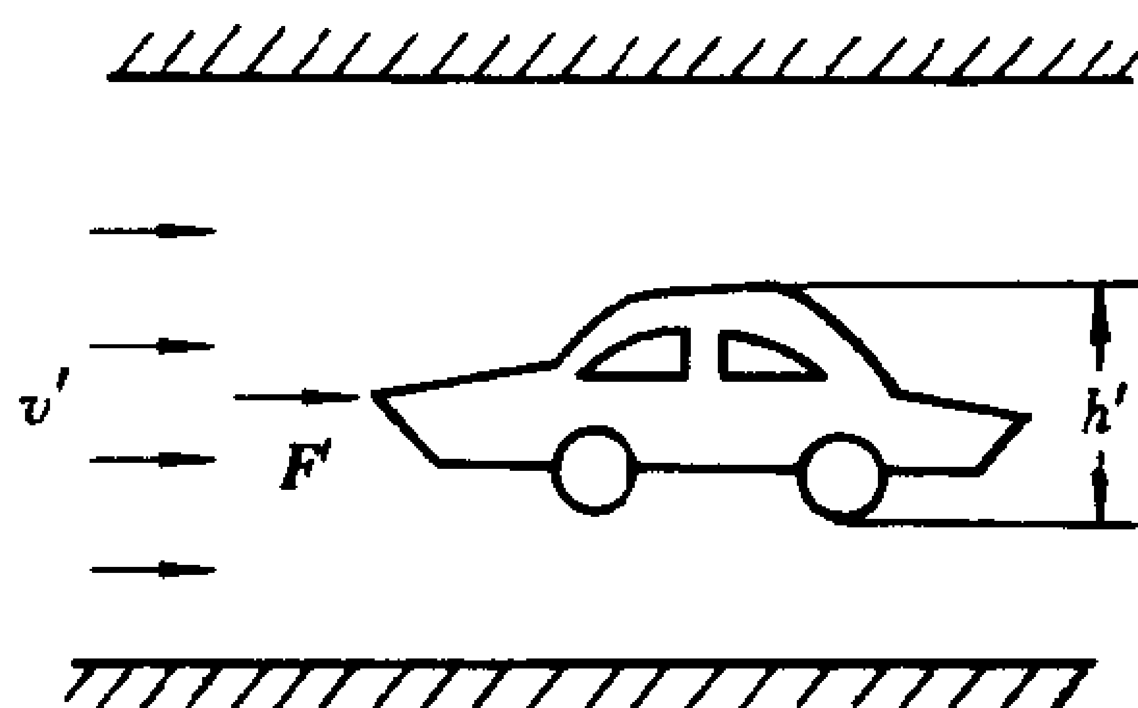
(1) 试求模型中的汽车高度 h'。

(2) 在模型中测得正面阻力为 $F'=1\ 500$ N,试求实物汽车行驶时的正面阻力为多少?

[答:$h'=0.873$ m,$F=1\ 830$ N]



题 4-2 图



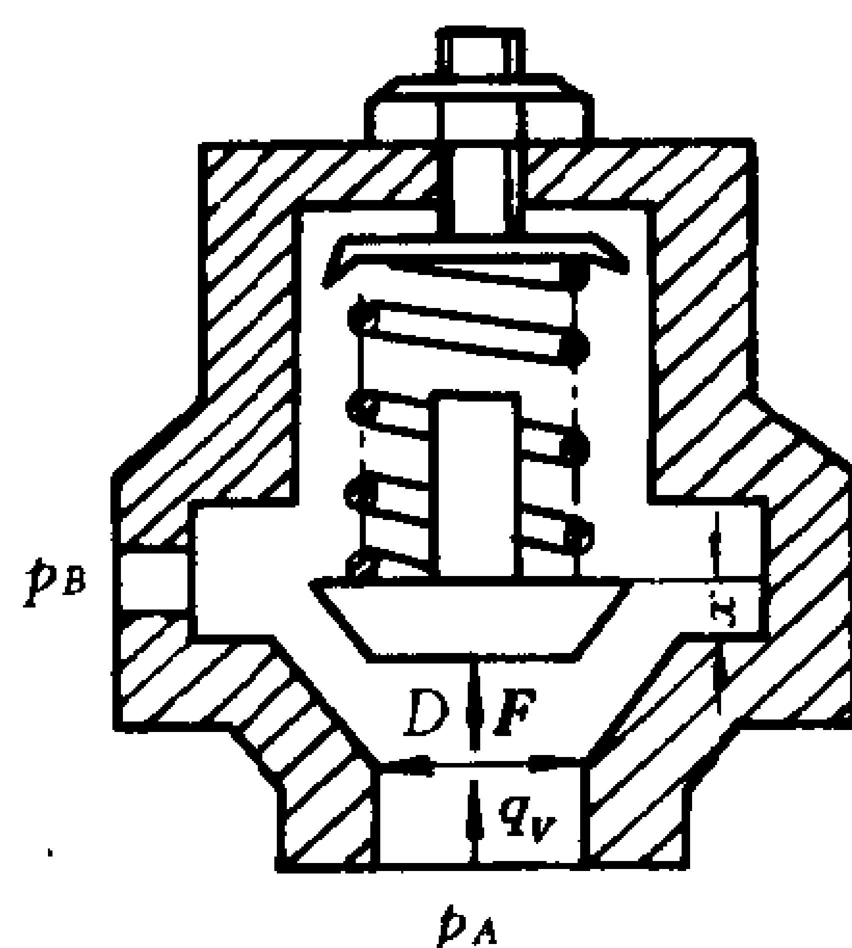
题 4-3 图

4-4. 原型号的溢流阀直径 $D'=25$ mm,最大开度 $x'=2$ mm 时压强差 $\Delta p'=10^3$ kPa,流量 $q'_V=5$ l/s,轴向作用力 $F'=150$ N。

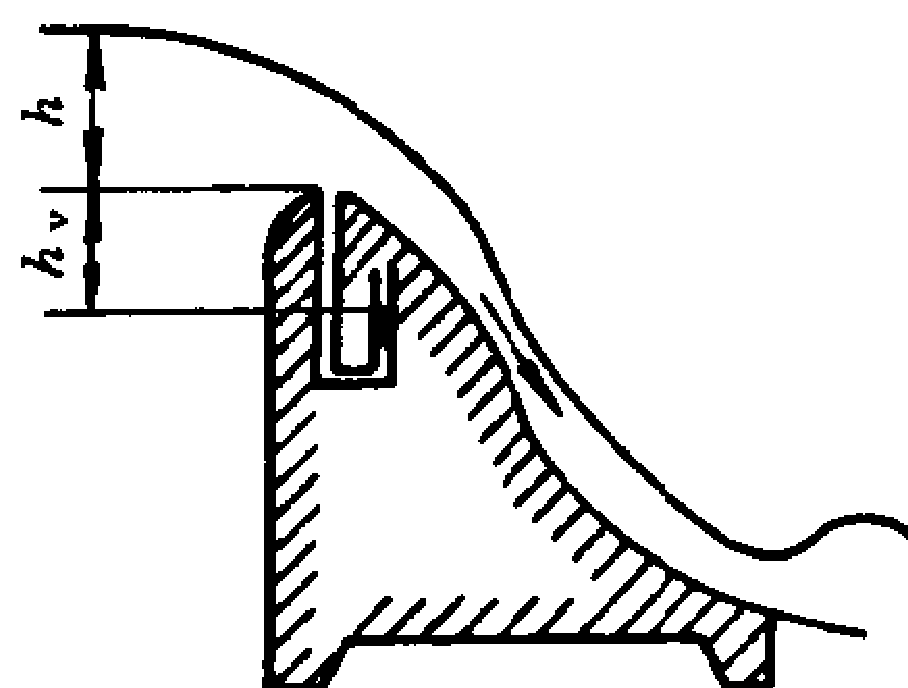
用同样液体为工质,准备研制一种新型号溢流阀,使其流量增大四倍而其压强差只增大两倍,并保证二者力学相似。

试问新型号溢流阀的直径 D 是多大? 最大开度多少? 在最大开度时的轴向力是多少?

[答:$D=42$ mm,$x=3.364$ mm,$F=848.5$ N]



题 4-4 图



题 4-5 图

4-5. 在实验室中用 $\delta_l=20$ 的比例模型研究溢流堰的流动。

(1) 如果原型堰上水头 $h=3$ m,试求模型上的堰上水头。

(2) 如果模型上的流量 $q'_V=0.19$ m^3/s,试求原型上的流量。

(3) 如果模型上的堰顶真空度 $h'_v=200$ mm 水柱,试求原型上的堰顶真空度。

[答:$h'=0.15$ m, $q_V=339.88$ m^3/s, $h_v=4$ m 水柱]

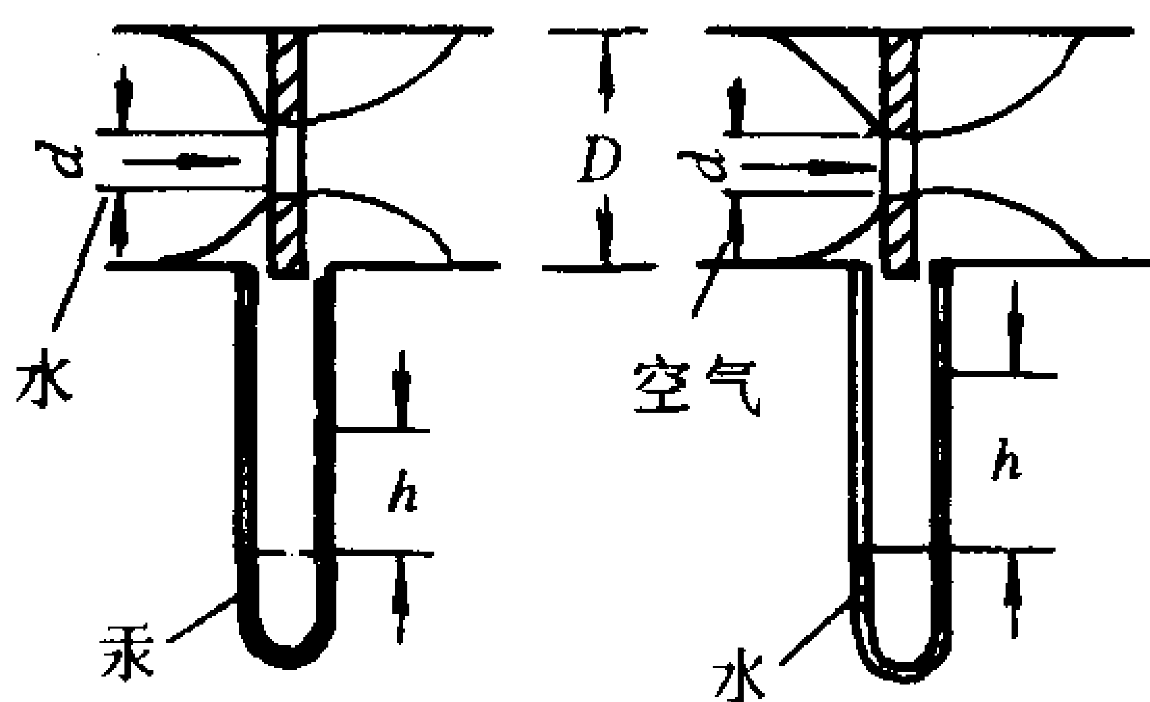
4-6. 题中的左图是用于水管的孔板流量计,孔板前后的压强差用汞差压计测量。实验得知其流量系数保持不变时的最小流量为 $q'_V=16$ l/s,此时差压计中汞柱的高度差为 $h'=45$ mm。

右图是准备用于空气管道的孔板流量计的设计方案,其尺寸 $D=200$ mm, $d=100$ mm 与左图相同,只是测量压强差改用水柱差压计。试推算此流量计当流量系数保持不变时的最小流量 q_V 及水柱差压计中的读数 h。

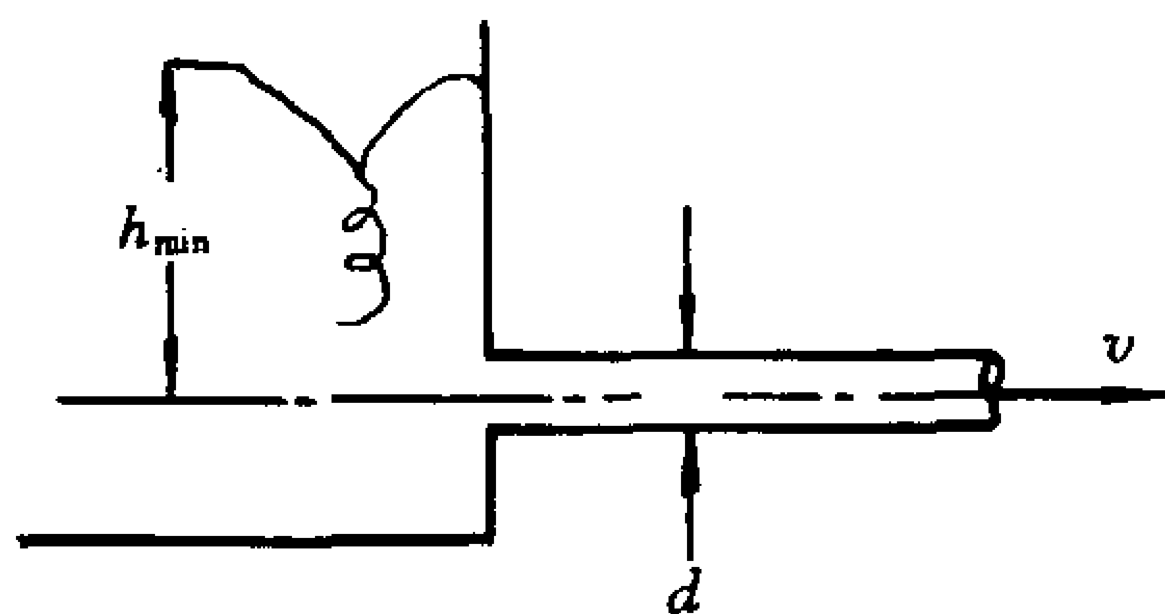
水的运动粘度　　　$\nu=10^{-6}$ m^2/s,

空气的运动粘度　　$\nu=15.6\times10^{-6}$ m^2/s,空气密度 $\rho=1.166$ kg/m^3。

[答:$q_V=250$ l/s, $h=160$ mm 水柱]



题 4-6 图



题 4-7 图

4-7. 为了不发生旋涡和吸入空气,必须用模型实验确定油泵吸油管在油池液面下的最小淹没深度 h_{min},这种实验要求考虑粘性和重力影响,因而必须保证模型和实物上的雷诺数与弗劳德数都各自相等。

实物管直径 $d=250$ mm,油液粘度 $\nu=0.75\times10^{-4}$ m^2/s,油液流量 $q_V=140$ l/s,模型的线性比例尺为 $\delta_l=5$。试求:

(1) 模型液体的运动粘度、流量及管中平均流速;

(2) 模型上测得 $h'_{min}=60$ mm,试问实物上 h_{min} 应为多少?

[答：$\nu' = 6.7\times10^{-6}\ \mathrm{m^2/s}$，$q'_V = 2.5\ \mathrm{l/s}$，$v' = 1.276\ \mathrm{m/s}$，$h_{\min} = 300\ \mathrm{mm}$]

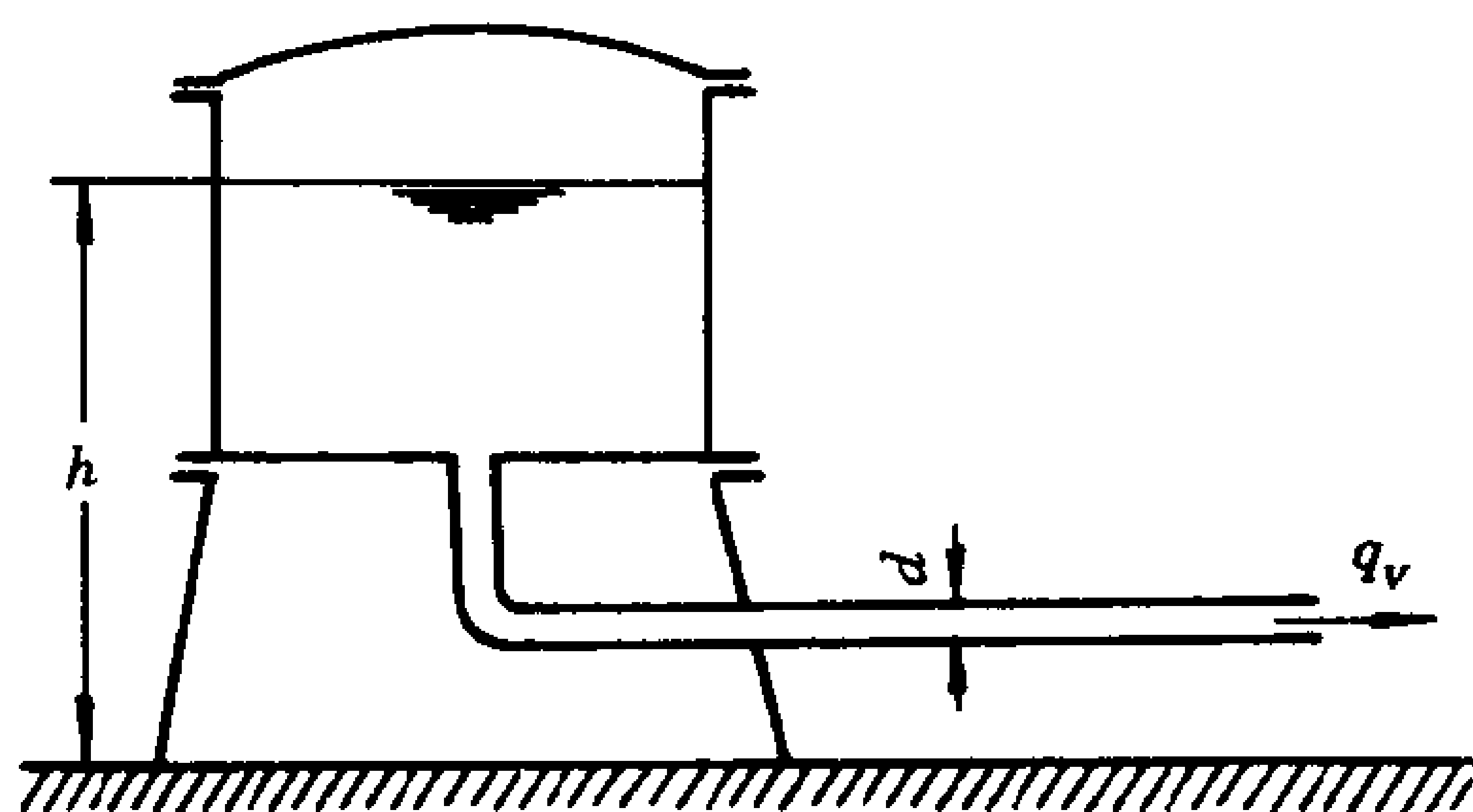
4-8. 煤油罐上的管路流动，准备用水塔进行模拟实验。已知煤油粘度 $\nu = 0.045\times10^{-4}\ \mathrm{m^2/s}$，煤油管直径 $d = 75\ \mathrm{mm}$，水的粘度 $\nu' = 0.01\times10^{-4}\ \mathrm{m^2/s}$，试求：

(1) 水管直径；

(2) 液面高度的比例尺；

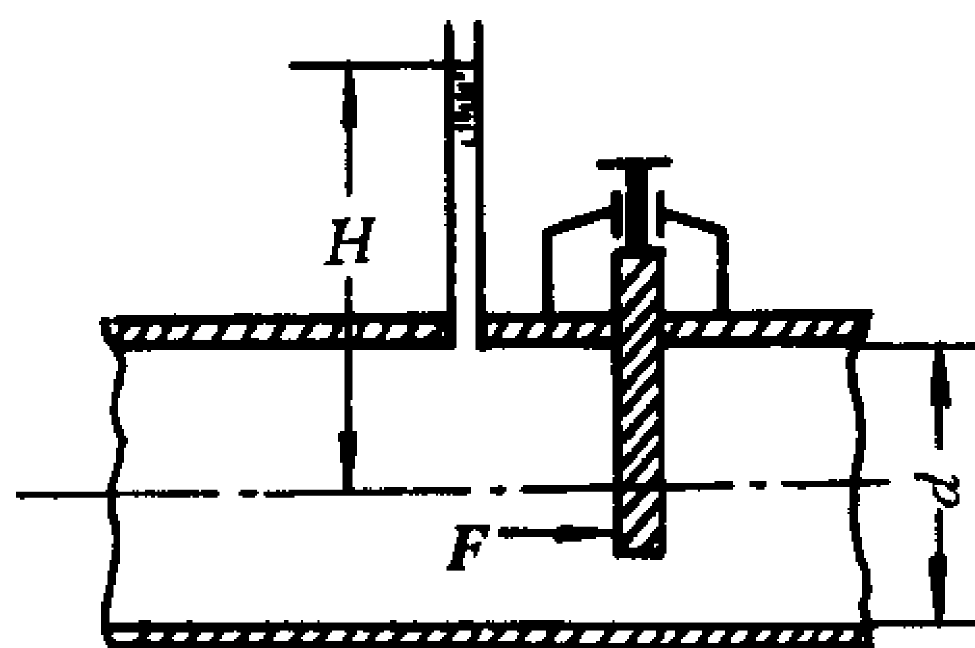
(3) 流量的比例尺。

[答：$d' = 27.5\ \mathrm{mm}$，$\delta_h = 2.73$，$\delta_q = 12.27$]



题 4-8 图

4-9. 水电站闸板阀在静水头 $H = 100\ \mathrm{m}$ 下工作，管道直径 $d = 2\ \mathrm{m}$。用 $\nu' = 1.3\times10^{-6}\ \mathrm{m^2/s}$ 的水进行模型实验，模型尺寸为 $d' = 0.2\ \mathrm{m}$，模型内水流动的雷诺数 $Re' = 10^6$。



题 4-9 图

(1) 试求模型内的流量 q'_V，

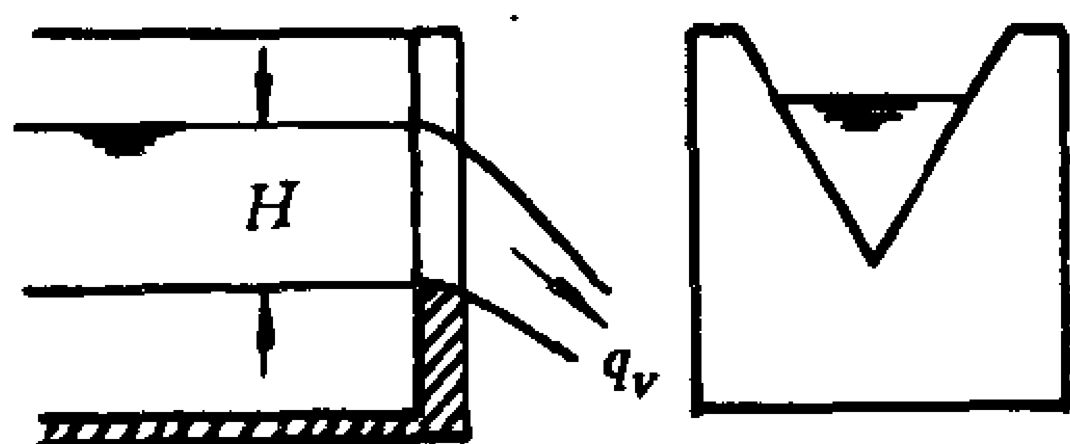
(2) 如果在 $q_V = C_q \dfrac{\pi d^2}{4}\sqrt{2gH}$ 式中的流量系数 $C_q = 0.6$，问模型阀应该在多大的静水头下工作？

(3) 测得模型阀受力为 $F' = 600\ \mathrm{N}$，问实物阀应受多大力 P_1。

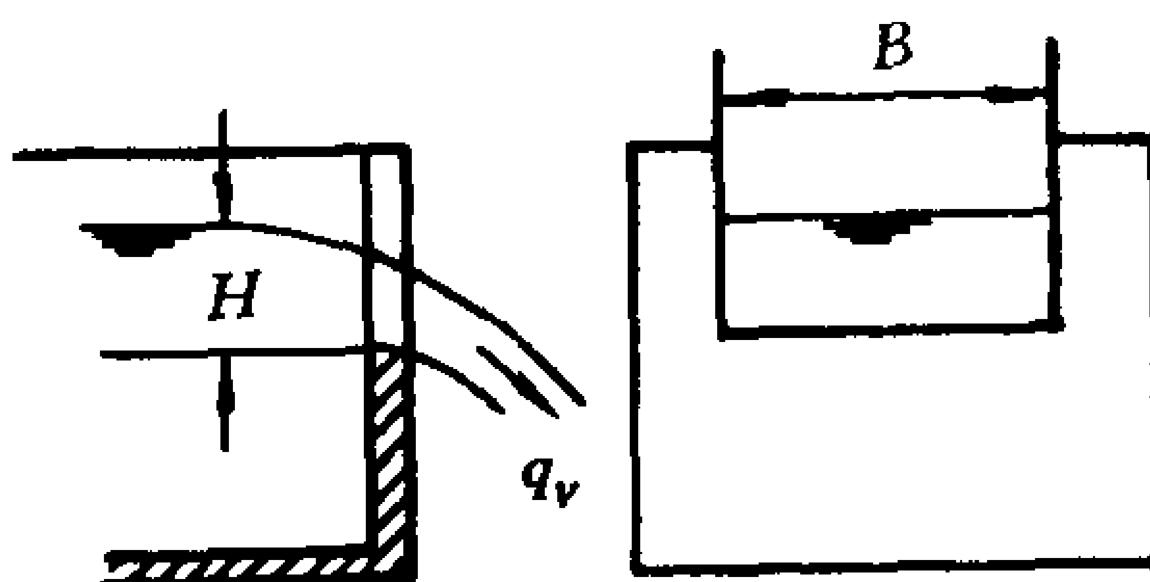
[答：$q'_V = 0.2042\ \text{m}^3/\text{s}, H' = 5.98\ \text{m}, F = 10^6\ \text{N}$]

4-10. 三角形水堰的流量 q_V 与堰上水头 H 及重力加速度 g 有关，试用量纲分析法确定 $q_V = f(H, g)$ 的关系式。

[答：$q_V = kH^2\sqrt{Hg}$]



题 4-10 图



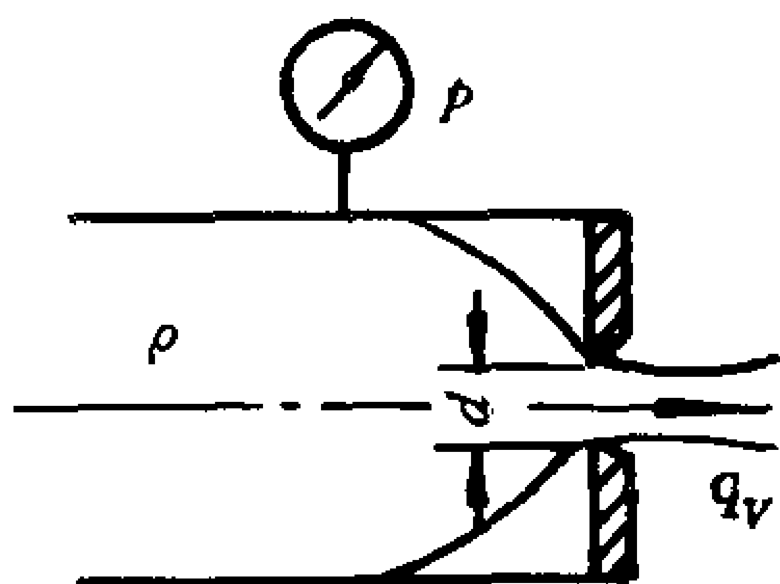
题 4-11 图

4-11. 矩形堰单位长度上的流量 $\frac{q_V}{B} = kH^x g^y$，式中 k 为常数，H 为堰顶水头，g 为重力加速度，试用量纲分析法确定待定指数 x、y。

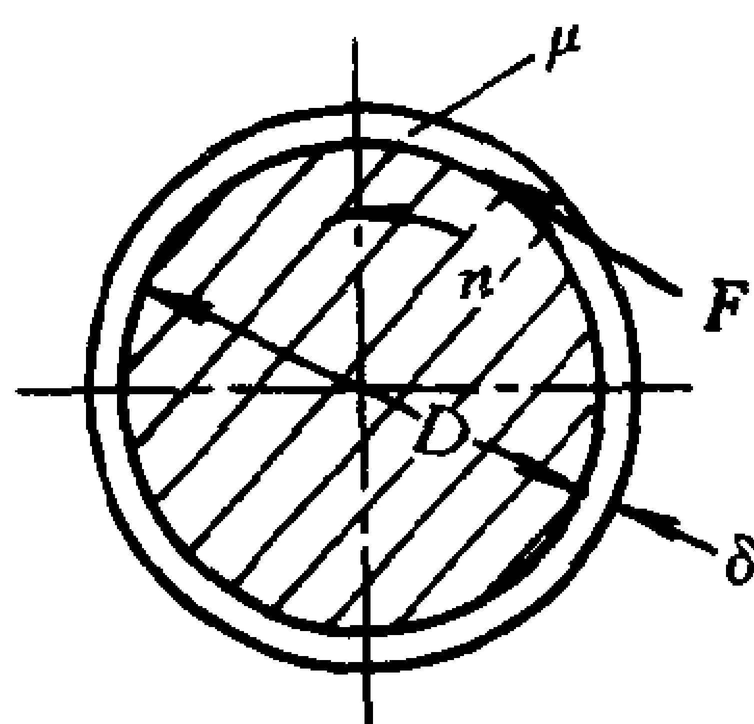
$\left[答：x = \frac{3}{2}, y = \frac{1}{2}\right]$

4-12. 经过孔口出流的流量与孔口直径 d、流体压强 p、流体密度 ρ 有关，试用量纲分析法确定流量的函数式。

$\left[答：q_V = kd^2\sqrt{\frac{p}{\rho}}\right]$



题 4-12 图

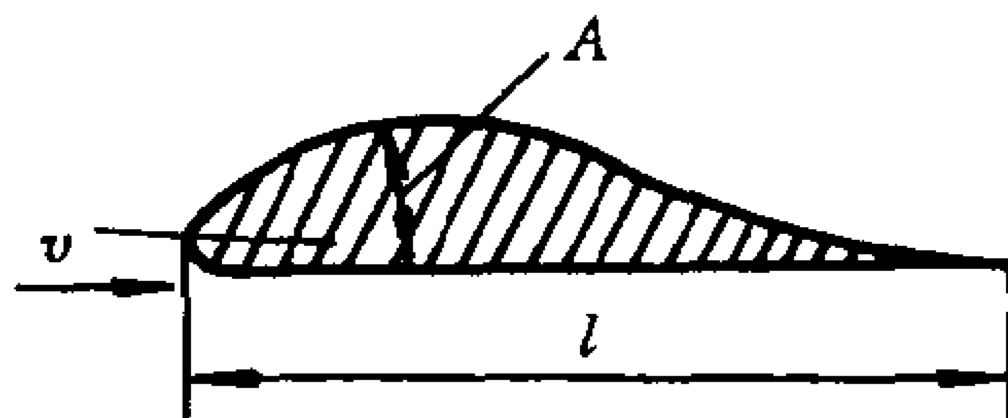


题 4-13 图

4-13. 同心滑动轴承的摩擦力 F 与轴的转速 n、油膜动力粘度 μ、轴的直径 D、径向缝隙 δ、油膜中的压强 p 有关，试用 π 定理确定其函数关系(建议取 n、D、p 为基本量)。

$$\left[\text{答}: F = D^2 pf\left(\frac{\mu n}{p}, \frac{\delta}{D}\right)\right]$$

4-14. 水翼船的阻力 F 与翼弦长度 l、翼型截面积 A、航行速度 v、水的密度 ρ、水的粘度 μ 有关，取 v、A、ρ 为基本量，用 π 定理确定阻力的函数关系式。



题 4-14 图

$$\left[\text{答}: F = Av^2 \rho f\left(\frac{l}{\sqrt{A}}, Re\right)\right]$$

第五章 管中流动

按流体与固体接触情况来分,流体运动主要有下列四种形式。一是流体在固体内部的管中流动和缝隙中流动,二是流体在固体外部的绕流,三是流体在固体一侧的明渠流动,四是流体与固体不相接触的孔口出流和射流。除此之外也还有一些更复杂的形式。这些广泛的流体运动形式与航空、水利等多种学科有关。就机械制造类专业来说,以第一种形式较为常见,不要说大范围的工厂车间中管道比比皆是,就是小范围的机床汽车中也往往有错综复杂的润滑、冷却、液压或燃料管道,甚至叶轮机叶轮及其他许多机械构件的通道也不妨可以看作是一种疏导流体的异形管道。

本章主要讨论管中不可压缩流体的运动规律,其中有许多基本概念对于绕流或明渠流动也是适用的,管中流动所涉及的问题包括流动状态、速度分布、起始段、流量和压差的计算、能量损失等等。其中能量损失问题是本章的重点。该问题在第三、四两章都稍有涉及但并未深入讨论,因为它与流动状态有关。本章首先介绍层流和湍流概念,讨论层流和湍流能量损失的形成原因和计算方法,介绍沿程阻力和局部阻力系数的公式和图表,然后以短管和长管为例说明上述原理的具体应用,最后再简单介绍管中水击现象。

§5-1 雷诺实验

雷诺数代表惯性力和粘性力之比。雷诺数不同,这两种力的比值也不同,由此产生内部结构和运动性质完全不同的两种流动

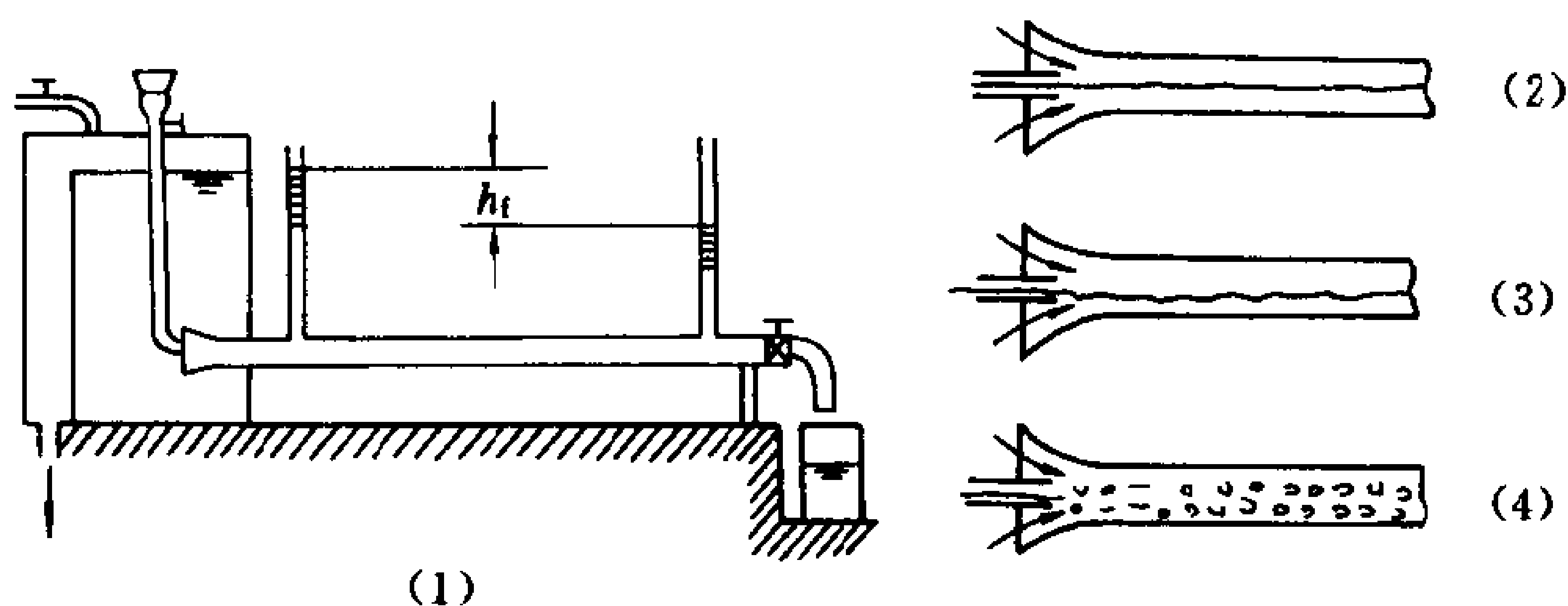


图 5－1　雷诺实验装置

状态。这种现象用图 5－1(1)所示的雷诺实验装置可以清楚地观测出来。

利用溢水管保持水箱中水位恒定,轻轻打开玻璃管末端的节流阀,然后再轻轻打开颜色水杯上的小阀。

当玻璃管中流速较小时,可以看到颜色水在玻璃管中呈明显的直线形状,如图 5－1(2)。不论颜色水出口摆在玻璃管口任何部位,颜色水的直线形状都很稳定,这说明此时整个管中的水都是沿轴向流动,流体质点没有横向运动,不互相混杂,这种流动状态称为层流。

将节流阀逐渐开大,颜色水开始抖动,直线形状破坏,如图 5－1(3),这是一种过渡状态。节流阀开大到一定程度,也就是管中流速增大到一定程度,则颜色水不再保持完整形状,而是破裂成如图 5－1(4)所示那样杂乱无章、瞬息变化的状态。这说明此时管中流体质点有剧烈的互相混杂,质点运动速度不仅在轴向而且在纵向均有不规则的脉动现象,这种流动状态称为湍流。

如果此时再将节流阀逐渐关小,湍乱现象逐渐减轻、管中流速降低到一定程度时,颜色水又恢复直线形状出现层流。

从玻璃管看到颜色水的这两种流动状态——层流和湍流,实际上是一切流体运动普遍存在的物理现象。

通过对雷诺实验的数据测定及分析,我们还可以得出更为深

刻的认识。

一、临界速度与临界雷诺数

如果管径 d 及流体运动粘度 ν 一定，则从层流变湍流时的平均速度也是一定的，此速度称为上临界速度，以 v'_c 表示；从湍流变层流时的平均速度也是一定的，此速度称为下临界速度，以 v_c 表示，$v'_c > v_c$。

如果管径 d 或流体运动粘度 ν 改变，则上、下临界速度也随之改变。但是，不论 d、ν、v'_c（或 v_c）怎样变化，而无量纲数 $\frac{v'_c d}{\nu}$ 或 $\frac{v_c d}{\nu}$ 却是永远一定的。从层流变湍流时的无量纲数 $\frac{v'_c d}{\nu}$ 称为上临界雷诺数，以 Re'_c 表示。从湍流变层流时的无量纲数 $\frac{v_c d}{\nu}$ 称为下临界雷诺数，以 Re_c 表示。雷诺通过测定得知：

$$Re'_c = 13\ 800$$

$$Re_c = 2\ 320$$

当管中的速度 v 并非临界值时，管中的雷诺数 $Re = \frac{vd}{\nu}$ 也不是临界雷诺数，两相比较可知：

$Re > 13\ 800$ 时，管中流动状态是湍流。

$Re < 2\ 320$ 时，管中流动状态是层流。

$2\ 320 < Re < 13\ 800$ 时，层流湍流的可能性都存在，不过湍流的情况居多。这是因为如下面所述，雷诺数较高时层流结构极不稳定，遇有外界振动干扰就容易变为湍流。

二、层流湍流的形成原因

层流湍流两种流动状态不仅存在于管流中，在自然界及其他技术环境中也普遍存在着这两种流动状态。它们的形成原因，特别是层流如何变成湍流，这至今仍然是层流稳定性理论及湍流内部机理两项研究中需要深入探讨的问题。

这里仅从雷诺数的物理意义方面作些粗浅的说明。雷诺数代表惯性力与粘性力之比，当 *Re* 较小而不超过其临界值时，支配流动的主要因素是粘性力。粘性力的方向与流体运动方向可能相反、可能相同，流体质点受到这种粘性力的作用，只可能沿运动方向降低或是加快速度而不会偏离其原来的运动方向，因而流体呈现层流状态，质点不发生各向混杂。

当 *Re* 增大甚至超过其临界值时，惯性力逐渐取代粘性力而成为支配流动的主要因素。沿流动方向的粘性力对质点的束缚作用降低，质点向其他方向运动的自由度增大，因而容易偏离其原来的运动方向，形成无规则的脉动混杂甚至产生可见尺度的涡旋，这就是湍流。

如果 *Re* 介于上下临界值之间，虽然有可能是湍流也有可能是层流。但实践证明这种情况下的层流往往也是不稳定的。在遇到外界干扰和振动时，原来的流线有微许起伏波动，例如形成图 5－2(1)所示那样，左面成波峰、右面成波谷形状。按照伯努利方程式分析，波峰上侧流道断面变窄，速度增大，压强降低，波峰下侧流道断面变宽，速度减小，压强增大。于是流线两侧的压强差会使波峰更加隆起，同理使波谷更加凹陷，如图 5－2(2)所示。与此同时，在流线的每一侧也会产生从高压部位流向低压部位的所谓二次流，其流动方向如图 5－2(2)、(3)中的箭头所示。结果流线会被扭曲成图 5－2(4)所示的形状，继续发展下去，流线终将被冲断，形成如图 5－2(5)所示的脉动涡旋，这样原来不稳定的层流就转变为湍流。这也就是雷诺数介于上下临界值之间时，

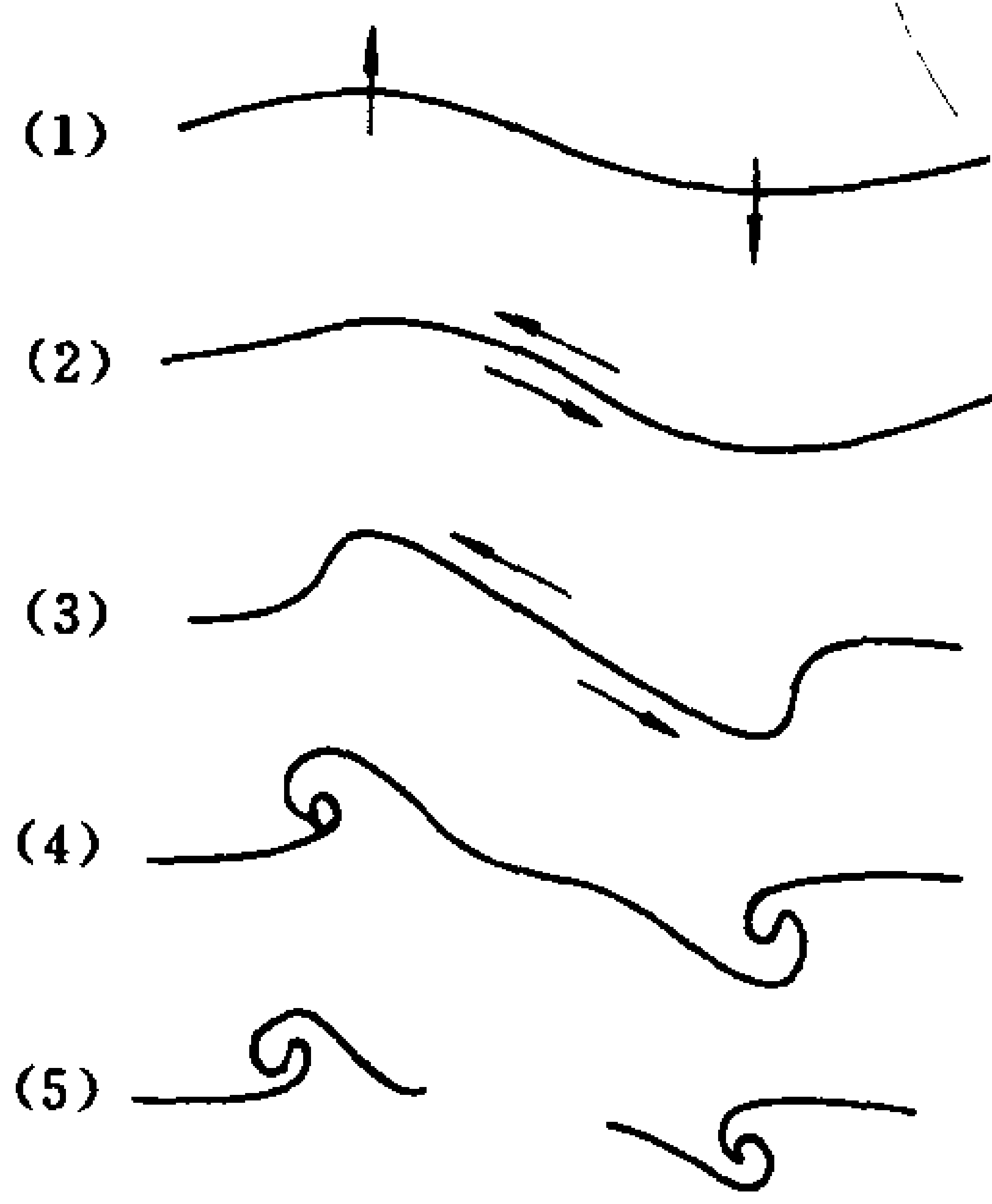


图 5－2　涡旋形成过程

出现湍流的机会比出现层流的机会更多的一种原因，事实上也就是对层流如何变成湍流的一种形象性的解释。

因此，一般可认为层流湍流的判别标准就是下临界雷诺数 $Re_c=2\ 320$，即

当 $Re<2\ 320$ 时，管中是层流，

当 $Re>2\ 320$ 时，管中是湍流。

三、水力直径

一般雷诺数 $\frac{vl}{\nu}$ 中的特征尺寸 l 在圆形管道中取为直径，因而圆管的雷诺数是 $\frac{vd}{\nu}$，但在异形管道中用什么作为雷诺数中的特征尺寸呢？

我们看一下圆管直径与断面 A 和断面上流体固体接触周长 S 的关系

$$4\frac{A}{S}=4\frac{\frac{\pi}{4}d^2}{\pi d}=d$$

就可以受到启发。异形断面管道也可以用过流断面面积 A 与过流断面上流体与固体接触周长 S 之比的 4 倍来作为特征尺寸。这种尺寸称为水力直径，用 d_H 表示

$$d_H=4\frac{A}{S} \tag{5-1}$$

于是异形管道的雷诺数为 $Re=\frac{vd_H}{\nu}$，圆形管道的雷诺数仍然是 $Re=\frac{vd_H}{\nu}=\frac{vd}{\nu}$，这二者是一致的。

根据实验，几种异形管道层流湍流的判别标准 Re_c 值列于表 5-1 中，比较 Re 与 Re_c 的大小即可判别这几种异形管道中的流动状态。

表 5-1　异形管道的雷诺数与临界雷诺数

	正方形	正三角形	同心缝隙	偏心缝隙
管道断面形状				
$Re=\frac{v}{\nu}d_H$	$\frac{v}{\nu}a$	$\frac{v}{\nu}\frac{a}{\sqrt{3}}$	$\frac{v}{\nu}2\delta$	$\frac{v}{\nu}(D-d)$
Re_c	2 070	1 930	1 100	1 000

四、管中层流湍流的水头损失规律

根据第三章中的(3-115)式 $h_f=\frac{p_1-p_2}{\rho g}$,只要在雷诺实验装置上读出玻璃管前后的水柱差,即可得到其水头损失。改变速度逐次测量层流湍流两种情况下的 v 与对应的 h_f 值。将实验结果标在对数坐标纸上如图 5-3 所示。

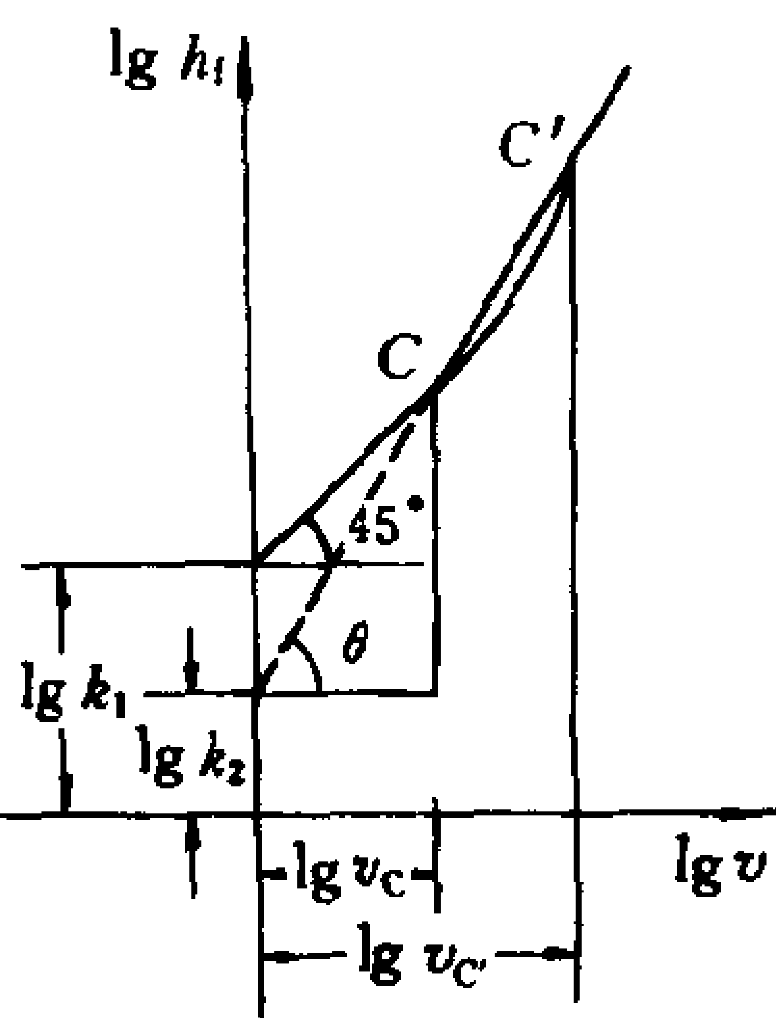


图 5-3　层流湍流的水头损失规律

层流时实验点是一条与横轴成 45°的直线,因而

$$\lg h_f=\lg k_1+\tan 45°\lg v=\lg k_1 v$$

所以　　$h_f=k_1 v$　　(5-2)

湍流时实验点是一条与横轴成 $\theta(\theta>45°)$角的直线,因而

$$\lg h_f=\lg k_2+\tan\theta\lg v=\lg k_2 v^m$$

所以　　$$h_f=k_2 v^m \tag{5-3}$$

因　　$\theta>45°$,所以 $m>1$

这说明层流、湍流的水头损失(或单位重力流体的能量损失)变化规律是不同的。上述实验中的 k_1、k_2 及 m 值究竟受什么因

素影响，尚未详细讨论。为了分析层流湍流的水头损失规律，我们有必要对层流湍流进行更深入的研究。

[**例题 5-1**] 图 5-4 为内燃机冷却系统的散热器，热水在散热片间的扁平缝隙中流动，冷却空气将散热片的热量带走。为提高散热效果，要求水的流动状态为湍流，试确定水在缝隙中的最小平均速度。已知缝隙宽度 $h=2$ cm，水温 100 ℃

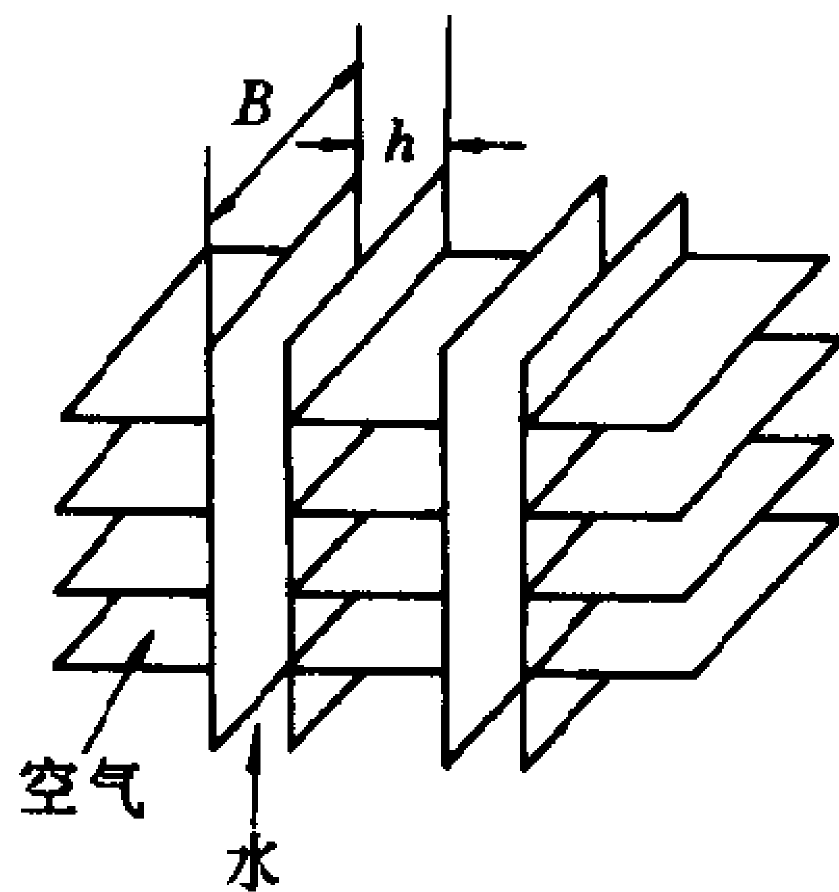


图 5-4　散热器

[**解**] 由表 1-6 查得 100 ℃时水的运动粘度为

$$\nu=0.296\times10^{-6}\ \mathrm{m^2/s}$$

缝隙流道的水力直径为

$$d_H=\frac{4A}{S}=\frac{4Bh}{2B}=2h=4\ \mathrm{cm}$$

根据临界雷诺数 $Re_c=2\ 320$，确定水的最小平均流速为

$$v=\frac{2\ 320\nu}{d_H}=\frac{2\ 320\times0.296\times10^{-6}}{0.04}=0.017\ \mathrm{m/s}$$

§5-2　圆管中的层流

雷诺数$\frac{vd}{\nu}$较小，也就是速度、直径较小而粘度较大时出现层流。工程上层流情况很多，如石油输运，化工管道，地下水渗流甚至轻工、建筑、生理等许多领域都有。层流在机械工程上尤其重要，液压传动、机械润滑、燃料供给、机床静压支承、滑动轴承等许多技术问题中都会遇到液体的层流运动。本书将缝隙中的层流单独列为第七章，本节只讨论定常不可压缩流体在圆管中的层流。

一、分析层流运动的两种方法

第一种方法是从纳维-斯托克斯(N-S)方程式出发，结合层流运动的数学特点建立常微分方程。第二种方法是从微元体的受力平衡关系出发建立层流的常微分方程。这两种方法效果一致但

又各有特点。第一种方法为应用 N－S 方程解决湍流、附面层等问题奠定基础，第二种方法简明扼要、物理概念明确。下面分别叙述这两种方法。

1. 第一种方法

这种方法是根据圆管中层流的数学特点对 N－S 方程式进行简化，定常不可压缩完全扩展段的管中层流具有如下五方面的特点。

(1) 只有轴向运动

取 $Oxyz$ 坐标系，使 y 轴与管轴线重合，如图 5－5 所示，因为层流中没有纵向跳动，故

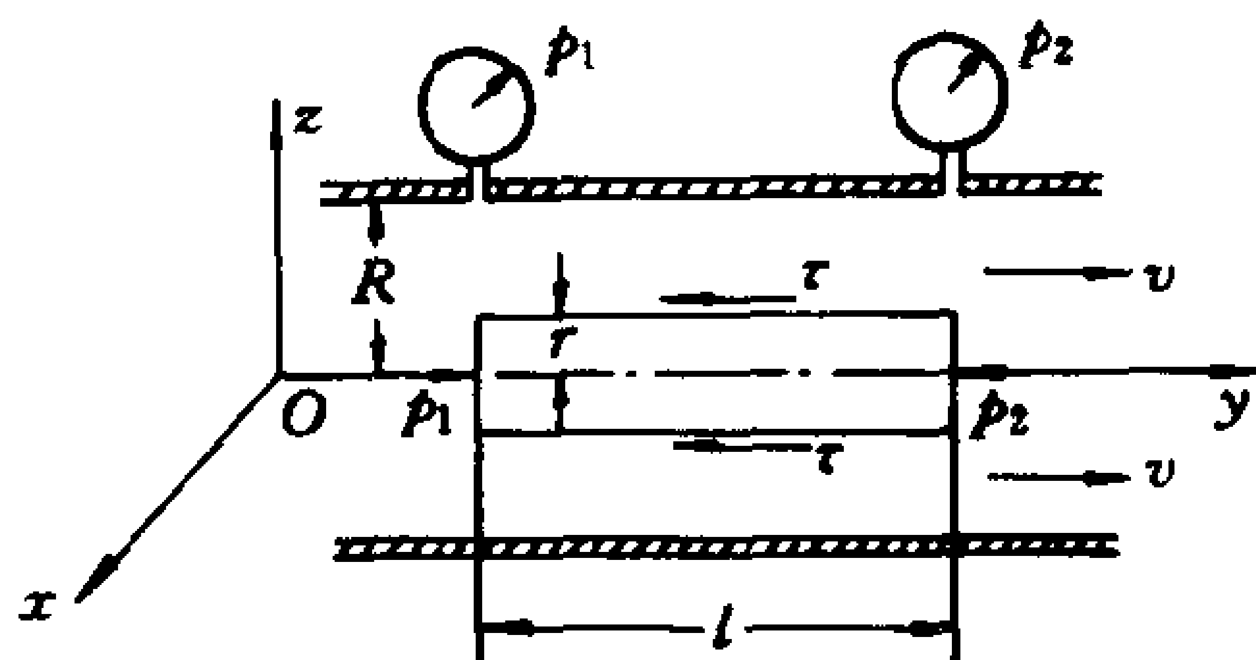


图 5－5　圆管层流

$$v_y \neq 0,\ v_x = v_z = 0$$

于是去掉 v_x、v_z 后，N－S 方程式变成

$$\left.\begin{aligned}
& f_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right) \\
& \qquad = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} \\
& f_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\
& f_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0
\end{aligned}\right\} \tag{5-4}$$

(2) 定常、不可压缩

定常流动　　$\frac{\partial v_y}{\partial t} = 0$

由不可压缩流体的连续方程式

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0$$

可得

$$\frac{\partial v_y}{\partial y}=0$$

于是

$$\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}=0$$

(3) 速度分布的轴对称性

由于壁面的摩擦，在 Oxz 坐标面，即管中的过流断面上各点速度是不同的，但圆管流动是轴对称的，因而速度 v_y 沿 x 方向、z 方向以及任意半径方向的变化规律应该相同，而且 v_y 只随 r 变化。

故

$$\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 v_y}{\partial r^2}=\frac{\mathrm{d}^2 v_y}{\mathrm{d}r^2}$$

(4) 等径管路压强变化的均匀性

由于壁面摩擦及流体内部的摩擦，压强沿流动方向是逐渐下降的，但在等径管路上这种下降应是均匀的，单位长度上的压强变化率$\frac{\partial p}{\partial y}$可以用任何长度 l 上的压强变化的平均值表示。即

$$\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=-\frac{p_1-p_2}{l}=-\frac{\Delta p}{l}$$

式中“－”号说明压强变化率$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$是负值，压强沿流动方向下降。

(5) 管道中质量力不影响其流动性能

如果管路是水平的，则

$$f_x=f_y=0,\ f_z=-g$$

从(5－4)式的第二、三式可以看到在 Oxz 断面，也就是过流断面上，流体压强是按照流体静力学的规律分布，而在第一个方程式中，质量力的投影 $f_y=0$，故而质量力对水平管道的流动特性是没有影响的。非水平管道中质量力只影响位能，亦与流动特性无关。

根据上述五个特点,(5-4)式就可以化简为

$$\frac{\Delta p}{\rho l}+2\nu\frac{d^2 v_y}{dr^2}=0$$

或

$$\frac{d^2 v_y}{dr^2}=-\frac{\Delta p}{2\mu l}$$

积分得

$$\frac{dv_y}{dr}=-\frac{\Delta p}{2\mu l}r+C$$

当 $r=0$ 时,管轴线上的速度远离管壁,有最大值,故 $\frac{dv_y}{dr}=0$。于是积分常数 $C=0$,得

$$\frac{dv_y}{dr}=-\frac{\Delta p}{2\mu l}r \tag{5-5}$$

这就是用第一种方法所得到的一个一阶常微分方程,下面用第二种方法。同样也可以得到这一结果。

2. 第二种方法

这种方法是在圆管中取任意一个圆柱体分析它的受力平衡状态,而后再引用层流的牛顿内摩擦定律进行推演。如在图 5-5 中,取半径为 r,长度为 l 的一个圆柱体,在定常流动中这个圆柱体处于平衡状态,因而作用在圆柱体上的外力在 y 方向的投影和为零。此种外力有二:一为两端面上的压力 $(p_1-p_2)\pi r^2$;一为圆柱面上的摩擦力 $\tau 2\pi rl$。于是,由 $\sum F_y=0$,可得

$$(p_1-p_2)\pi r^2-\tau\cdot 2\pi rl=0$$

化简并引用牛顿内摩擦定律 $\tau=-\mu\frac{dv_y}{dr}$,可得

$$\frac{dv_y}{dr}=-\frac{p_1-p_2}{2\mu l}r=-\frac{\Delta p}{2\mu l}r \tag{5-5'}$$

这样我们就可以很容易得出与第一种方法相同的结果。由此可见,这种方法比较简捷,不过仔细分析,这种方法也同样是包含着上述一些数学特点的,因为只有在定常、单向流动、轴对称、等径均匀流等情况下才有可能取出上述平衡圆柱体建立这样简单的平衡

方程的。建立起(5-5)式以后，继续分析层流特性时，就没有这两种方法的区别了。

二、速度分析与流量

对(5-5)式进行积分则

$$v_y=-\frac{\Delta p}{4\mu l}r^2+C$$

圆管边界条件 $r=R$ 时，$v_y=0$，于是 $C=\frac{\Delta p}{4\mu l}R$，所以

$$v_y=\frac{\Delta p}{4\mu l}(R^2-r^2) \tag{5-6}$$

这就是圆管层流的速度分布规律，公式说明过流断面上的速度 v_y 与半径 r 成二次旋转抛物面关系如图 5-6 所示。

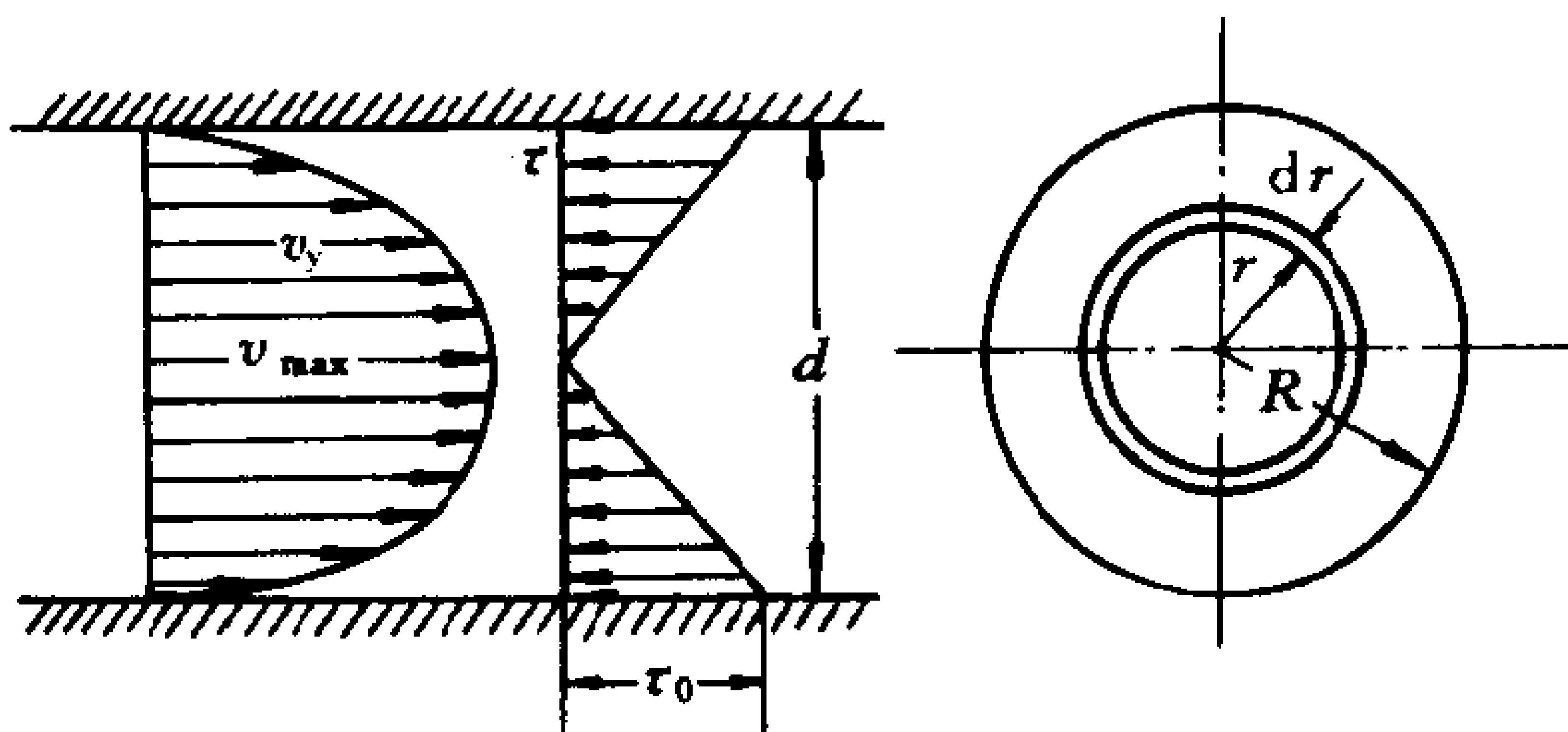


图 5-6　圆管层流的速度分布与切应力分布

取半径 r 处宽度为 $\mathrm{d}r$ 的微小环形面积，则可得流量为

$$q_V=\int_A v_y\mathrm{d}A=\int_0^R\frac{\Delta p}{4\mu l}(R^2-r^2)2\pi r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\pi\Delta pR^4}{8\mu l}=\frac{\pi\Delta pd^4}{128\mu l} \tag{5-7}$$

此式称为哈根-伯肃叶(Hagen-Poiseuille)定律，它与精密实验的测定结果完全一致，所谓 N-S 方程的准确解主要是通过这一公式而得到确认的。这一定律验证了层流理论和实践的完美的一致性。

哈根-伯肃叶定律也是测定液体粘度的依据。从(5-7)式解

出

$$\mu=\frac{\pi\Delta pd^4}{128lq_V}=\frac{\pi\Delta pd^4t}{128lV}$$

如图 5－7(1)所示，在固定内径 d、长度 l 的细管两端测出压强差 $\Delta p=p_1-p_2$ 及流出一定体积 V 的时间 t，按上式即可得出流体的动力粘度 μ。

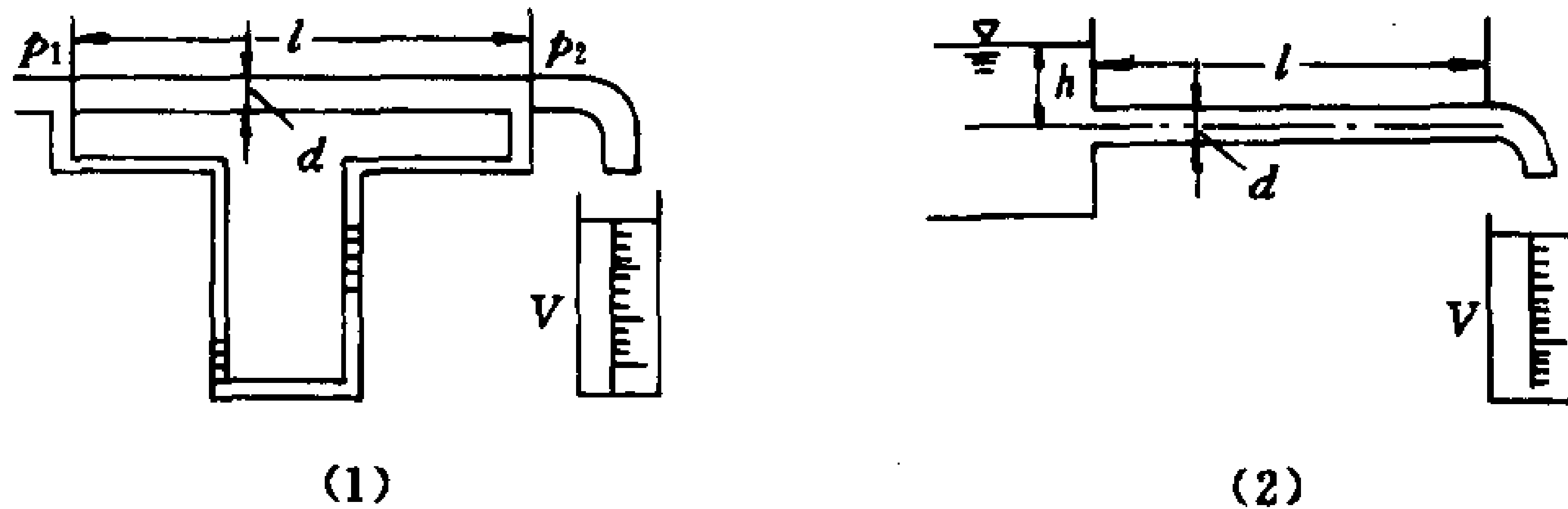


图 5－7　粘度测定原理

如果细管一端接大气，一端连接固定液面高度 h 的容器，如图 5－7(2)所示，则以 $\Delta p=\rho gh$ 代入(5－7)式可得

$$\nu=\frac{\pi ghd^4t}{128lV}=kt \tag{5-8}$$

在仪器上 d、l、h、V 均为一定，k 为仪器常数，因而只需测出时间 t 即可算出流体的运动粘度 ν。这就是工业用粘度计的理论依据。

三、平均速度和最大速度

管中平均速度可由(5－7)式求得

$$v=\frac{q_V}{A}=\frac{\pi\Delta pR^4}{8\mu l\pi R^2}=\frac{\Delta p}{8\mu l}R^2 \tag{5-9}$$

管中最大速度在轴心 $r=0$ 处，由(5－6)式得

$$v_{max}=\frac{\Delta pR^2}{4\mu l}=2v \tag{5-10}$$

由此可见，如果用皮托管测出管中层流在轴心处的速度，则可以直接算出流量

$$q_V = vA = \frac{v_{max}}{2}\pi R^2$$

四、切应力分布

根据牛顿内摩擦定律,在圆管中可得

$$\tau = \pm \mu \frac{dv_y}{dz} = -\mu \frac{dv_y}{dr} = \frac{\Delta pr}{2l} \tag{5-11}$$

此式说明在层流的过流断面上,切应力与半径成正比,$\tau = \tau(r)$的分布规律,如图 5-6 所示,称为切应力的 K 字形分布。图中箭头表示慢速流层作用在快速流层上的切应力的方向。

当 $r = R$ 时,可得管壁处的切应力为

$$\tau_0 = \frac{\Delta pR}{2l} \tag{5-12}$$

这与第三章的(3-114)式是一致的,当时证明的这一公式并不限于层流,只要是圆管流动,这一公式就成立,现在只不过又验证了层流速度分布的正确性罢了。

有了管壁处的切应力 τ_0,再乘以管壁上的摩擦面积 $2\pi Rl$,则可得出作用在管壁上的总摩擦力

$$\begin{aligned} F &= \tau_0 2\pi Rl = \frac{\Delta pR}{2l} 2\pi Rl = \Delta p\pi R^2 \\ &= \frac{8\mu lv}{R^2}\pi R^2 = 8\pi\mu lv \end{aligned} \tag{5-13}$$

式中的 $F = \Delta p\pi R^2$ 也不限于层流。处于平衡状态的管流两端面上的压力差与作用在管壁上的摩擦力相平衡,这一原则对于湍流也同样是适用的。

五、动能与动量修正系数

根据第三章的公式(3-34)及(3-36)可得管中层流的动能修正系数 α 与动量修正系数 β 为

$$\alpha = \frac{\int_A v_y^3 dA}{v^3 A} = \frac{\int_0^R \left[\frac{\Delta p}{4\mu l}(R^2 - r^2)\right]^3 2\pi r dr}{\left(\frac{\Delta pR^2}{8\mu l}\right)^3 \pi R^2}$$

$$= \frac{16\int_0^R (R^2 - r^2)^3 r\mathrm{d}r}{R^8} = 2$$

$$\beta = \frac{\int_A v_y^2 \mathrm{d}A}{v^2 A} = \frac{\int_0^R \left[\frac{\Delta p}{4\mu l}(R^2 - r^2)\right]^2 2\pi r\mathrm{d}r}{\left(\frac{\Delta p R^2}{8\mu l}\right)^2 \pi R^2}$$

$$= \frac{8\int_0^R (R^2 - r^2)^2 r\mathrm{d}r}{R^6} = \frac{4}{3}$$

六、沿程损失

在等径管路中,由于流体与管壁以及流体本身的内部摩擦,使得流体能量沿流动方向逐渐降低,这种引起能量损失的原因叫做沿程阻力。沿程能量损失可以用压强损失、水头损失或功率损失三种形式表示。

1. 压强损失

由哈根－伯肃叶定律可得用流量计算的压强损失为

$$\Delta p = \frac{8\mu l q_V}{\pi R^4} = \frac{128\mu l q_V}{\pi d^4} \tag{5-14}$$

用平均速度计算的压强损失为

$$\Delta p = \frac{8\mu l v}{R^2} = \frac{32\mu l v}{d^2} \tag{5-15}$$

以压强差表示损失在液压技术中最为方便。

2. 水头损失

根据伯努利方程式知道等径管路的水头损失就是管路两端压强水头之差,即

$$h_f = \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{8\nu l q_V}{\pi g R^4} = \frac{128\nu l q_V}{\pi g d^4} \tag{5-16}$$

或

$$h_f = \frac{8\nu l v}{g R^2} = \frac{32\nu l v}{g d^2} \tag{5-17}$$

在雷诺实验中曾经指出，层流沿程水头损失与 v 的一次方成比例，现在可以知道(5－2)式中的比例常数 k_1 就是$\frac{8\nu l}{gR^2}$或$\frac{32\nu l}{gd^2}$。

根据达西公式，不论层流、湍流，圆管中的沿程水头损失一概用 $h_f=\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}$表示，以此与(5－17)式比较可得层流的沿程阻力系数

$$\lambda=\frac{64\nu}{vd}=\frac{64}{Re} \tag{5-18}$$

于是达西公式在层流中可以写成

$$h_f=\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}=\frac{64}{Re}\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g} \tag{5-19}$$

此式所表示的沿程水头损失是最常用最基本的一种形式。

3．功率损失

用泵在管路中输送流体，常常要求计算用来克服沿程阻力所消耗的功率，这种所谓的功率损失往往就是液压传动或远程输送中选择油泵功率大小的主要依据。

功率损失 P 可以用水头损失乘以流量再乘以 ρg 来计算，即 $h_f\rho gq_V$，也可以用压差损失乘以流量来计算，即 Δpq_V，甚至也可以用管壁摩擦力乘以流体运动速度来计算，即 Fv，从下面等式可以看到这几种结果都是一样的：

$$P=h_f\rho gq_V=\frac{\Delta p}{\rho g}\rho gq_V=\Delta pq_V=\Delta pAv=Fv \tag{5-20}$$

按哈根－伯肃叶定律，可得层流的功率损失为

$$P=\Delta pq_V=\frac{8\mu lq_V^2}{\pi R^4}=\frac{128\mu lq_V^2}{\pi d^4} \tag{5-21}$$

从公式可知，为输送一定流量的流体，适当降低粘度或者适当加大管径都可降低功率损耗，不过应以 $Re<2\ 320$ 为界，否则变成湍流就出现另外的情况了。

七、层流起始段

如图 5－8(1)所示，层流的速度抛物线规律，并不是刚入管口

就能立刻形成,而是要经过一段距离,这段距离叫做层流起始段。

在起始段内,过流断面上的均匀速度不断向抛物面分布规律转化,因而在起始段内流体的内摩擦力大于完全扩展了的层流中的流体内摩擦力,反映在沿程阻力系数上,成为 $\lambda=\frac{A}{Re}$(而 $A>64$)。由实验得层流起始段的长度为

$$L=0.028\ 75dRe \tag{5-22}$$

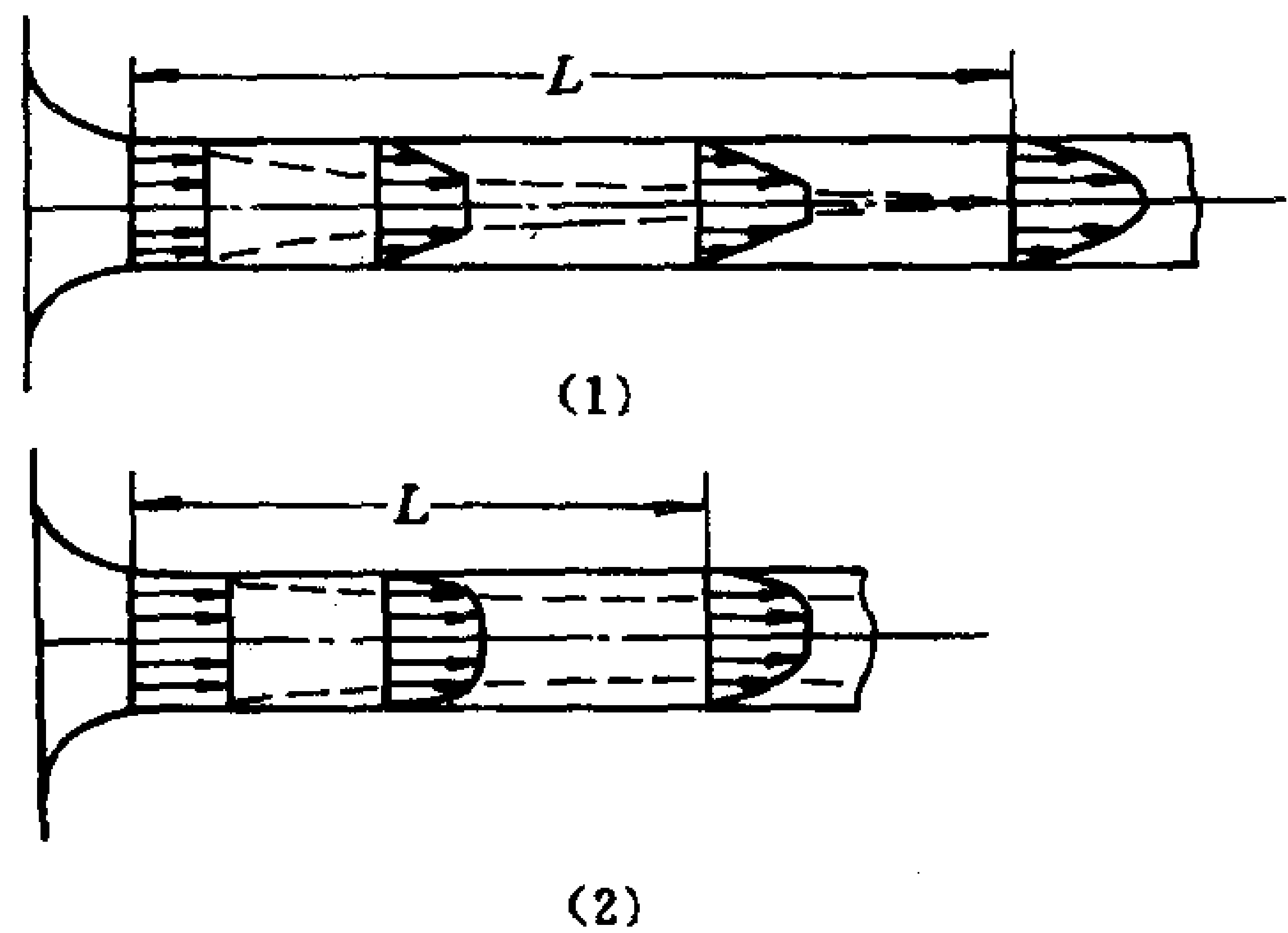


图 5-8 层流、湍流起始段

据此算出 $Re=100$ 时 $L=3d$;$Re=1\ 000$ 时 $L=30d$;$Re=2\ 320$时 $L=67d$。

如果管路长度 $l\gg L$,则起始段的影响可以忽略;

如果管路长度 $l<L$,则计算沿程水头损失的公式是

$$h_{\mathrm{f}}=\frac{A}{Re}\ \frac{l}{d}\ \frac{v^2}{2g} \tag{5-23}$$

式中 A 的实验值可由表 5-2 查出。

表 5-2 层流起始段的 A 值

$\frac{l}{dRe}$	0.002 5	0.005	0.01	0.012 5	0.015	0.02	0.025	0.028 75
A	122	105	88	82.4	79.16	74.38	71.5	69.56

液压传动中许多油管均不甚长，即使管中出现层流也往往是处于起始段之内，因而，如果仍按$\frac{64}{Re}$计算，其沿程阻力系数λ，则显然是偏低了些。根据具体的Re及$\frac{l}{d}$的数值，按$\lambda=\frac{A}{Re}$计算可以更加准确。不过这样比较麻烦。为了简化计算有时油压短管中常取$\lambda=\frac{75}{Re}$，这样就适当修正了起始段的影响。

图5－8(2)中表示的是湍流起始段。由于湍流质点互相混杂，因而流体进入管口后用不到很长距离就可以完成其在断面上的湍流速度分布规律，如图5－8(2)所示，通常湍流起始段比层流起始段要短些。

[**例题5－2**] 图5－9是为收集大量浮在海面上的污染油液而用的皮带输液装置，皮带运动速度为$v_0=5$ m/s，由摩擦力而输运的油层厚度为$\delta=2$ mm，皮带倾斜角$\alpha=20°$，油液粘度$\mu=0.02$ Pa·s，相对密度为0.8，油层压强均为大气压，试求0.7 m宽度皮带所能输送的流量是多少？

[**解**] 为了判断流动状态，假定暂取$\frac{v_0}{2}$作为油层的平均速度，δ为水力直径，则

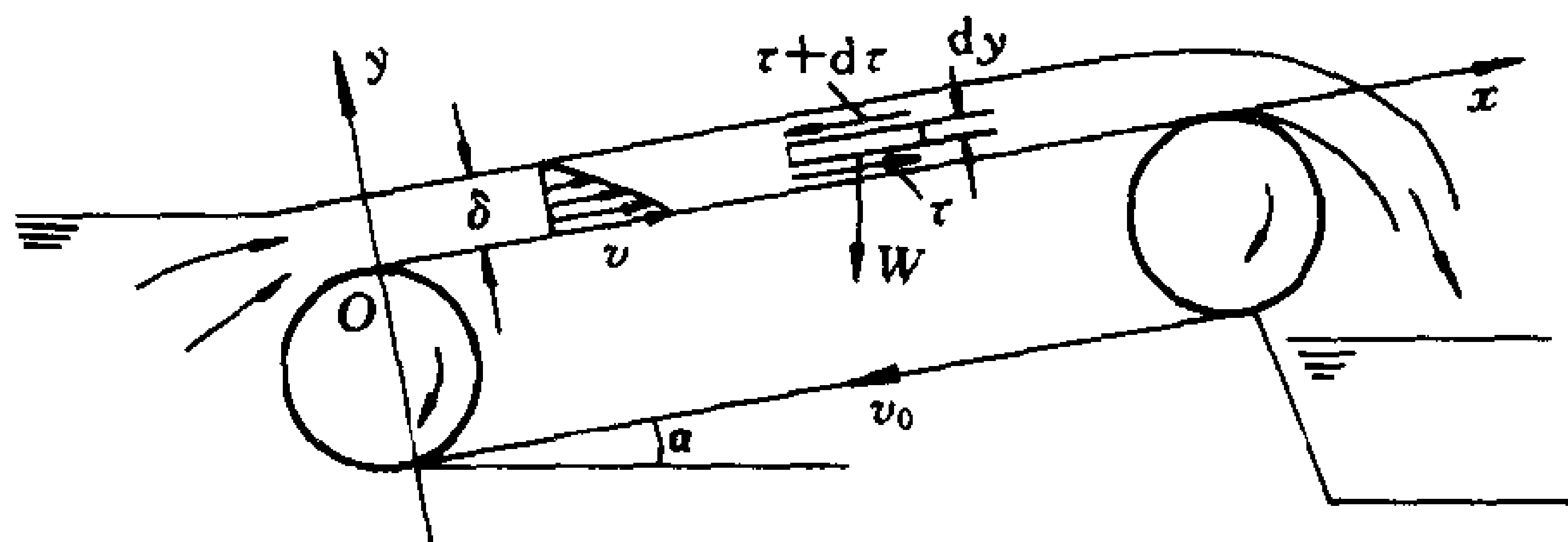


图5－9 皮带输液装置

$$Re=\frac{\frac{v_0}{2}\delta}{\nu}=\frac{v_0\delta\rho}{2\mu}=\frac{5\times0.002\times800}{2\times0.02}=200$$

是层流。

取 Oxy 坐标如图 5-9 所示，在油层中取微元体，长度为 $\mathrm{d}x$，厚度为 $\mathrm{d}y$，宽度为 B。考虑微元体的重力，可列微元体的平衡方程式为

$$\tau \mathrm{d}xB-(\tau+\mathrm{d}\tau)\mathrm{d}xB-\rho g\mathrm{d}x\mathrm{d}yB\sin\alpha=0$$

化简得
$$\mathrm{d}\tau=-\rho g\sin\alpha\mathrm{d}y$$

积分
$$\tau=-\rho g\sin\alpha\cdot y+C$$

当 $y=\delta$ 时，$\tau=0$，所以 $C=\rho g\sin\alpha\cdot\delta$ 代回得

$$\tau=\rho g\sin\alpha.(\delta-y)$$

又因为牛顿内摩擦定律 $\tau=-\mu\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}y}$，故

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}y}=-\frac{\rho g\sin\alpha}{\mu}(\delta-y)$$

积分
$$v_x=-\frac{\rho g\sin\alpha}{\mu}\left(\delta y-\frac{y^2}{2}\right)+C$$

根据边界条件 $y=0$ 时 $v_x=v_0$，所以 $C=v_0$，于是

$$v_x=v_0-\frac{\rho g\sin\alpha}{\mu}\left(\delta y-\frac{y^2}{2}\right)$$

积分求流量可得

$$\begin{aligned}q_V&=\int_0^\delta v_x\mathrm{d}yB=B\int_0^\delta\left[v_0-\frac{\rho g\sin\alpha}{\mu}\left(\delta y-\frac{y^2}{2}\right)\right]\mathrm{d}y\\&=B\left[v_0y-\frac{\rho g\sin\alpha}{\mu}\left(\frac{\delta y^2}{2}-\frac{y^3}{6}\right)\right]\Bigg|_0^\delta\\&=B\left[v_0\delta-\frac{\rho g\sin\alpha}{3\mu}\delta^3\right]\end{aligned}$$

代入数值，则

$$\begin{aligned}q_V&=0.7\times\left[5\times0.002-\frac{800\times9.81\times\sin20^\circ}{3\times0.02}\times0.002^3\right]\\&=0.006\,75\ \mathrm{m^3/s}=6.75\ \mathrm{l/s}\end{aligned}$$

由所得流量反回可准确地求出油层平均速度为

$$v=\frac{q_V}{B\delta}=\frac{0.006\,75}{0.7\times0.002}=4.82\ \mathrm{m/s}$$

据此算得雷诺数为 $Re=386$，因而可知确是层流，上述算法是正确的，流量 $q_V=6.75$ l/s 就是答案。

§5-3 圆管中的湍流

通过雷诺实验可以看到，当 $Re > Re_c$ 时，颜色水不再维持直线形状而是杂乱无章地扩散在全管之中流动，这说明管中湍流的流体质点速度不仅具有三个方向的分量，而且这些分速度的大小又随时在发生变化。用所谓“热线流速仪”测定水管中的湍流，可以得出一点上流体运动速度随时间的变化曲线 $v_t(t)$ 如图 5-10 所示，这种瞬息变化的现象称为脉动。湍流中不但速度有脉动，而且一点上的流体压强等参数都存在类似的脉动现象。

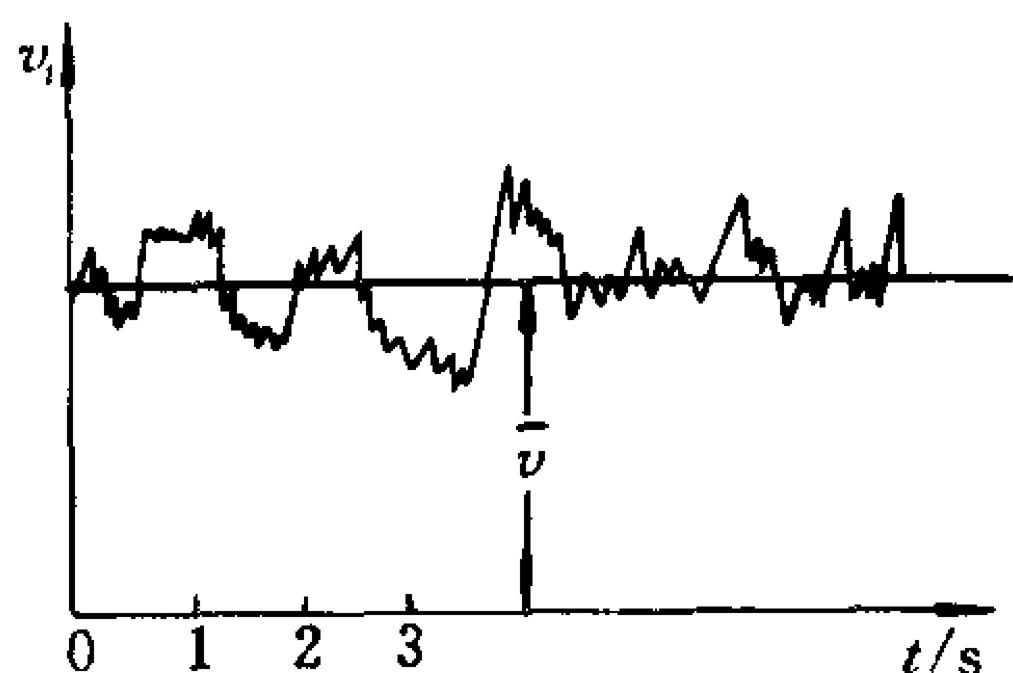


图 5-10 湍流中一点上的速度脉动

层流破坏以后，如前面的图 5-2 所示，在湍流中形成许多大大小小方向不同的涡旋，这些涡旋是造成速度脉动的原因，但是要想从理论上找出速度脉动的规律却是极为困难的。

研究湍流，唯一可行的方法就是统计时均法。这种方法不是着眼于瞬时状态，而是以某一个适当时间段内的时间平均参数作为基础去研究这段时间内的湍流时均特性，时间段的长短可视湍流的脉动情况而定，一般并不甚长，有时二三秒钟也就足够了。将瞬时值用几秒钟内的时均值代替并不妨碍对湍流的了解，因为许多问题的时间敏感性并不那么强，甚至像作用水头不变的管路湍流规律(不是一点上的规律)与时间因素几乎是完全无关的。

下面分别说明用统计时均法研究湍流有什么便利之处、需要

注意一些什么问题以及可能得到一些什么结论。

一、时均流动与脉动

根据图 5－10 所示的一点上的速度变化曲线，用 T 时间段内的时间平均值代替瞬时值，则

$$\bar{v} = \frac{1}{T}\int_0^T v_t \mathrm{d}t \tag{5-24}$$

称为一点上的时均速度。

推而广之，如果对于湍流中具有脉动性质的任意物理量 S 进行在 T 时间段内的时均化处理，则

$$\bar{S} = \frac{1}{T}\int_0^T S\mathrm{d}t \tag{5-25}$$

称为湍流物理量 S 在一点上的时均值。S 可以代表随时间变化的瞬时压强、分速度、切应力等等，但它们的时均值 $\bar{S}$ 在 T 时间段内是不变的。

瞬时值 S 与时均值 $\bar{S}$ 之差称为脉动值，用 S' 表示，脉动值时正时负，即

$$S = \bar{S} \pm S'$$

以此代入(5－25)式，可得

$$\bar{S} = \frac{1}{T}\int_0^T [\bar{S} \pm S']\mathrm{d}t = \bar{S} \pm \frac{1}{T}\int_0^T S'\mathrm{d}t$$

所以

$$\frac{1}{T}\int_0^T S'\mathrm{d}t = 0 \tag{5-26}$$

按照(5－25)式的定义，(5－26)式的意义就是脉动量 S' 的时均值 $\bar{S}' = 0$。

这样一来，运用统计时均法就将湍流分为两个组成部分：

一部分是用时均值表示的时均流动；一部分是用脉动值表示的脉动运动。

前者代表运动的主流，我们需要研究的就是这种代表主流的时均流动的特性，包括它的速度分布、切应力分布、流量及阻力计算公式等等。

后者反映湍流的本质，它对时均流动中的一切特性无不产生巨大影响，也就是因为湍流中存在着这种脉动运动才使得时均流动表现出与层流的巨大差异。

实际上湍流是个不可分割的整体，所谓分成两个部分，这只是一种研究问题的方法而已。

二、混合长度理论

普朗特(Prandtl)运用上述方法创立了一种混合长度理论，比较合理地解释了脉动对时均流动的影响，为解决湍流中的切应力、速度分布及阻力计算等问题奠定了基础。

我们首先从湍流的切应力问题谈起。

为了兼顾圆管与平面流动这两种情况，取平面坐标系如图5－11所示，对于圆管来说 y 轴方向就是 r 坐标的反方向，y 可能取的最大值就是圆管半径R。平面或圆管断面上的时均速度分布都可以用 $\bar{v}=\bar{v}(y)$表示。

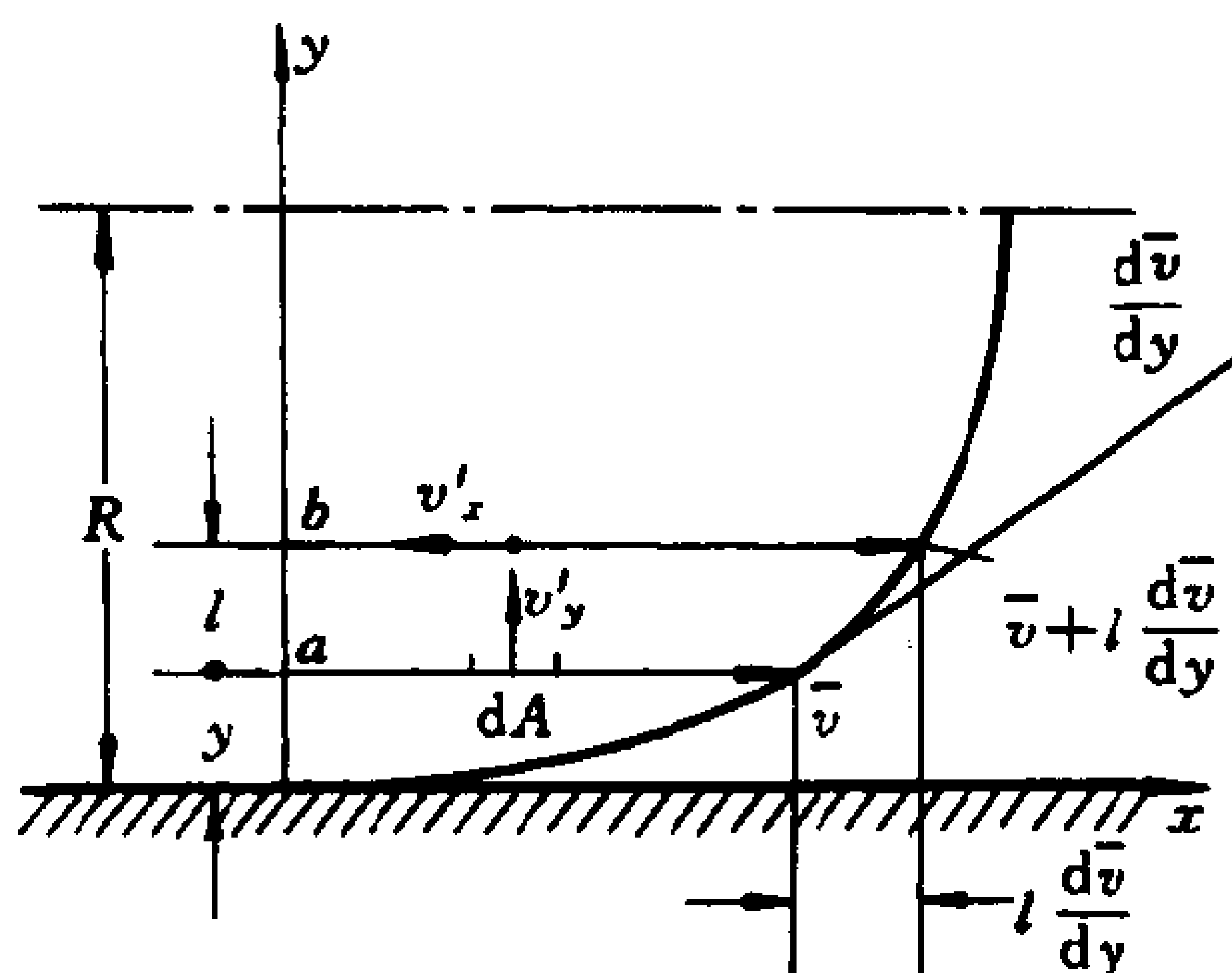


图5－11　混合长度

我们假想在时均流动中有 a、b 两层流体，a 层的时均速度为 $\bar{v}$，b 层的时均速度为$\bar{v}+l\dfrac{d\bar{v}}{dy}$。

设想在某一瞬时，在时均速度为 $\bar{v}$ 的 a 层上有一个流体微团，由于某种偶然因素，经过微元面积 dA 以 v_y'的脉动速度沿 y

轴正向跳动，其质量流量为 $\rho v'_y dA$。普朗特假定在流体微团到达新的位置以前，它原来具有的时均速度 $\bar{v}$ 一直不变。当它经过 l 距离到达时均速度为 $\bar{v}+l\dfrac{d\bar{v}}{dy}$ 的 b 层以后，立刻与 b 层流体混合在一起，从而具有 b 层的时均速度 $\bar{v}+l\dfrac{d\bar{v}}{dy}$（这一假定中的 l 是与气体分子平均自由程的概念相类似的）。

但是这个流体微团原来所具有的 x 方向的动量 $\rho v'_y dA\bar{v}$ 小于它到 b 层后所具有的 x 方向的动量 $\rho v'_y dA\left(\bar{v}+l\dfrac{d\bar{v}}{dy}\right)$。因而它与 b 层流体混合后，必然使整个 b 层流体在 x 方向上的动量有所降低，也就是使其 x 方向上的时均速度有所降低，这样在 b 层上就会出现一个瞬时的速度脉动 $-v_x'$（"$-$"号表示它的方向与 x 轴相反）。

对于原来那个流体微团来说，它原来沿 y 方向脉动，到达 b 层后，引起 b 层的速度变化，接着它又跟着 b 层产生了 x 方向上的脉动。如此纵横交互影响，脉动不已。这就是湍流中脉动频繁此起彼伏的根本原因。

我们所要注意的是，由于新产生的脉动速度 $-v_x'$，使得混合到 b 层的这个流体微团在 x 方向上又产生了一个新的脉动性的动量变化 $\rho v_y' dA(-v_x'-0)$。按照动量定理，这个动量变化必然引起 a、b 两层之间的切向作用力 F。所以

$$F=-\rho v_y' dA v_x'$$

除以 dA，则得 a、b 两层之间的切应力为

$$\tau=-\rho v_x' v_y' \qquad (5-27)$$

这就是纯粹由于脉动原因而引起的脉动切应力，也称为雷诺切应力。

在湍流中存在脉动，因而在 a、b 两层之间产生雷诺切应力是必然的，但上述 v_y' 与 v_x' 只是代表某一瞬时的脉动值，不同瞬时这

种脉动值肯定都是各不相同的，因而(5-27)式所表示的雷诺切应力只是代表瞬时值，雷诺切应力本身也是一个具有脉动性的物理量。

脉动对时均流动有无影响，关键要看在适当的时间段内脉动的物理量是否存在时均值。如果在这个时间段内脉动物理量的瞬时值时大时小，时正时负，围绕时间水平轴上下脉动而时间平均值恰好为零，那么尽管它每一瞬时都存在，但对时均流动仍然可以说是没有影响的。

下面我们看到，雷诺切应力不属于这种情况，它的时均值是存在的。

当 $v_y{}'>0$ 时，微团由 a 层向 b 层脉动，b 层的 $v_x{}'<0$；如果相反，当 $v_y{}'<0$ 时，微团由 b 层向 a 层脉动，这样势必引起 a 层的速度增大，因而 a 层的脉动速度 $v_x{}'>0$。

$v_x{}'$ 与 $v_y{}'$ 永远符号相反，因而 $v_x{}'v_y{}'<0$，所以

$$\tau=-\rho v_x{}'v_y{}'>0$$

雷诺切应力任何时候都大于零，它的时均值是不会等于零的。由此可见，在时均化的过程中，雷诺切应力并不消失，它的时均值为

$$\bar{\tau}=\frac{1}{T}\int_0^T\tau\mathrm{d}t=-\rho\frac{1}{T}\int_0^T v_x{}'v_y{}'\mathrm{d}t=-\overline{\rho v_x{}'v_y{}'} \qquad (5-28)$$

这说明，由于脉动原因所产生的雷诺切应力虽然是个脉动量，但它存在时均值，或者说在时均的时间段内，它以与时间无关的恒定数值出现在时均流动中，并对流动施加确定影响。这种影响就是在时均流动的层与层之间除了粘性流体本身具有的粘性切应力之外，还存在着一种由脉动引起且又与时间无关的雷诺切应力。

普朗特混合长度理论不仅论证了雷诺切应力的存在和它与时间的无关性，而且通过对(5-28)式的进一步讨论，还能给出雷诺切应力与时均流动参数之间的关系式。

从上面的论述已经知道，流体微团在 y 方向上的脉动，引起

它在到达新的位置以后又产生 x 方向上的脉动，$v_y{}'$ 是产生 $v_x{}'$ 的原因，$v_x{}'$ 是 $v_y{}'$ 造成的结果，进一步发展，它们必然是互为因果。围绕流体微团划出一个微小控制体，如图 5－12 所示，用 δA_x 与 δA_y 表示控制体在 x、y 方向上的投影面积，根据连续方程式

$$v_x{}'\delta A_x + v_y{}'\delta A_y = 0$$

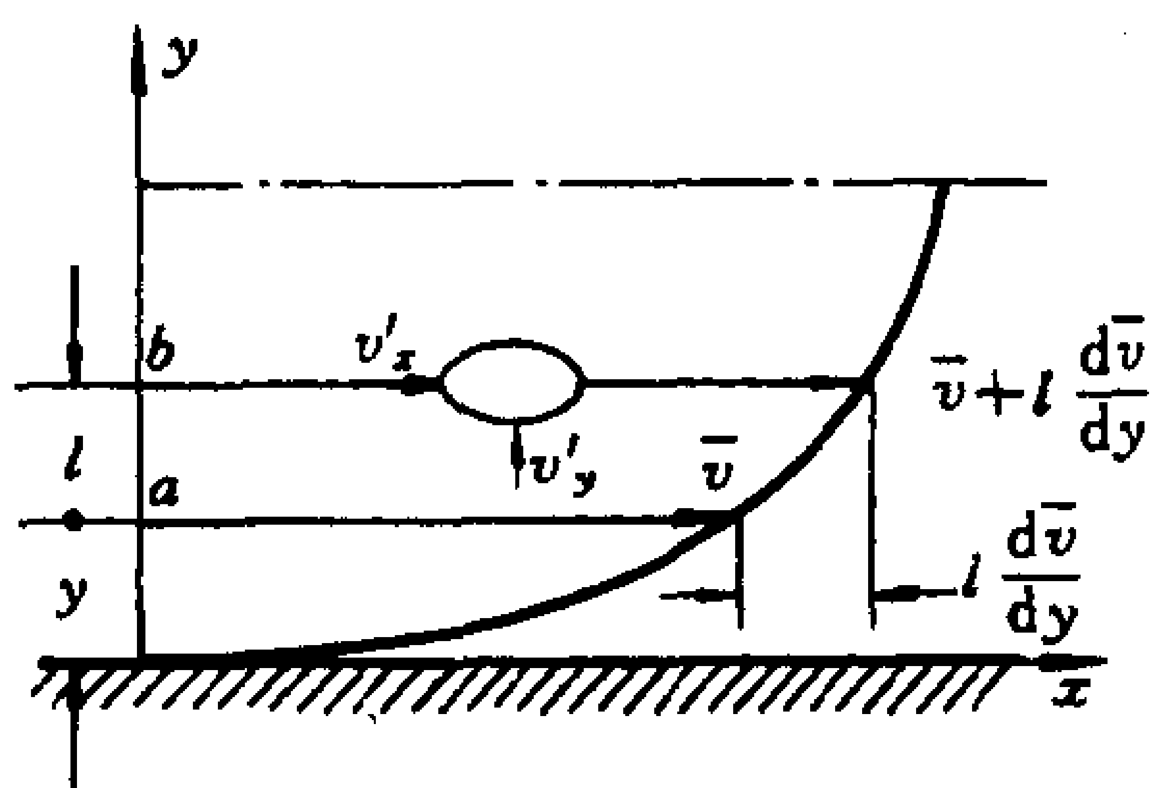


图 5－12　脉动速度与时均速度的关系

可得

$$v_y{}' = -\frac{\delta A_x}{\delta A_y} v_x{}' = -k_1 v_x{}' \qquad (5-29)$$

即 v'_y 与 v'_x 的符号相反，而大小成比例。

脉动速度 $v_x{}'$ 促使 b 层流体时均速度降低，促使 a 层流体时均速度提高。在脉动速度 $v_x{}'$ 的影响下，使得层与层之间的时均速度均匀化，因而 $v_x{}'$ 的大小必然与 a、b 两层的时均速度之差 $l\dfrac{d\bar{v}}{dy}$ 也是成比例的。即

于是又得

$$\left.\begin{aligned} v_x{}' &= k_2 l \frac{d\bar{v}}{dy} \\ v_y{}' &= -k_1 k_2 l \frac{d\bar{v}}{dy} \end{aligned}\right\} \qquad (5-30)$$

将(5－30)式代入(5－28)式中，得

$$\bar{\tau} = \rho k_1 k_2^2 l^2 \left(\frac{d\bar{v}}{dy}\right)^2$$

其中$\left(\frac{d\bar{v}}{dy}\right)^2$与时间无关，可自时均符号中提出，令常数 $k_1 k_2^2 = k_3^2$，则脉动切应力的时均值

$$\bar{\tau} = \rho\,\overline{(k_3 l)^2}\left(\frac{d\bar{v}}{dy}\right)^2 = \rho\,\overline{L}^2\left(\frac{d\bar{v}}{dy}\right)^2 \qquad (5-31)$$

这就是用时均参数表示的脉动切应力。运用混合长度理论得出的这一公式，对于分析湍流的切应力、速度分布和阻力计算都有理论指导意义。式中

$$L = k_3 l \qquad (5-32)$$

称为混合长度，原来 l 是一个类似气体分子平均自由程那样的概念，但乘以常数之后，L 的物理意义就不太明显了。

考虑到脉动对时均流动的影响，因而湍流中的时均切应力可以用粘性切应力和脉动切应力之和来表示，即湍流时均切应力

$$\bar{\tau} = \mu\frac{d\bar{v}}{dy} + \rho\,\overline{L}^2\left(\frac{d\bar{v}}{dy}\right)^2 \qquad (5-33)$$

有时为了形式统一，也可写成

$$\bar{\tau} = (\mu + \eta)\frac{d\bar{v}}{dy} \qquad (5-34)$$

式中 $\eta = \rho\,\overline{L}^2\frac{d\bar{v}}{dy}$称为湍动粘度或虚粘度，因为它实际上并非流体本身的物理属性，层流变成湍流时，液体粘度并未改变，η 的这一名词只是由于在(5－34)式中它与动力粘度 μ 并列而得到的。

三、管中湍流的切应力分布和速度分布*

管中为层流时，全管中都是层流状态，因而它的分布规律适用于整个过流断面。管中出现湍流时，并非全管中都是同样的湍流状态，仔细观察，在靠近管壁处还有些值得注意的现象。

1. 粘性底层、水力光滑管与水力粗糙管

---

* 从这里开始，转向讨论湍流的时均特性，后面不再引用脉动参数，因而表示时均参数的符号“－”，从这里开始一概省略。

由于管壁的摩擦以及分子附着力的作用,管壁上有流体粘附,此处流体运动速度为零。这当然包括时均速度和脉动速度都同时为零。这种粘性作用必然影响壁面附近的流动,使湍流的脉动与质点的混杂在靠近管壁处受到抑制。由于管壁凸凹不平,有时这里也能产生一些涡旋和脉动因素,但这种现象往往并不持久。这里有时是涡旋湍动的发源地,但由于粘性影响较大,湍流现象受到限制。此处所产生的涡旋在离开管壁适当距离处才可能发展,而在靠近管壁的一定范围内大都是以层流为主。这种靠近壁面处的层流层也称为粘性底层。

粘性底层的厚度 δ 并不是固定的,它与流体的运动粘度 ν 成正比,与流体运动速度 v 成反比,而且与反映壁面凸凹不平及摩擦应力大小的沿程阻力系数 λ 有关。通过理论与实验计算,可得到一个近似公式

$$\delta=\frac{32.8d}{Re\sqrt{\lambda}} \tag{5-35}$$

按此粘性底层厚度的近似公式估算,通常条件下的 δ 值并不大,多数不足 1 mm,它的数量级不会再大。粘性影响在远离管壁的地方逐渐减弱,管中大部分区域是湍流的活动区,这里称为湍流核心,在粘性底层与湍流核心之间有一个界限不很分明的过渡层,有时也可将它算在湍流核心的范围内,管中湍流实质上包括如图 5-13所示的三层结构。

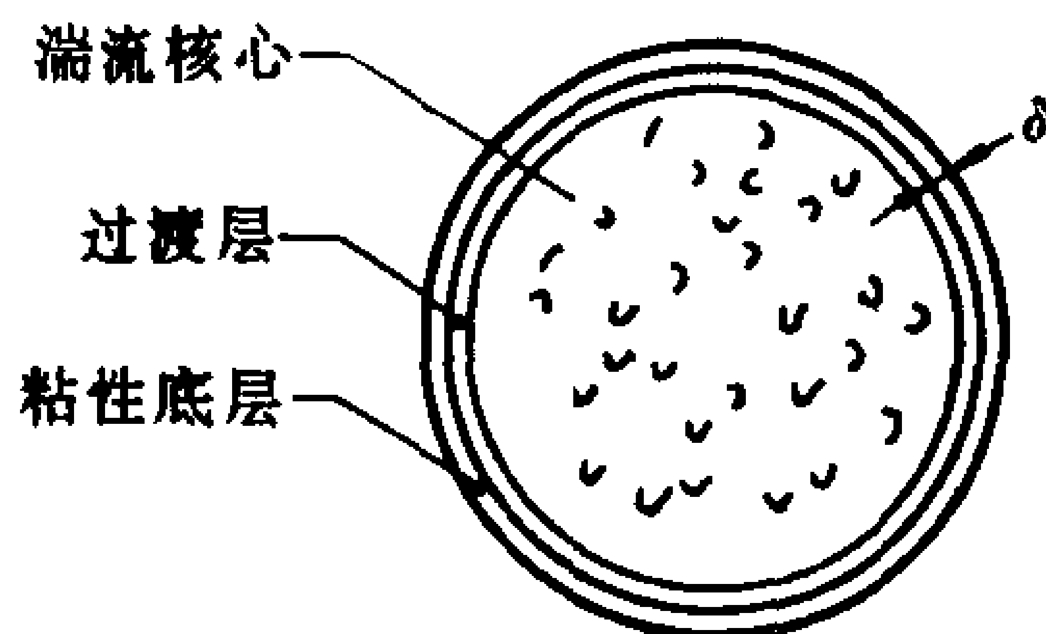


图 5-13 湍流结构

尽管粘性底层的厚度较小,但是它在湍流中的作用却是不可忽视的。

由于管子的材料、加工方法、使用条件以及使用年限等因素影响,使得管壁会出现各种不同程度的凹凸不平,它们的平均尺寸 Δ 称为绝对粗糙度,如图 5-14 所示。

当 $\delta > \Delta$ 时，管壁的凹凸不平部分完全被粘性底层覆盖，粗糙度对湍流核心几乎没有影响，这种情况称为水力光滑管。

当 $\delta < \Delta$ 时，管壁的凹凸不平部分暴露在粘性底层之外，湍流核心的运动流体冲击在凸起部分，不断产生新的旋涡，加剧湍乱程度，增大能量损失。粗糙度的大小对湍流特性产生直接影响，这种情况称为水力粗糙管。

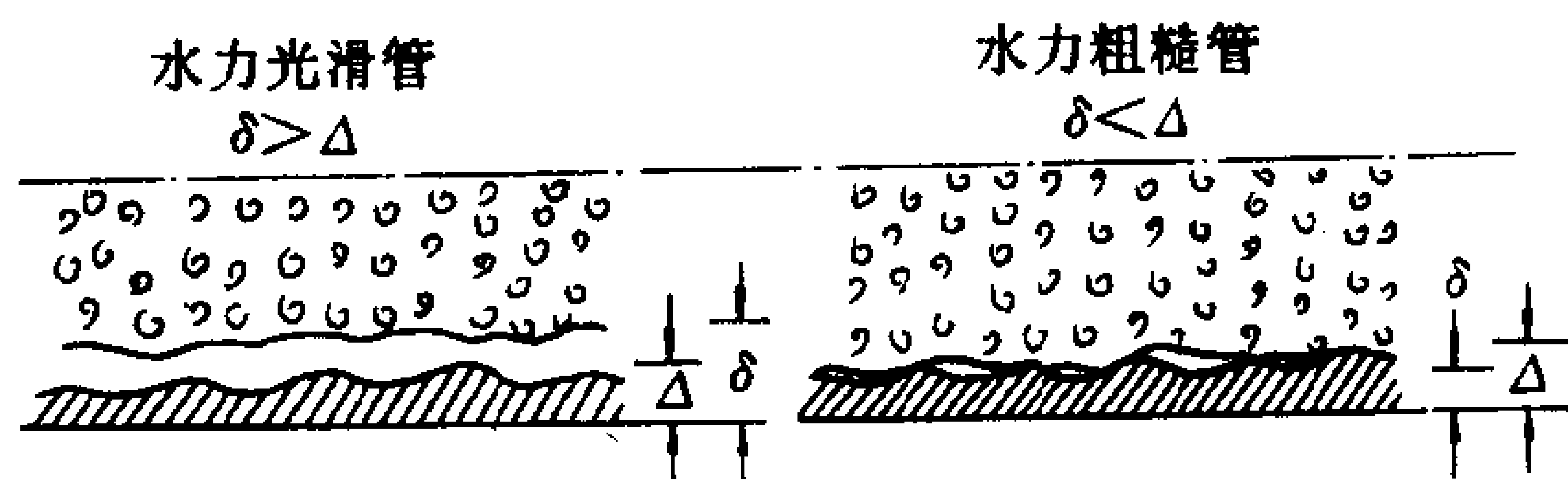


图 5-14　水力光滑管与水力粗糙管

当 δ 与 Δ 近似相等时，凹凸不平部分开始显露影响，但还未对湍流性质产生决定性的作用。这是介于上述两种情况之间的过渡状态，有时也把它归入水力粗糙管的范围。

水力光滑与水力粗糙同几何上的光滑与粗糙有联系，但并不能等同。几何光滑管出现水力光滑的可能性大些，几何粗糙管出现水力粗糙的可能性大些，几何光滑与粗糙是固定的，而水力光滑与水力粗糙却是可变的。例如一定的管路，当 Re 较小时是水力光滑的，但当 Re 增大时可能是水力粗糙的。一定的管路新使用时是水力光滑的。但用旧时却可能是水力粗糙的。因为确定水力光滑和水力粗糙的两个因素 δ 与 Δ 都不是不变的数值，特别是粘性底层厚度 δ 随 Re 的变化更是明显。

2. 切应力分布

对时均化的湍流来说，流体每一点在管中只有一个轴向时均速度 v_x，对于这种管流早在第三章的(3-114)式中即已得出其管壁上的切应力为

$$\tau_0 = \frac{(p_1 - p_2)R}{2l} = \frac{\Delta p}{l}\frac{R}{2} \tag{5-36}$$

式中 R 为管半径，Δp 为轴向距离 l 的两断面上的压强差。如果在此二断面之间取出半径为 $r(r<R)$ 的流管，则同样可得流管表面上的切应力为

$$\tau=\frac{\Delta p}{l}\frac{r}{2} \tag{5-37}$$

由(5－36)及(5－37)两式可得

$$\tau=\tau_0\frac{r}{R} \tag{5-38}$$

这就是过流断面上切应力的K字形分布规律，它既适用于层流也适用于时均湍流，不过二者的 τ_0 不同，K字的斜率不同（如图5－15所示）。

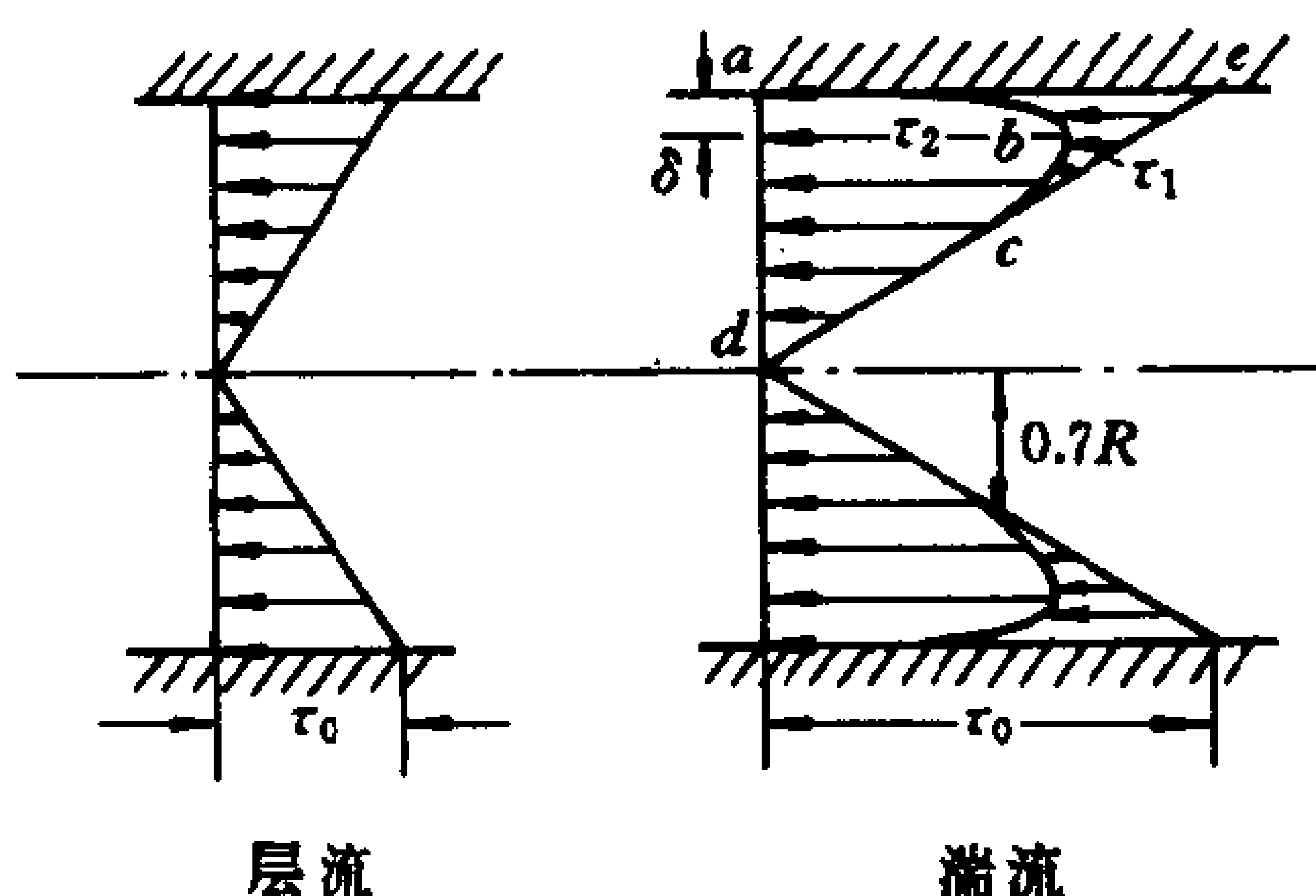


图5－15　层流与湍流的切应力分布

根据(5－33)式，我们知道湍流中的切应力应该包括粘性切应力 τ_1 与脉动切应力 τ_2 两部分，但是这两种切应力在粘性底层和湍流核心中所占的比例是不同的。

在粘性底层中，脉动切应力很小，切应力的主要成分是粘性切应力

$$\tau_1=\mu\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}y}=\mu\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}r}$$

在湍流核心中由于速度分布比较均匀，速度梯度很小，而脉动

剧烈，混合长度较大，因而它的切应力主要成分是脉动切应力

$$\tau_2=\rho L^2\left(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}y}\right)^2$$

在管路轴心处速度最大，速度梯度为零，因而切应力为零。

根据对光滑管湍流脉动速度的测定，从而得出脉动切应力的分布如图 5－15 的 *abcd* 所示，K 字形的其余部分 *abce* 则为粘性切应力。大约在 $r<0.7R$ 的范围之内，粘性切应力几乎不起作用，这就是以脉动为主的湍流核心。大约在 $r=0.95R$，即 $y=0.05R$ 处脉动切应力最大。再接近管壁则脉动切应力迅速降为零，这就是以粘性切应力为主的粘性底层了。在过渡层中两种切应力都存在，它们的比例在不断变化。此处既有一定的混合长度又有较大的速度梯度，因此脉动切应力的最大值一般是出现在湍流核心的边缘地带而不是靠近管路轴心。切应力分布是下面讨论速度分布问题时所必需的基础。

3. 速度分布

在粘性底层中

$$\tau=\mu\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}y}\quad 即\quad \mathrm{d}v_x=\frac{\tau}{\mu}\mathrm{d}y$$

因为粘性底层很薄，τ 可近似用壁面上的切应力 τ_0 表示，于是积分可得

$$v_x=\frac{\tau_0}{\mu}y \tag{5-39}$$

如图 5－16 所示，在粘性底层中速度分布是直线规律，这显然是层流速度抛物线规律在粘性底层中的近似结果。

在湍流核心中，$\tau=\rho L^2\left(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}y}\right)^2$，为了积分求出速度，必须首先确定 τ、L 与 y 的关系。由(5－38)式可得 τ 与 y 的函数关系为

$$\tau=\tau_0\frac{r}{R}=\tau_0\left(1-\frac{y}{R}\right) \tag{5-40}$$

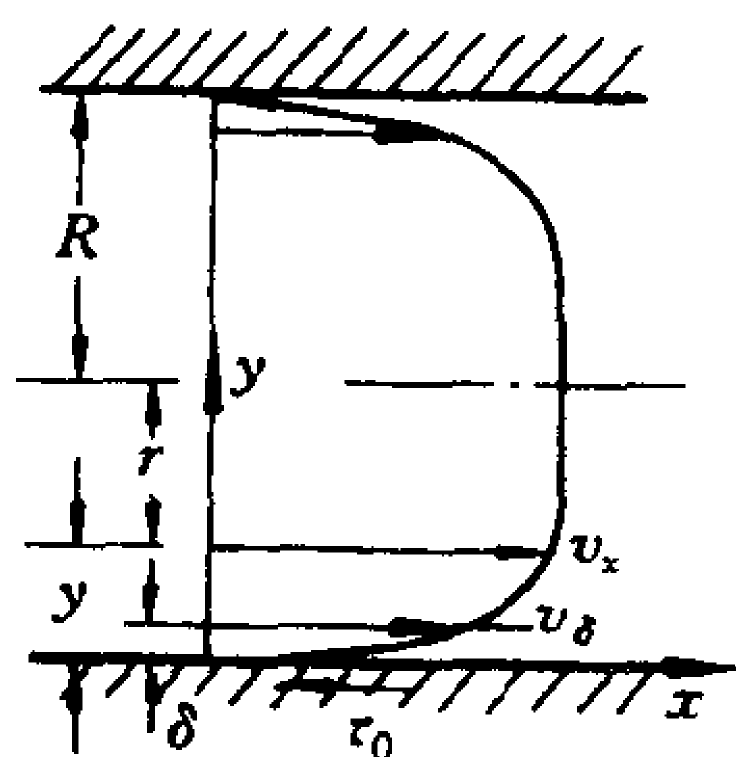


图 5-16　湍流的速度分布

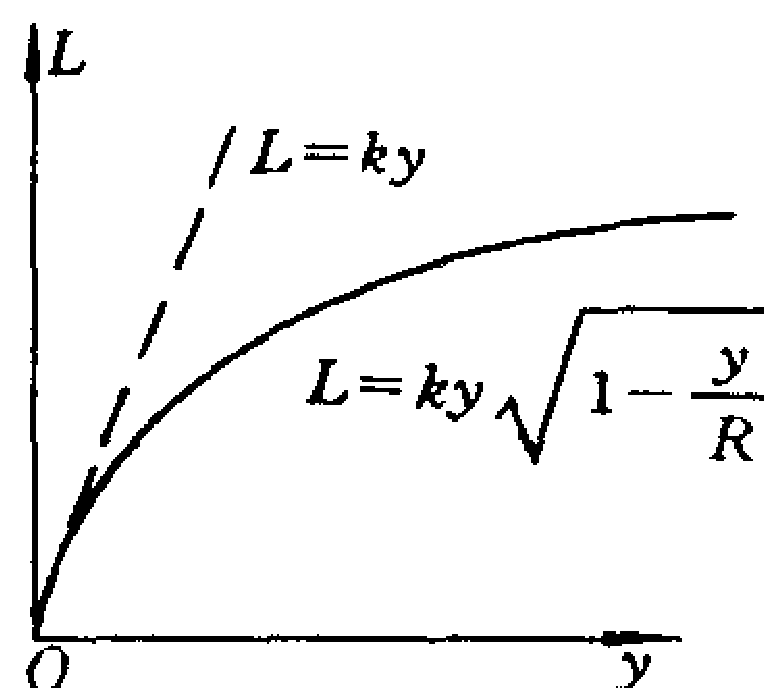


图 5-17　混合长度分布

根据卡门(Karman)实验,混合长度的分布规律如图 5-17 所示,L 与 y 的函数关系可以近似表示为

$$L = ky\sqrt{1-\frac{y}{R}} \tag{5-41}$$

当 $y \ll R$,即在壁面附近时,

$$L = ky \tag{5-42}$$

卡门和尼古拉兹(Nikuradse)实验都得出混合长度系数 k 为 0.4,将(5-40)及(5-41)式代入脉动切应力的表达式

$$\tau = \rho L^2\left(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}y}\right)^2$$

中,则

$$\tau_0\left(1-\frac{y}{R}\right) = \rho k^2 y^2\left(1-\frac{y}{R}\right)\left(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}y}\right)^2$$

化简得

$$\mathrm{d}v_x = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\,\frac{\mathrm{d}y}{ky}$$

积分得

$$v_x = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\,\frac{1}{k}\ln y + C \tag{5-43}$$

这说明湍流核心中速度 v_x 和 y 成对数关系,如图 5-16 所示,这种 $v_x = v_x(y)$的关系常称为湍流速度的对数分布规律。规律的特点就是速度比较均匀,速度梯度比较小。这自然是由于脉动混杂动量交换所造成的结果。

公式(5－43)中的混合长度系数 $k=0.4$,式中的积分常数 C 可以根据管道轴心处的最大速度 v_{max} 来确定,也可以根据湍流边界条件来确定。假定光滑管湍流核心的边界就是它与粘性底层的交界面,根据(5－39)式可得:

$$y=\delta \text{ 时} \quad v_x=\frac{\tau_0}{\mu}\delta$$

于是积分常数

$$C=\frac{\tau_0}{\mu}\delta-\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\frac{1}{k}\ln\delta$$

代回(5－43)式得

$$v_x=\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\frac{1}{k}\ln\frac{y}{\delta}+\frac{\tau_0}{\mu}\delta$$

式中粘性底层厚度

$$\delta=\frac{32.8d}{Re\sqrt{\lambda}}=\frac{32.8\nu}{v\sqrt{\lambda}} \tag{5-44}$$

式中管壁面上的切应力

$$\tau_0=\frac{\Delta pd}{4l}=\frac{\Delta p}{\rho g}\frac{\rho gd}{4l}=\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}\frac{\rho gd}{4l}=\frac{\lambda}{8}\rho v^2 \tag{5-45}$$

由此可见,对数规律的速度分布公式(5－43),实质上是包含 λ、v、ν、d、Δ 及实验常数 N 在内的一个关系式 $f(\lambda、v、\nu、d、\Delta、N)=0$,由此经过适当变化可以解出湍流沿程阻力系数 λ 与雷诺数 Re、相对粗糙度 $\frac{\Delta}{d}$ 及实验常数 N 之间的半经验公式 $\lambda=F\left(Re,\frac{\Delta}{d},N\right)$。速度分布公式的一个主要功用在于提取沿程阻力系数的半经验公式,但其推演过程比较繁杂,这里不再详细叙述了。

湍流速度的对数分布规律比较准确,但公式复杂不便使用。根据光滑管湍流的实验曲线(如图 5－18 所示),湍流的速度分布也可以近似地用比较简单的指数公式表达为

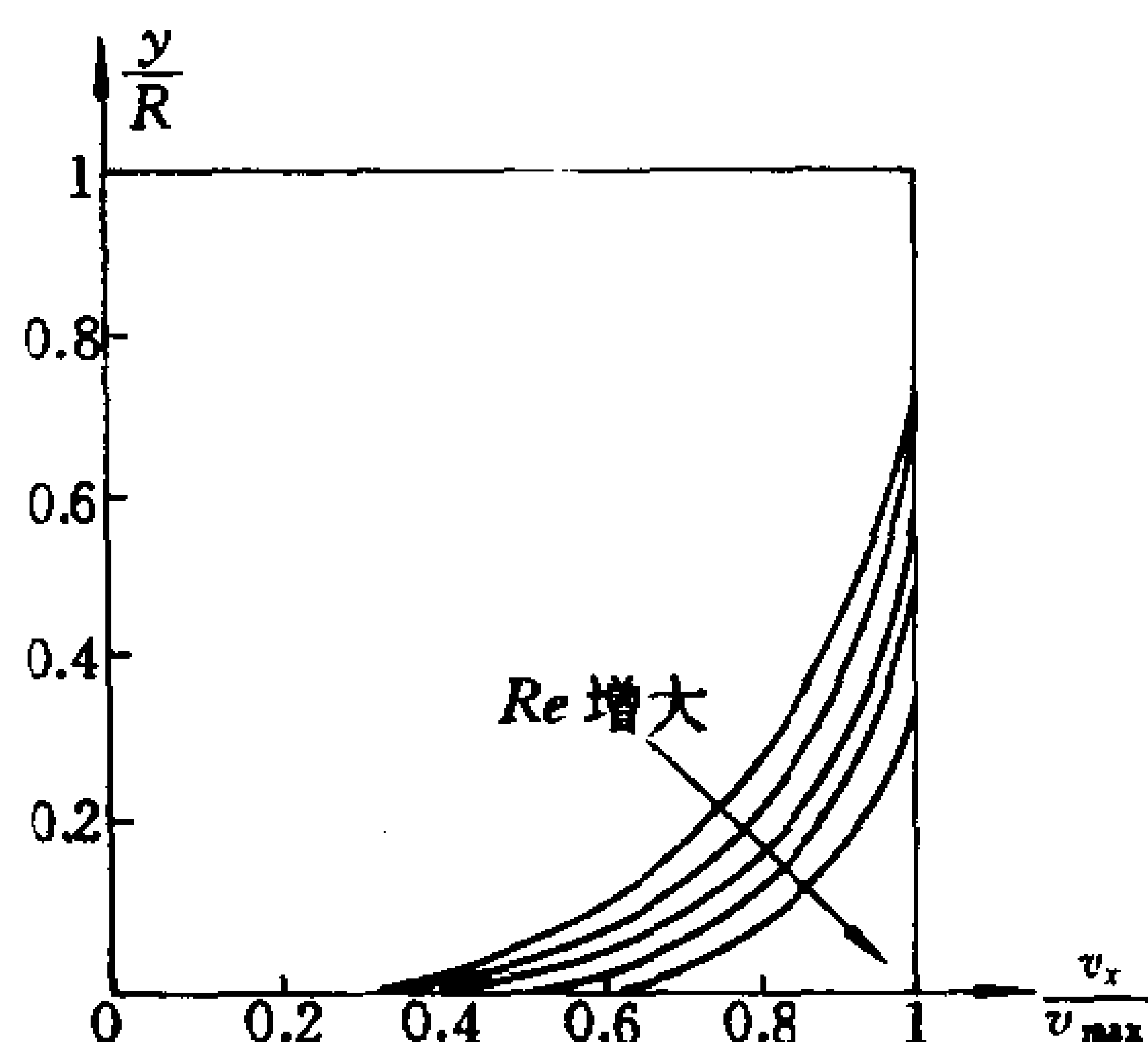


图 5－18 光滑管湍流的速度分布

$$\frac{v_x}{v_{\max}} = \left(\frac{y}{R}\right)^n \tag{5-46}$$

当 Re 数不同时，对应的指数 n 亦不同，如表 5－3 所示。

表 5－3 光滑管湍流速度分布的指数规律及速度特性

雷诺数 Re	4×10^3	2.3×10^4	1.1×10^5	1.1×10^6	$(2\sim3.2)\times10^6$
指数 n	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6.6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8.8}$	$\frac{1}{10}$
最大速度与平均速度之比 $\frac{v_{\max}}{v}$	1.26	1.24	1.22	1.17	1.16
动能修正系数 α	1.11	1.07	1.06	1.03	1.03
动量修正系数 β	1.04	1.03	1.02	1.01	1.01

表中还列出最大速度与平均速度之比 $\frac{v_{\max}}{v}$，动能修正系数 α 及动量修正系数 β 的数值。从中可以看出 α、β 均略大于 1，故通常湍流的这两个修正系数均可近似取为 1。

当雷诺数增大时，整个断面的速度分布更加均匀，同时指数 n 变小，$\frac{v_{\max}}{v}$ 也变小。

粗糙管湍流的实验曲线如图 5－19 所示，这是不同相对粗糙度（其值见下面的尼古拉兹实验）的管子在同样雷诺数（$Re=10^6$）

之下的情况。相对粗糙度减小与光滑管中雷诺数增大的效果相同，只是粗糙管的指数 n 比光滑管中的 n 更小些。

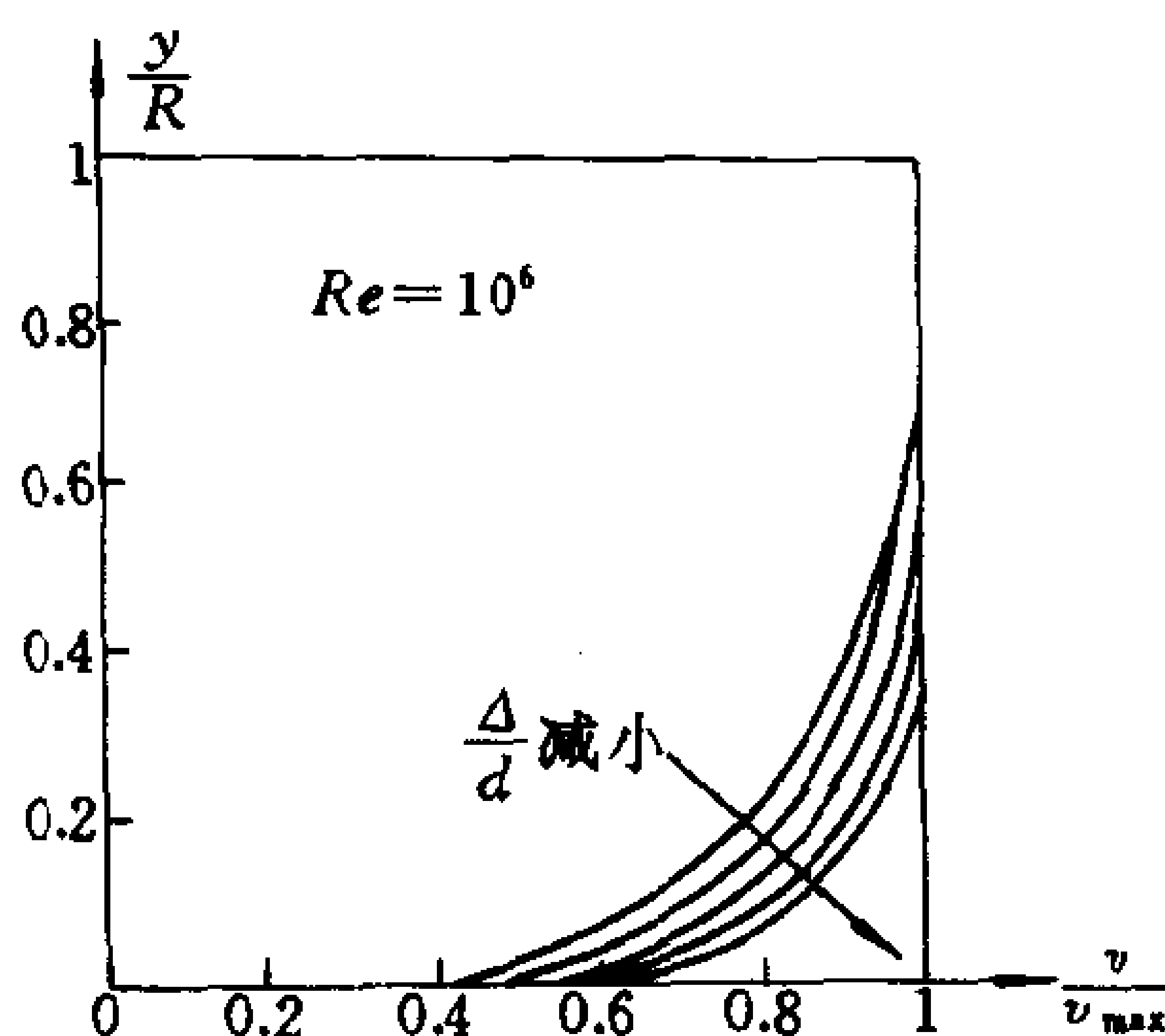


图 5-19 粗糙管湍流的速度分布

通过表 5-3 可以看出湍流与层流的速度分布特性有很大的不同。层流中$\frac{v_{max}}{v}=2, \alpha=2, \beta=1.33$；在湍流中由于速度分布均匀，这些数值都大大降低了。

[**例题 5-3**] $\nu=10^{-6}\ m^2/s$ 的水在直径 $d=0.4$ m 的钢管中流动(图 5-20)，已知流量为 $q_V=0.7\ m^3/s$，在 $l=10$ m 的长度上压强差 $p_1-p_2=$ 1 000 Pa。

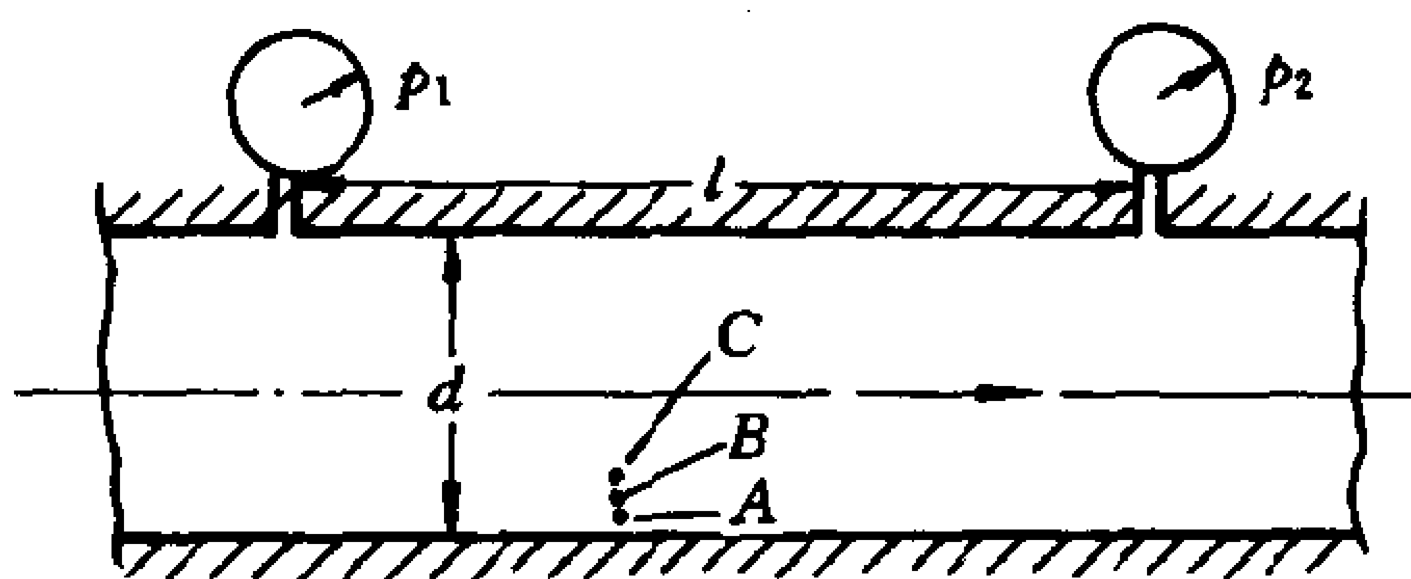


图 5-20 求混合长度与粘性底层厚度

试根据速度分布的指数规律求出距管壁 $y_A=5$ cm、$y_B=10$ cm 及 $y_C=$ 15 cm 的 A、B、C 三点处的混合长度 L，并计算粘性底层的厚度。

[**解**] (1) 首先需要计算 Re、选择指数 n。

$$Re=\frac{vd}{\nu}=\frac{4q_V}{\pi d\nu}=\frac{4\times0.7}{\pi\times0.4\times10^{-5}}=2.23\times10^6\qquad 是湍流$$

由表 5－3 查得 $\qquad n=\frac{1}{10}$

$$v_{max}=1.16v=1.16\times\frac{4q_V}{\pi d^2}=\frac{1.16\times4\times0.7}{\pi\times0.4^2}$$

$$=6.46\ \text{m/s},\quad v=5.57\ \text{m/s}$$

(2) 根据 $\tau=\rho L^2\left(\frac{dv_x}{dy}\right)^2$ 求 L 的计算公式。因

$$\tau=\tau_0\left(\frac{r}{R}\right)=\tau_0\left(1-\frac{y}{R}\right),v=v_{max}\left(\frac{y}{R}\right)^{\frac{1}{10}}$$

所以

$$L=\frac{\sqrt{\frac{\tau}{\rho}}}{\frac{dv_x}{dy}}=\frac{\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}\left(1-\frac{y}{R}\right)}}{\frac{v_{max}}{10R}\left(\frac{y}{R}\right)^{-\frac{9}{10}}}$$

$$=\frac{10R}{v_{max}}\left(\frac{y}{R}\right)^{\frac{9}{10}}\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}\left(1-\frac{y}{R}\right)}$$

将(5－45)式中得出的 $\tau_0=\frac{\Delta pd}{4l}$ 代入，则

$$L=\frac{10R}{v_{max}}\left(\frac{y}{R}\right)^{\frac{9}{10}}\sqrt{\frac{\Delta pd}{4l\rho}\left(1-\frac{y}{R}\right)}$$

(3) 计算数值。因 $\rho=1\ 000\ \text{kg/m}^3, R=0.2\ \text{m}=20\ \text{cm}, \Delta p=1\ 000\ \text{Pa}$，分别以 $\frac{y_A}{R}=\frac{1}{4}$、$\frac{y_B}{R}=\frac{1}{2}$、$\frac{y_C}{R}=\frac{3}{4}$ 代入上式，可得 A、B、C 三点的混合长度为

$$L_A=7.7\ \text{mm},\quad L_B=11.7\ \text{mm},\quad L_C=11.9\ \text{mm}$$

(4) 计算粘性底层厚度。

沿程阻力系数

$$\lambda=\frac{8\Delta pd}{4l\rho v^2}=\frac{2\Delta pd}{l\rho v^2}=\frac{2\times1\ 000\times0.4}{10\times1\ 000\times5.57^2}=0.002\ 58$$

由(5－35)式可得

粘性底层厚度

$$\delta=\frac{32.8d}{Re\sqrt{\lambda}}=\frac{32.8\times0.4}{2.23\times10^6\sqrt{0.002\ 58}}=0.116\ \text{mm}$$

§5-4 管路中的沿程阻力

沿程阻力是造成沿程水头(或压强、能量)损失的原因,计算沿程损失的公式是达西公式,但式中的沿程阻力系数 $\lambda = f\left(Re, \frac{\Delta}{d}\right)$ 的规律尚有待深入探讨。

一、尼古拉兹实验

1933 年发表的尼古拉兹实验对管中沿程阻力作了全面研究。将砂粒筛分后用漆涂于管道的内壁,一共造成六种相对粗糙度 $\frac{\Delta}{d}$ 不同的管路,对每种管路皆从最低的雷诺数开始,实验一直进行到 $Re = 10^6$ 为止。以 $Re = \frac{vd}{\nu}$ 为横坐标,以

$$\lambda = \frac{h_f}{\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}} = \frac{2\Delta pd}{\rho l v^2}$$

为纵坐标,将实验点标在双对数坐标纸上,即为尼古拉兹实验曲线,如图 5-21 所示。

尼古拉兹实验曲线可以分为五个阻力区域,每个阻力区域的范围、特点和计算 λ 的经验和半经验公式如下。

1. 层流区

当 $Re < 2\,320$ 时,不论相对粗糙度多少,其实验点均集中分布在直线 I 上,这条直线的方程式正是 $\lambda = \frac{64}{Re}$,这又证明了层流理论的正确性,层流的一个特征是粗糙度不影响 λ,水头损失正比于速度的一次方,即

$$h_f = \lambda \frac{l}{d}\frac{v^2}{2g} = \frac{64}{Re}\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g} \propto v$$

2. 临界区

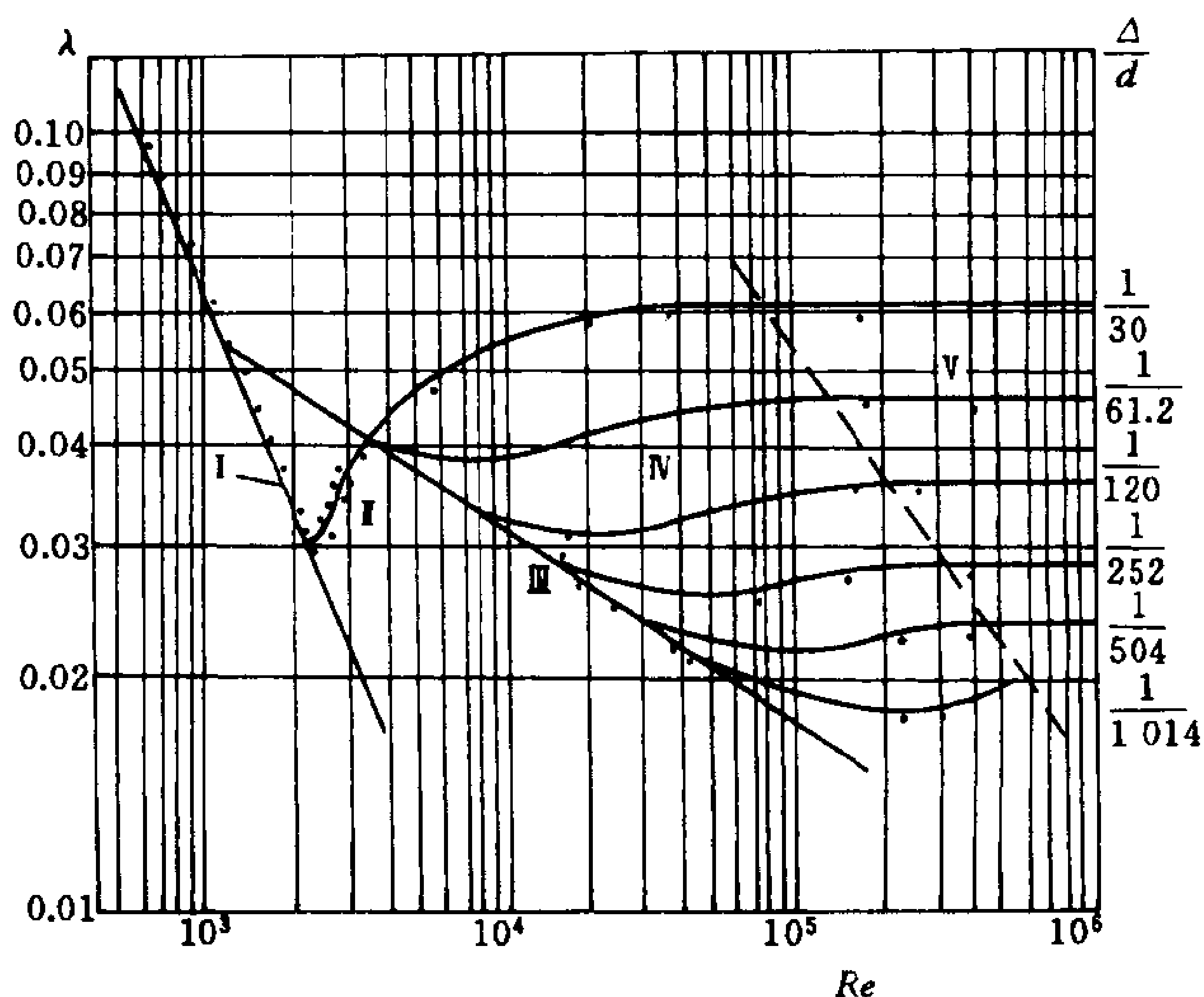


图 5-21　尼古拉兹实验曲线

当 2 320＜Re＜4 000 时，层流开始转变为湍流。这种临界状态不甚稳定，实验点虽然也都分散在曲线 II 附近，但上、下波动不很规则，总的趋势是，雷诺数增大时 λ 也增大。此区有一个扎依钦科(Зайченко)经验公式可供参考：

$$\lambda = 0.002\,5Re^{\frac{1}{3}} \tag{5-47}$$

3. 光滑管湍流区

当雷诺数＞4 000 以后，相对粗糙度$\dfrac{\Delta}{d}$较小的几种管道的实验点都分布在直线 III 上，只不过$\dfrac{\Delta}{d}$稍大者离开直线时的 Re 稍小，而$\dfrac{\Delta}{d}$越小，离开直线时的 Re 越大，$\dfrac{\Delta}{d}$很小的管道当 Re 较大时，直线稍有弯曲。

这条直线 III 的方程式称为布拉休斯(Blasius)公式

$$\lambda=\frac{0.3164}{Re^{0.25}} \tag{5-48}$$

λ 中不包含粗糙度Δ，也就是说沿程损失与管路的粗糙度无关，显然只有粘性底层的厚度 δ 远大于绝对粗糙度Δ 时才有这种可能。这条直线称为光滑管湍流区，这一阻力区的特点是水头损失正比于速度的 1.75 次方，因为

$$h_f=\frac{0.3164}{Re^{0.25}}\ \frac{l}{d}\ \frac{v^2}{2g}\propto v^{1.75}$$

布拉休斯公式在 $4\ 000<Re<10^5$ 范围内比较准确。如果 $Re>10^5$，实验点逐渐偏离直线 III，再用直线方程就产生误差了。

当 $10^5<Re<3\times10^6$ 时可用尼古拉兹光滑管的经验公式

$$\lambda=0.0032+\frac{0.221}{Re^{0.237}} \tag{5-49}$$

根据湍流的速度分布规律，尼古拉兹提出一个适用于全部光滑管湍流区的半经验公式：

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=2\lg(Re\sqrt{\lambda})-0.8 \tag{5-50}$$

这一公式结构复杂，一般需要用试算法才能求出 λ 值。

光滑管湍流区的下限为 $Re=4\ 000$，但光滑管湍流区的上限并非常数，$\frac{\Delta}{d}$大些的管道离开直线 III 的 Re 较小，$\frac{\Delta}{d}$小些的管道离开直线 III 的 Re 较大。可见光滑管湍流区的雷诺数上限应与$\frac{\Delta}{d}$有关，而不应该是一个截然不变的常数。根据尼古拉兹实验数据，光滑管湍流区的范围为

$$4\ 000<Re<22.2\left(\frac{d}{\Delta}\right)^{\frac{8}{7}} \tag{5-51}$$

4. 过渡区

$Re>22.2\left(\frac{d}{\Delta}\right)^{\frac{8}{7}}$后，各种不同$\frac{\Delta}{d}$的管道的实验点均脱离直线

III。随着 Re 增大,各种管道的实验点构成不同的波浪曲线,在各条曲线未变成平直以前,在直线 III 与虚线之间形成一个过渡阻力区 IV,在此区中粗糙度已经对阻力产生影响。即使在同样的 Re 下,不同$\frac{\Delta}{d}$值的 λ 也完全不同,这正是粘性底层厚度 δ 与绝对粗糙度 Δ 近似相等时的情况。开始时 δ 还稍大于 Δ,曲线均稍有下降,后来 Δ 又稍大于 δ,于是曲线上升并各自散开。到达虚线以后,δ 远小于 Δ,粘性底层不起作用,流动特征完全受粗糙度的大小来支配,此时进入粗糙管湍流区了。

过渡区的前半部与后半部分别带有光滑管和粗糙管的特点。因而过渡区的柯列布茹克(Colebrook)公式

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\lg\left(\frac{\Delta}{3.7d} + \frac{2.51}{Re\sqrt{\lambda}}\right) \tag{5-52}$$

不仅适用于过渡区,也适用于 Re 数从 4 000 到 10^6 的整个湍流的 III、IV、V 三个阻力区。这是一个湍流沿程阻力系数的综合计算公式,它的重要性超过其它公式,但此公式形式略嫌复杂,其用法下面再详细介绍。

柯列布茹克公式有一个简化的形式,称为阿里特苏里(Альтшуль)公式

$$\lambda = 0.11\left(\frac{\Delta}{d} + \frac{68}{Re}\right)^{0.25} \tag{5-53}$$

它也可适用于 III、IV、V 三个阻力区。

过渡区的下限和上限均与$\frac{\Delta}{d}$有关,它的范围是

$$22.2\left(\frac{d}{\Delta}\right)^{\frac{8}{7}} < Re < 597\left(\frac{d}{\Delta}\right)^{\frac{9}{8}} \tag{5-54}$$

这一过渡区的范围,各书的说法不尽一致,本书作者依据尼古拉兹数据

$$3 < \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\frac{\Delta}{\nu} < 70$$

用(5-45)式将其化为 $3<Re\sqrt{\frac{\lambda}{8}}\left(\frac{\Delta}{d}\right)<70$。在过渡区下限，令 $\lambda=\frac{0.316\,4}{Re^{\frac{1}{4}}}$；在过渡区上限，令 $\lambda=0.11\left(\frac{\Delta}{d}\right)^{\frac{1}{4}}$；分别代入即得(5-54)所示范围。作者的这一建议，欢迎读者给以检验和指正。

5. 粗糙管湍流区

Re 超过图中虚线界限以后，进入粗糙湍流区 V，此时 $\frac{\Delta}{d}$ 不仅对 λ 有直接影响，而且是决定 λ 值的唯一因素。因为 Re 较高，Δ 远大于 δ，粘性底层已经不起多大作用，湍流特征几乎遍及全管。

这一区中每种 $\frac{\Delta}{d}$ 的实验点都整齐地分布在水平直线上，改变雷诺数并不影响 λ 值，因而雷诺数对流动特征、力学性能均失去影响。处于此种状态下的湍流如果进行模型实验，可以不必考虑其雷诺数相等的条件，此时无论实物与模型的雷诺数是否相等，它们的粘性力都会自动保持力学相似，因此粗糙管湍流区也称为自动模型区。

因为 λ 与 Re 无关，水头损失将正比于速度的二次方，于是此区又称为平方阻力区。

这一区的计算公式是尼古拉兹粗糙管公式

$$\lambda=\frac{1}{\left[2\lg\left(3.7\frac{d}{\Delta}\right)\right]^2} \tag{5-55}$$

它的简化形式称为希夫林松(Шифринсон)公式

$$\lambda=0.11\left(\frac{\Delta}{d}\right)^{0.25} \tag{5-56}$$

这两个公式的应用范围只限于粗糙管湍流区，即

$$Re>597\left(\frac{d}{\Delta}\right)^{\frac{9}{8}} \tag{5-57}$$

五个阻力区的界限范围及其计算公式汇总列于表 5-4 中。

表 5－4　五个阻力区的范围与 λ 计算公式

阻力区	范　　围	λ 的理论或半经验公式	λ 的经验公式
层流区	$Re<2\,320$	$\lambda=\frac{64}{Re}$	$\lambda=\frac{75}{Re}$
临界区	$2\,320<Re<4\,000$	——	$\lambda=0.002\,5Re^{\frac{1}{3}}$
光滑管湍流区	$4\,000<Re<22.2\left(\frac{d}{\Delta}\right)^{\frac{8}{7}}$	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=2\lg(Re\sqrt{\lambda})-0.8$	$Re<10^5$：$\lambda=\frac{0.316\,4}{Re^{0.25}}$ $10^5<Re<3\times10^6$：$\lambda=0.003\,2+\frac{0.221}{Re^{0.237}}$
过渡区	$22.2\left(\frac{d}{\Delta}\right)^{\frac{8}{7}}<Re<597\left(\frac{d}{\Delta}\right)^{\frac{9}{8}}$	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=-2\lg\left(\frac{\Delta}{3.7d}+\frac{2.51}{Re\sqrt{\lambda}}\right)$	$\lambda=0.11\left(\frac{\Delta}{d}+\frac{68}{Re}\right)^{0.25}$
粗糙管湍流区	$Re>597\left(\frac{d}{\Delta}\right)^{\frac{9}{8}}$	$\lambda=\frac{1}{\left[2\lg\left(3.7\frac{d}{\Delta}\right)\right]^2}$	$\lambda=0.11\left(\frac{\Delta}{d}\right)^{0.25}$

表中的半经验公式是建立在混合长度理论及速度分布公式的基础上并配合实验数据而得到的，它们的准确性较高，但是结构较复杂。最末一栏的经验公式准确性稍差，但公式简单便于计算。有时也可以先用经验公式求第一次近似值，然后将其代入光滑管或湍流过渡区的半经验公式右端，从其左端求出第二次近似值，如果将它再代入右端则从左端又可求出第三次近似值，迭代两三次即可得到左、右基本相等时的 λ 准确值。

二、莫迪图

柯列布茹克公式实际上是将尼古拉兹光滑管和粗糙管公式融为一体的一个综合公式（阿里特苏里公式也是如此），令公式右端两项分别为零，则可分别得到光滑管湍流和粗糙管湍流的公式。因而过渡区的公式实际上可以普遍适用于整个湍流。

柯列布茹克公式结构复杂，一般求 λ 值可用近似的经验公式，即阿里特苏里公式解决，另外亦可用查图法求其近似值，图

5－22是依据柯列布茹克公式绘制的，通称为莫迪(Moody)图。只要知道雷诺数 Re 和相对粗糙度 $\frac{\Delta}{d}$，从莫迪图上立刻可以查到 λ 值，并且可以判断所在的阻力区，使用起来非常方便，不过因为其纵横坐标都是对数分度，不容易读得准确，但用其判断阻力区却是比较方便的。

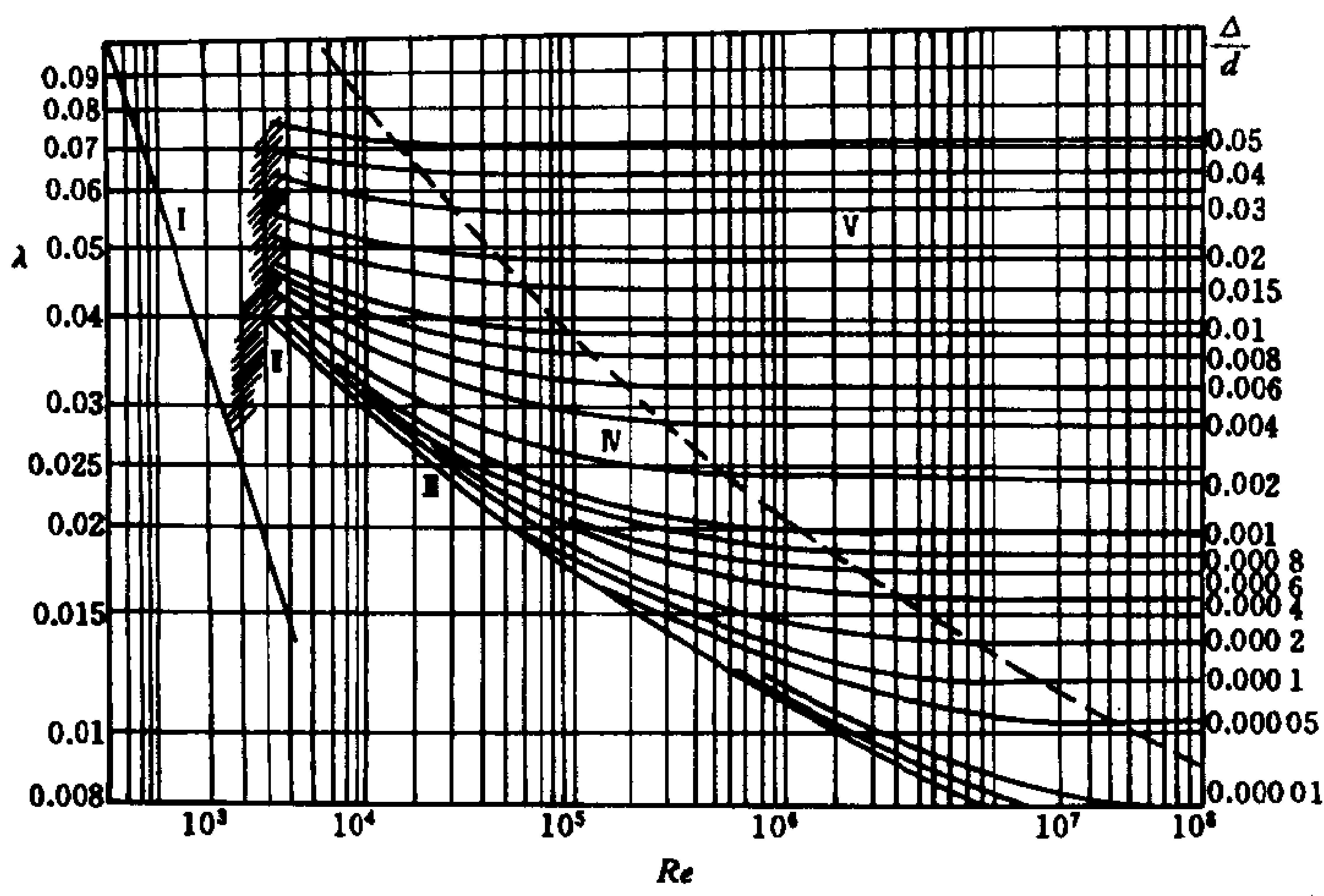


图 5－22　莫迪图

表 5－5 上给出了常用管材绝对粗糙度 Δ 的参考数值，管材的 Δ 值并不是直接测量，而是通过实验计算出来的。将待测的管道安排在实验室中进行沿程阻力系数的测定，然后用尼古拉兹粗糙管公式由 λ 反算出一个Δ 值，这 Δ 值就算是所测管材的绝对粗糙度。这种方法的实质是将实际管材的凹凸不平用一个相当的均匀砂粒粗糙度代替，所以表 5－5 中的 Δ 也称为当量绝对粗糙度。制定表 5－5 所测管材的表面质量与具体工作中所要考虑的管材情况不见得相同，新管材还好，如是旧管材，则锈蚀、结垢、积污等情况各异，因此表中数据仅供参考。

表 5－5　管材的绝对粗糙度

管　　材	Δ/mm	管　　材	Δ/mm
铜、铝管	0.001 5	新铸铁管	0.25
玻璃、塑料管	0.001	普通铸铁管	0.5
橡胶软管	0.01～0.03	旧铸铁管	1～3
无缝钢管	0.04～0.17	沥青铁管	0.12
新钢管	0.12	镀锌铁管	0.15
普通钢管	0.2	混凝土管	0.33
旧钢管	0.5～1	木材管	0.25～1.25

实际管材的凹凸不平与均匀砂粒粗糙度是有很大区别的，当粘性底层厚度减小时，均匀砂粒要么全被覆盖，要么一起暴露在湍流脉动之中。而实际管材凸凹不平的高峰，不待粘性底层减小很多时，却早已伸入湍流脉动之中了。这样就加速了光滑管向粗糙管的过渡进程，所以实际管道过渡区开始得早，这只要比较一下莫迪图和尼古拉兹曲线就可以看出来。

柯列布茹克公式是总结实际管道实验资料而确定出来的，因而莫迪图中过渡区的曲线形状真实，尼古拉兹曲线在过渡区的形状只是代表均匀砂粒粗糙度的性能，所以从图上去查 λ 值要以莫迪图为准，这点应该特别注意。

尼古拉兹实验验证并发展了普朗特混合长度理论，它是管道湍流研究进程中的一个重要阶段，所得到的尼古拉兹光滑、粗糙管公式不仅是柯列布茹克公式和莫迪图的依据，而且也是规定一切管材绝对粗糙度的依据。但是用均匀砂粒管道做的实验在过渡区的性能上与自然管道是有区别的，这一点缺欠已经在柯列布茹克公式和莫迪图上得到纠正了。

［**例题 5－4**］　向一个大型设备供水、供油、通风，如图 5－23 所示。环境温度是 20 ℃，已知条件如表 5－6 所列。试确定水泵、油泵、风机消耗于管

道摩擦上的功率。

［解］ 解法也列表说明。首先从物性表中查得 20 ℃时水、油与空气的密度 ρ 和运动粘度 ν，列入表 5－7 中。再从表 5－5 中查得绝对粗糙度 Δ，并算出 $\frac{d}{\Delta}$ 及 $\frac{\Delta}{d}$，并计算雷诺数 $Re=\frac{vd}{\nu}=\frac{4q_V}{\pi d\nu}$。

表 5－6 已知数据

	供 水	供 油	通 风
管道材料	新铸铁管	黄铜管	无缝钢管
管道直径 d/cm	20	2	50
管道长度 l/m	20	10	10
流量 q_V/(m^3/s)	0.3	0.01	10

表 5－7 解题表

	供 水	供 油	通 风
ρ/(kg/m^3)	1 000	856	1.2
ν/(m^2/s)	1×10^{-6}	8.4×10^{-6}	15.7×10^{-6}
Δ/mm	0.25	0.001 5	0.04
$\frac{d}{\Delta}$	800	13 333	12 500
$\frac{\Delta}{d}$	0.001 25	0.000 075	0.000 08
Re	1.91×10^6	7.58×10^4	1.622×10^6
$22.2\left(\frac{d}{\Delta}\right)^{\frac{8}{7}}$	46 000	1.1×10^6	1.06×10^6
$597\left(\frac{d}{\Delta}\right)^{\frac{9}{8}}$	1.1×10^6	—	2.4×10^6
阻力区	粗糙管	光滑管	过渡区
λ 的计算值	0.020 7	0.019	0.011 6
功率损失 P/kW	28.3	41.2	3.6

为判断阻力区，需要算出 $22.2\left(\frac{d}{\Delta}\right)^{\frac{8}{7}}$ 及 $597\left(\frac{d}{\Delta}\right)^{\frac{9}{8}}$，判断结果也列在表

中。按所在阻力区，用表 5－4 中的三个经验公式，可求得 λ 的计算值。

如果用 $\dfrac{\Delta}{d}$ 和 Re 去查莫迪图，可以看到上述判断和 λ 值都是正确的。

功率损失 $P=\Delta p q_V=\gamma\lambda\dfrac{l}{d}\dfrac{v^2}{2g}q_V=\dfrac{8\rho\lambda l q_V^3}{\pi^2 d^5}$。将上述数值代入即得水泵损失功率为 28.3 kW，油泵损失功率为 41.2 kW，风机损失功率为 3.6 kW。以上数据均顺序列于解题表中。

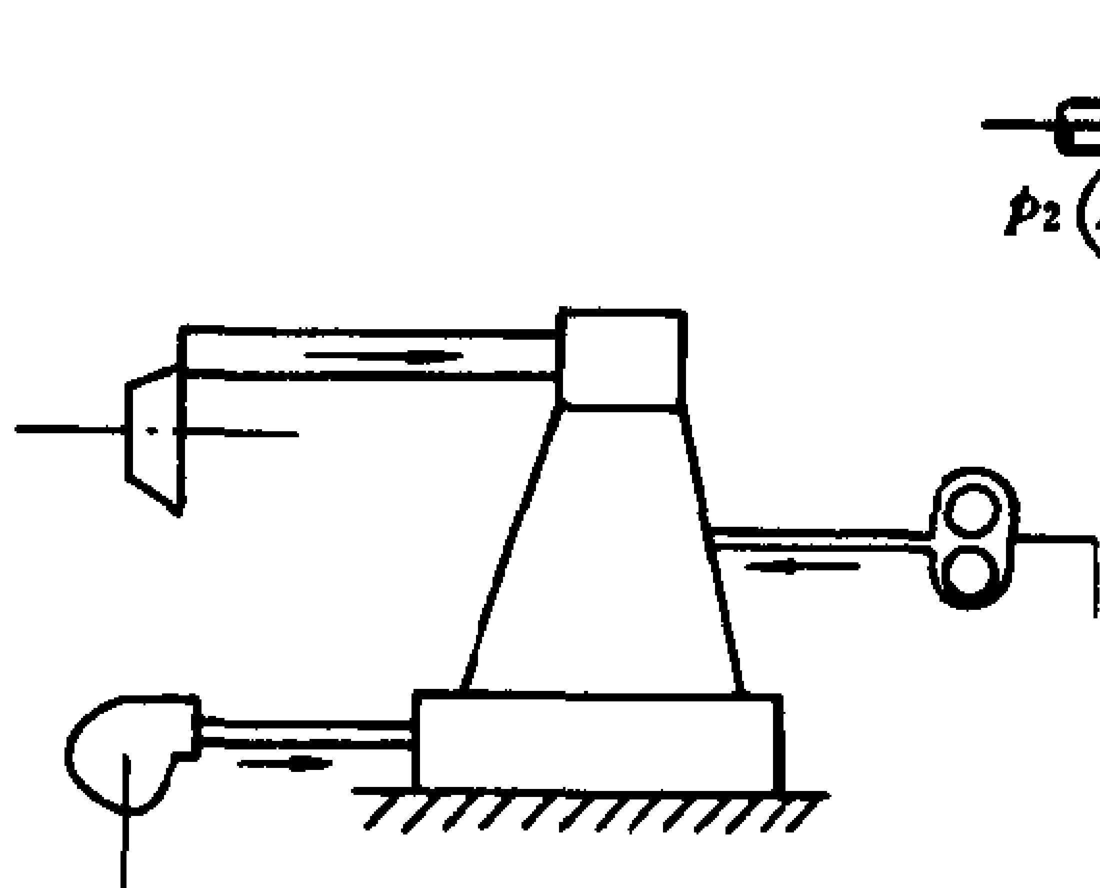


图 5－23　设备上的管路

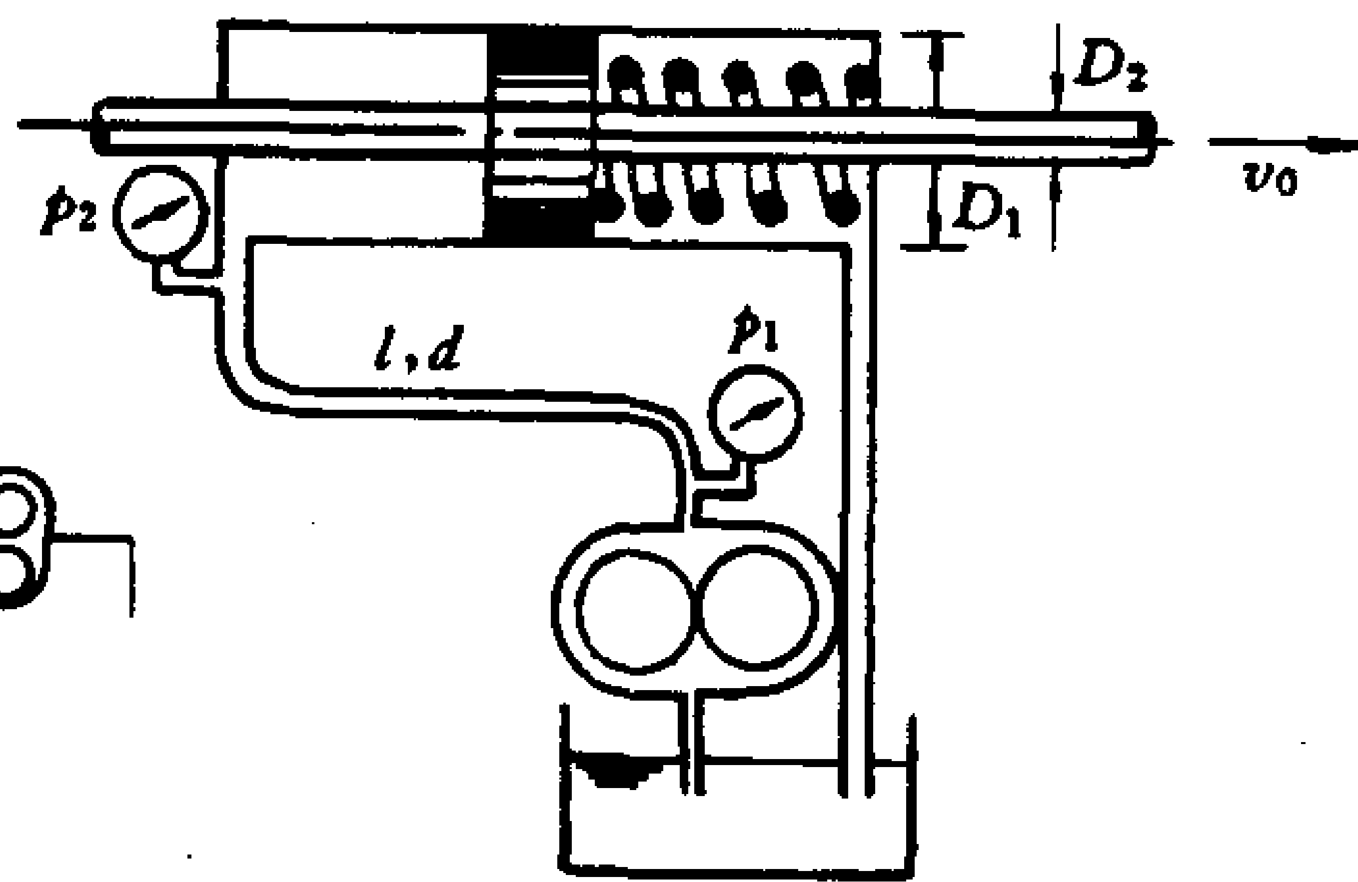


图 5－24　简化油路图

［**例题 5－5**］　在图 5－24 所示的简化油路上，与机床工作台相连接的液压油缸直径 $D_1=0.2$ m，活塞杆直径 $D_2=0.04$ m。液压油 $\rho=850\ \text{kg/m}^3$、$\nu=7\times10^{-6}\ \text{m}^2/\text{s}$。油泵与油缸之间进油铜管直径 $d=20$ mm，长 $l=2$ m。

当工作台向右运动时，进油管两端的压强 $p_1=25\times10^5$ Pa，$p_2=24.5\times10^5$ Pa。

(1) 试求工作台的运动速度 v_0；

(2) 如果要求工作台速度再提高一倍，其余条件完全不变，试问应该改用多大直径的进油管。

［**解**］　(1) 工作台移动速度 v_0 取决于铜管中油的速度 v，即

$$v_0=v\frac{d^2}{D_1^2-D_2^2}=\frac{0.02^2}{0.2^2-0.04^2}v=0.01v$$

根据达西公式

$$\frac{p_1-p_2}{\rho g}=\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}$$

可得

$$v=\sqrt{\frac{2(p_1-p_2)d}{\lambda\rho l}}=\sqrt{\frac{2\times0.5\times10^5\times0.02}{850\times2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=\frac{1.085}{\sqrt{\lambda}}$$

现在的关键是求λ,但是速度未知,无从判断管中的流动状态,因而也无法求出λ值。

根据铜管的相对粗糙度$\frac{\Delta}{d}=\frac{0.001\,5}{20}=0.000\,075$,数值很小。从莫迪图上看到在稍小些的 Re 下,出现光滑管的可能性较大,我们初步假定铜管中流动状态是光滑管湍流,于是用布拉休斯公式可得

$$v=\frac{1.085}{\sqrt{0.316\,4\times\left(\frac{\nu}{vd}\right)^{0.25}}}$$

将 ν 和 d 数值代入可得

$$v=6.6\ \mathrm{m/s}$$

这是否正确,需用雷诺数判断:

$$Re=\frac{vd}{\nu}=\frac{6.6\times0.02\times1}{7\times10^{-6}}=18\,860$$

$$4\,000<Re<22.2\left(\frac{d}{\Delta}\right)^{\frac{8}{7}}=1.15\times10^6$$

由此可见原假定是正确的,流动是光滑管湍流。所以

$$v_0=0.01\times6.6=0.066\ \mathrm{m/s}=66\ \mathrm{mm/s}$$

(2) 工作台速度提高一倍则应 $v_0=0.132$ m/s,进油管中的速度

$$v=13.2\ \mathrm{m/s}$$

由达西公式得

$$d=\frac{\lambda\rho l v^2}{2(p_1-p_2)}=\frac{850\times2\times13.2^2\lambda}{2\times0.5\times10^5}=\frac{\lambda}{0.337\,6}$$

这里又遇到流动状态问题,不知道进油管直径无从确定 Re,也无法求出λ值。

我们设想管中速度加大后,有可能进入过渡区,不妨假定:

$$\frac{vd}{\nu}\geqslant22.2\left(\frac{d}{\Delta}\right)^{\frac{8}{7}}=1.15\times10^6$$

由此则解出 $d\geqslant0.83$ m,油管显然不会粗到如此程度。可见假定流动进入过渡区是错误的。即使提高速度油管中仍然应该是光滑管湍流。于是

$$d=\frac{0.316\,4}{0.337\,6}\left(\frac{\nu}{vd}\right)^{0.25}=\frac{0.316\,4}{0.337\,6}\left(\frac{7\times10^{-6}}{13.02}\right)^{0.25}\cdot\frac{1}{d^{0.25}}$$

由此算出

$$d=0.052\,8\ \mathrm{m}=52.8\ \mathrm{mm}$$

这答案的正确性是无需再用 Re 数检验了。

通过以上两个例题可以看到，用达西公式

$$h_f=\frac{\Delta p}{\rho g}=\lambda\frac{l}{d}\ \frac{v^2}{2g}$$

计算管道沿程阻力主要有三种类型的问题：

(1) 已知 l、d、ν、Δ、v(或 q_V)求 Δp(或 h_f)，如例题 5－4。这种问题利用 λ 的经验公式或莫迪图容易解决。

(2) 已知 l、d、ν、Δ、Δp(或 h_f)求 v(或 q_V)，如例题 5－5(1)。这种问题需要根据题意初步假定流动状态，假定 λ 值，然后回头检查假定。如果错误，则需要重新修改。

(3) 已知 l、ν、Δ、Δp(或 h_f)、v(或 q_V)求 d，如例题 5－5(2)。这种问题的解法与(2)类问题的解法相似。

为使初步假设容易准确，首先要对具体问题有些大致的分析。一般情况是：水管中的问题以粗糙管湍流状态居多，油管中的问题出现光滑管湍流的可能性较大，气流极少层流，多数是粗糙管湍流。Δ 小者多为层流或光滑管湍流，Δ 大者多为粗糙管湍流。当然 Re 的大小更是关键。在情况不明时利用莫迪图估计 λ 的近似值也是一种办法。

§5－5　管路中的局部阻力

管路的功用是输送流体，为了保证流体输送中可能遇到的转向、调节、加速、升压、过滤、测量等需要，在管路上必需要装种种管路附件。

例如常见的弯头、三通、水表、变径段、进出口、过滤器、溢流阀、节流阀、换向阀等。经过这些装置时，流体运动受到扰乱，必然

产生压强(或水头、能量)损失,这种在管路局部范围内产生的损失是由于统称为局部阻力所引起的。

局部装置的类型繁多,情况各异,但产生损失的物理现象却也有类似之处。如图 5－25 中所示,在局部装置处经常出现涡旋区和速度的重新分布。

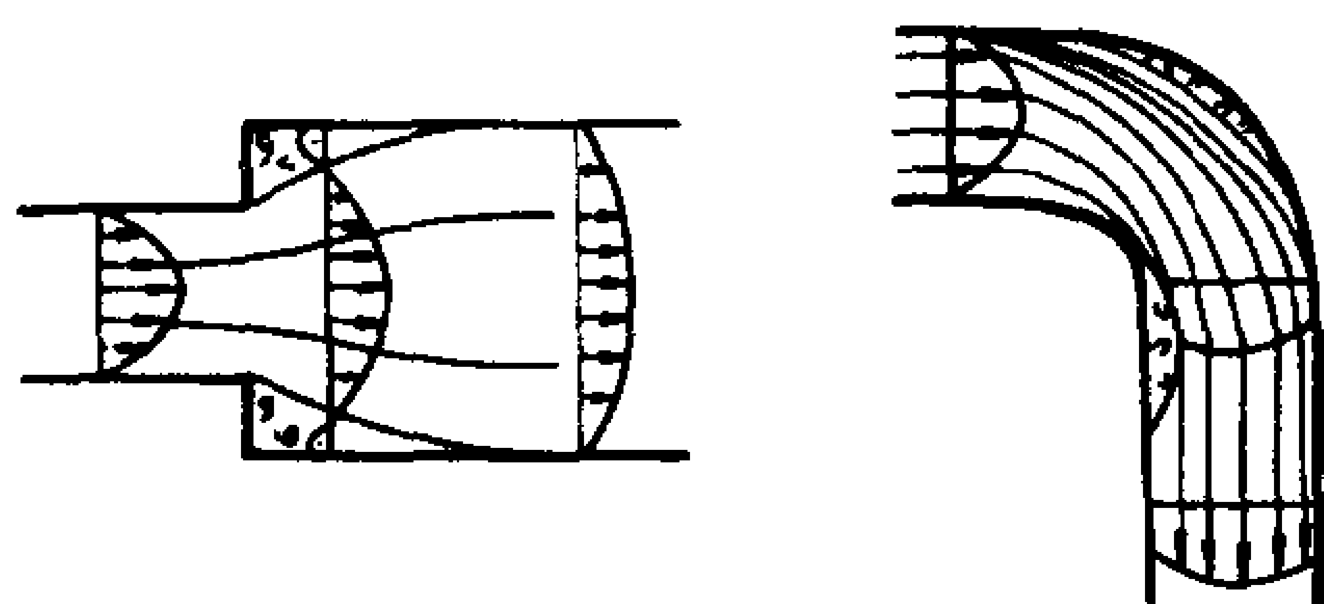


图 5－25　局部阻力

涡旋区中,流体不规则地旋转、碰撞、回流,往往给主流运动造成巨大的阻碍,消耗主流运动的能量,导致压强、水头、能量的降低,这种涡旋区的存在是局部阻力的普遍现象。

速度的重新分布不仅加剧主流中的内部摩擦,而且引起流体微团的前后撞击增加主流中的湍动性,即使原来是层流,经过局部阻力装置以后也难以再保持层流状态,这种影响有时会延续很长一段距离。

这许多装置本身都有各自的流动规律需要深入探讨,但是从管路流动来说,它们的共性就是造成局部的水头损失。这种局部水头损失 h_f 根据第三章突然扩大管(3－121)式的讨论结果可以表示为

$$h_f = \zeta \frac{v^2}{2g} \tag{5-58}$$

式中 ζ 称为局部阻力系数。公式的含义就是将局部水头损失折合成管中平均速度水头的若干倍,这个倍数就是局部阻力系数。

如果局部装置是装在等径管路中间,当然局部阻力系数只有一个。如果局部装置是装在两种直径的管路中间,例如像突然扩

大管那样，则会出现两个局部阻力系数：

$$h_f = \zeta_1 \frac{v_1^2}{2g} = \zeta_2 \frac{v_2^2}{2g} \tag{5-59}$$

式中 ζ_1 和 ζ_2 分别代表与局部装置前后速度水头相配合的阻力系数，它们的关系是

$$\zeta_1 = \zeta_2 \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 = \zeta_2 \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 \tag{5-60}$$

取局部阻力系数往往是与主要管路上的速度水头相配合，主管在局部阻力装置前，则用其 ζ_1，主管在局部阻力装置后则用其 ζ_2。如果不加说明，变径段的局部阻力系数则是与局部阻力装置后速度水头相配合的 ζ_2。

局部阻力处的流动现象比较复杂，下面分别介绍几种常见的局部阻力实验资料，可供计算时参考。

一、几种常用的局部阻力系数

1. 突然扩大（图 5-26）

由包达定理

$$h_f = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} \tag{5-61}$$

所得到的理论公式

$$\zeta_1 = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \tag{5-62}$$

$$\zeta_2 = \left(\frac{A_2}{A_1} - 1\right)^2 \tag{5-63}$$

经过阿切尔（Archer）精密测定认为是足够可靠的。

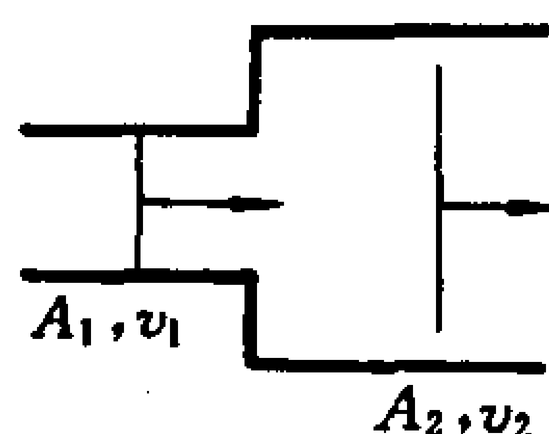


图 5-26　突然扩大

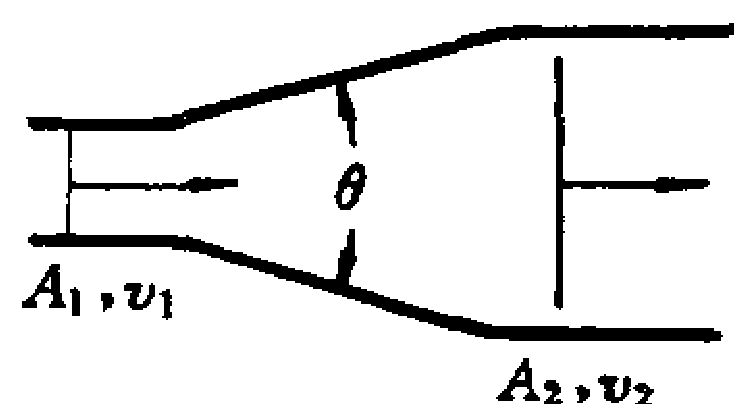


图 5-27　逐渐扩大

2. 逐渐扩大(图 5－27)

仍用包达定理的形式表示水头损失：

$$h_{\rm f}=k\frac{(v_1-v_2)^2}{2g} \tag{5-64}$$

k 为经验系数。据吉布松(Gibson)实验，系数 k 如图 5－28 所示。

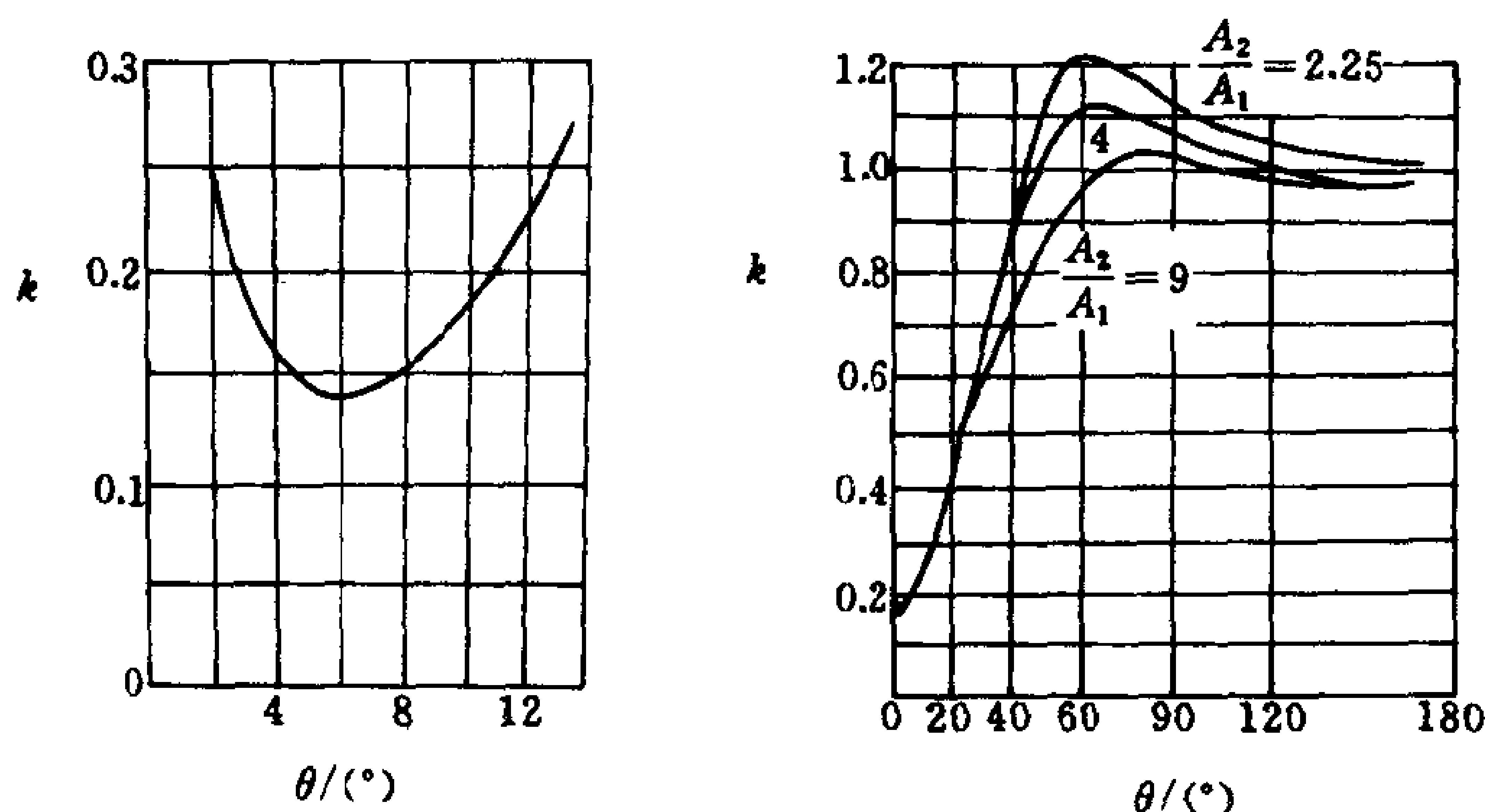


图 5－28 吉布松实验系数

从图上可以看到，当扩张角 $\theta=5\sim7°$时，阻力最小。$5\sim7°$扩张角广泛用于文丘里流量计、水轮机尾水管、简易风洞等设备上，被称为是最佳扩张角。扩张角继续增大，阻力显著上升，这是由于流线脱离管壁造成涡旋区的结果。

3. 突然缩小(图 5－29)

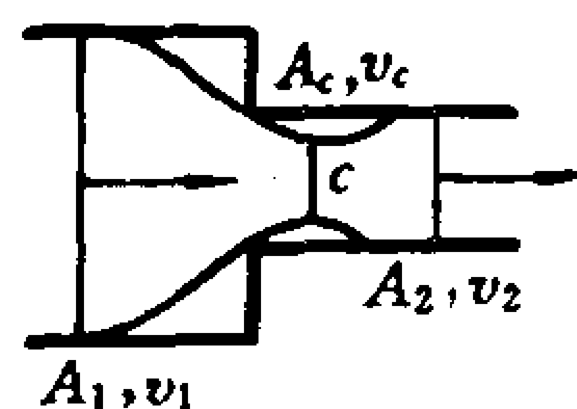


图 5－29 突然缩小

流线进入小管时，形成一个过流断面最小的收缩断面，其面积为 $A_{\rm c}$，

$$\frac{A_{\rm c}}{A}=C_{\rm c}<1 \tag{5-65}$$

称为断面收缩系数。突然缩小的局部阻力系数 ζ 与 $C_{\rm c}$ 直接有关，魏斯巴赫(Wisbach)实验的 $C_{\rm c}$ 值及傅里门(Freeman)实验的 ζ 值列于表 5－8 中。

表 5-8 突然缩小的收缩系数 C_c 与阻力系数 ζ

$\frac{A_2}{A_1}$	0.01	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
C_c	0.618	0.624	0.632	0.643	0.659	0.681	0.712	0.755	0.831	0.892	1.00
ζ	0.490	0.469	0.431	0.387	0.343	0.298	0.257	0.212	0.161	0.070	0

4. 逐渐缩小(图 5-30)

逐渐缩小的局部阻力系数如图 5-31 所示。这种管道不会出现流线脱离壁面的问题,因此其阻力的主要成分是沿程摩擦,一般消防管出口、水力采煤器的出口等均采用 10～20°的收缩角,其阻力系数常取为 0.04。

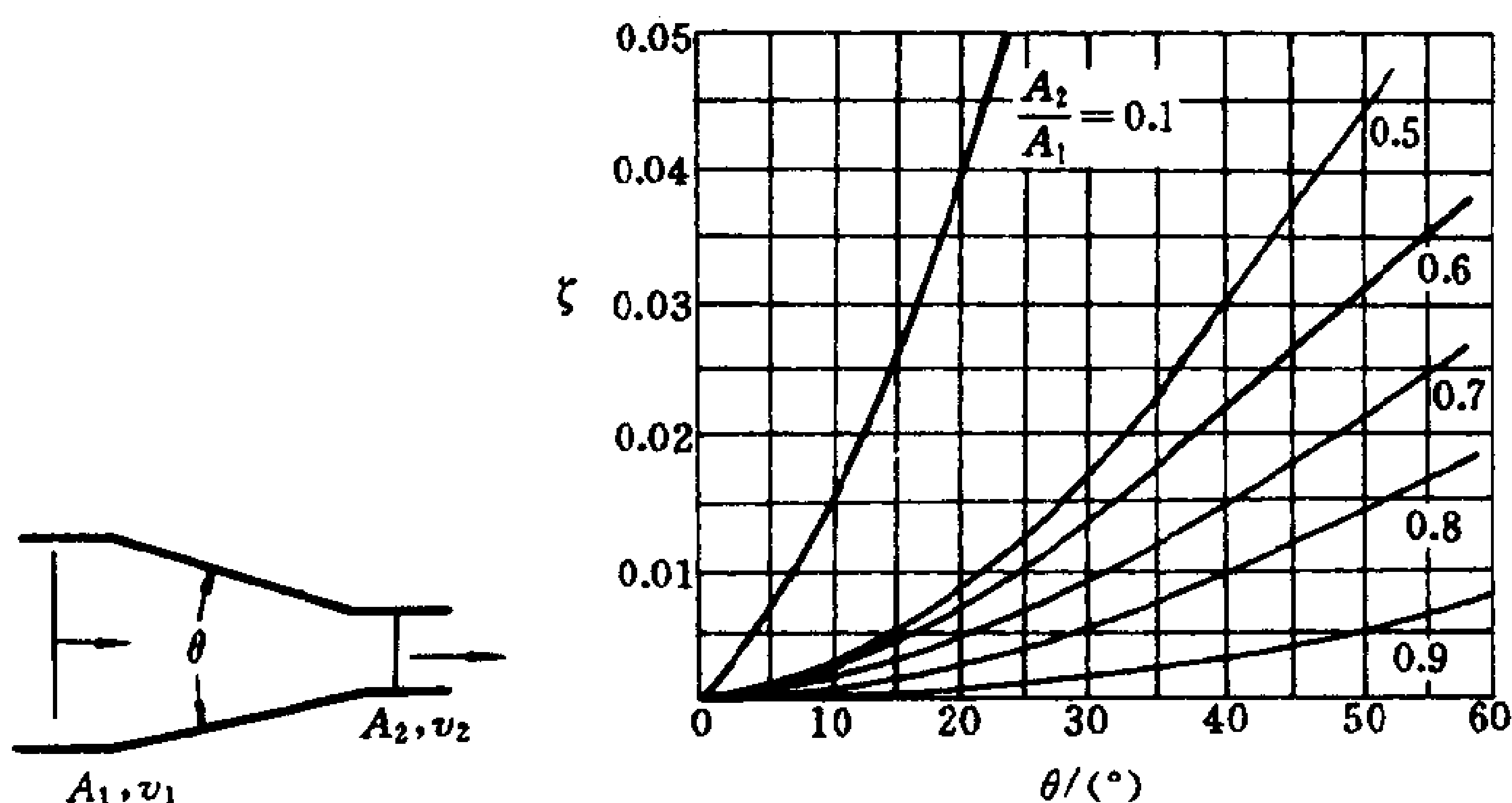


图 5-30 逐渐缩小　　　图 5-31 逐渐缩小的阻力系数

5. 管道的进出口(图 5-32)

管道与大容器相连接时必然有管道的进出口。

管道出口(1)看作是突然扩大$\frac{A_1}{A_2}\to 0$,$\zeta_1=1$,此时 $h_f=\frac{v_1^2}{2g}$表示进入容器后,管中动能全部消失。

管道入口(2)看作是突然缩小,$\frac{A_2}{A_1}\to 0$,$\zeta=0.5$。

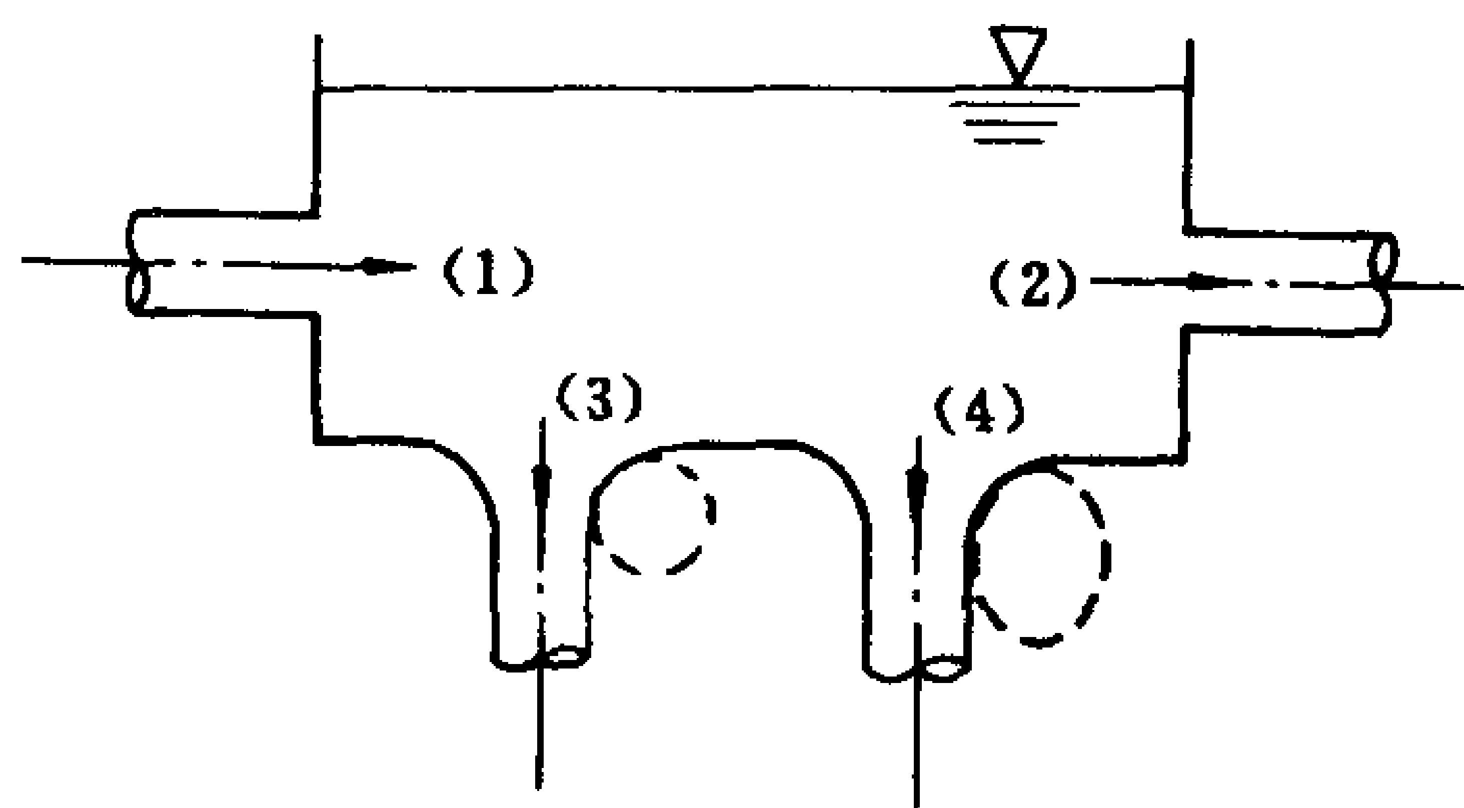


图 5-32　管道进出口

管道入口稍加修圆(3),$\zeta=0.1$。

管道入口呈圆滑曲线(4),$\zeta=0.01\sim0.05$。

6. 弯管(图 5-33)与折管(图 5-34)

由于流动惯性,在弯管和折管内侧往往产生流线分离形成涡旋区。在外侧,流体冲击壁面增加液流的混乱。此外,在如图所示

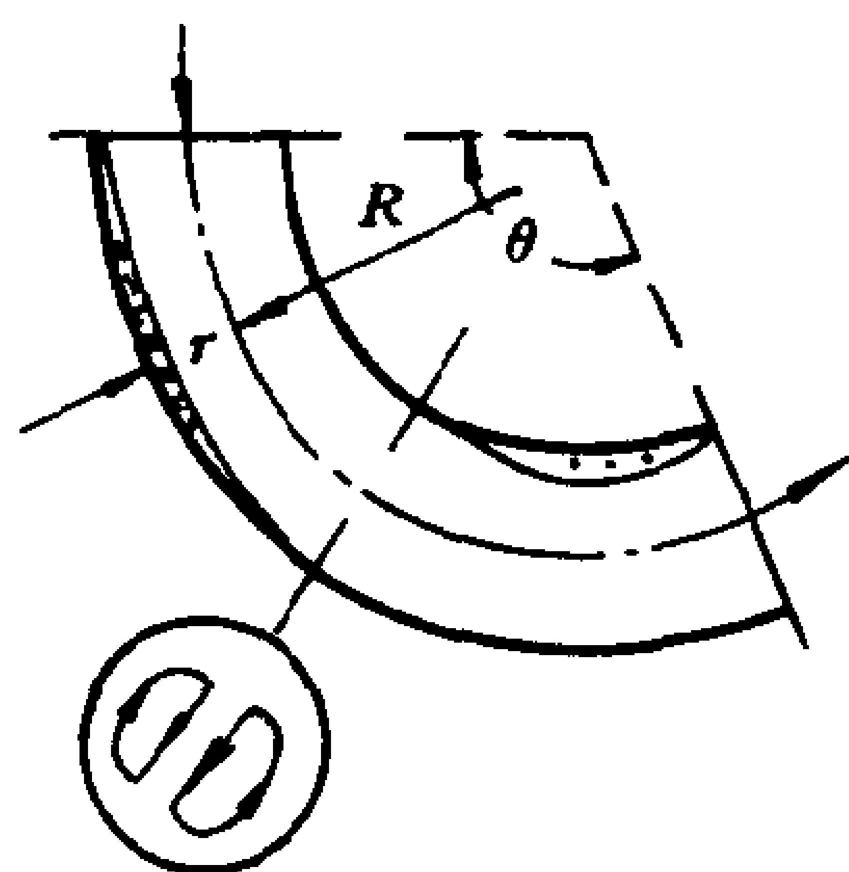


图 5-33　弯管

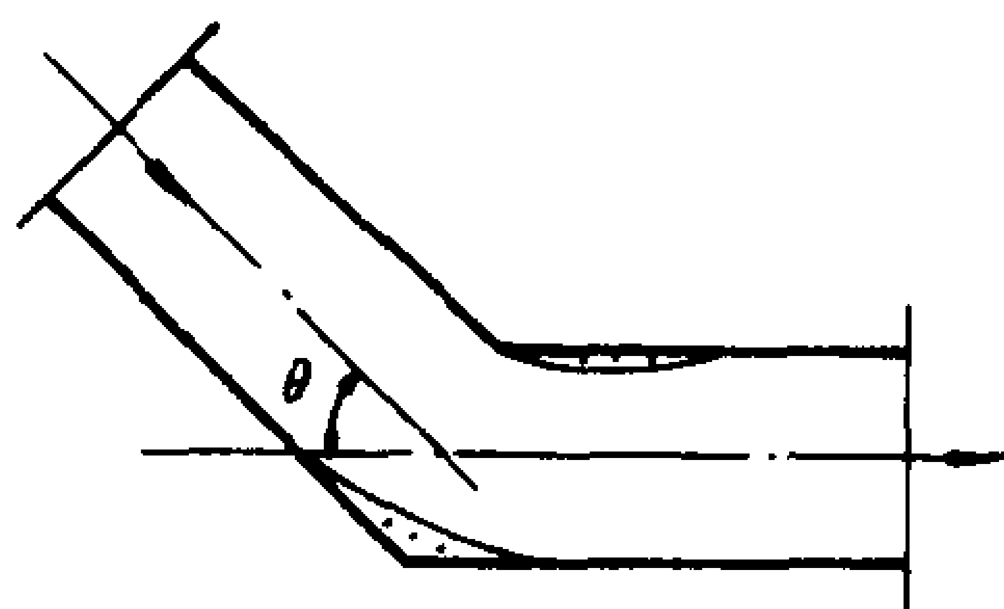


图 5-34　折管

的过流断面上,外侧压强大于内侧压强,高压部位的流体沿管壁向低压部位挤压,于是在断面上产生如图所示的回流,最后流体往往以螺旋运动的方式离开转弯处。弯管和折管的流动现象十分复杂。

魏斯巴赫通过实验总结出弯管和折管的经验公式如下。

弯管:

$$\zeta=\left[0.131+1.847\left(\frac{r}{R}\right)^{3.5}\right]\frac{\theta}{90^\circ} \tag{5-66}$$

当 $\theta=90^\circ$时，可得常用弯管的阻力系数，如表 5-9 所示。

表 5-9　90°弯管的局部阻力系数

$\frac{r}{R}$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
ζ	0.132	0.138	0.158	0.206	0.294	0.440	0.661	0.977	1.408	1.978

一般铸铁管弯头$\frac{r}{R}=0.75$，其阻力系数 $\zeta=0.9$。

折管：

$$\zeta=0.946\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+2.407\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{5-67}$$

折管的局部阻力系数见表 5-10。

表 5-10　折管的局部阻力系数

θ	20°	40°	60°	80°	90°	100°	110°	120°	130°	160°
ζ	0.046	0.139	0.364	0.741	0.985	1.260	1.560	1.861	2.150	2.431

7. 三通接头

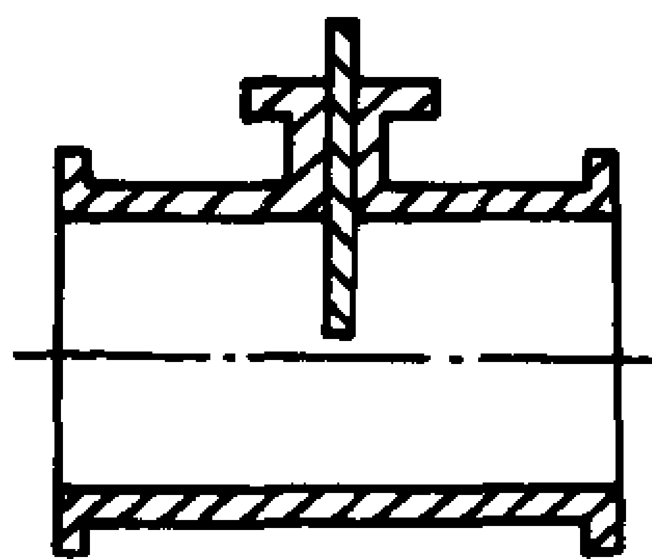
在水管、油管上的三通接头处可能有各种方式的流动，其局部阻力系数列于表 5-11 中。

表 5-11　三通接头的局部阻力系数

90°三通				
ζ	0.1	1.3	1.3	3
45°三通				
ζ	0.15	0.05	0.5	3

8. 闸板阀（图 5-35）与截止阀（图 5-36）

其局部阻力系数依开度而异，数值列于表 5-12 中。



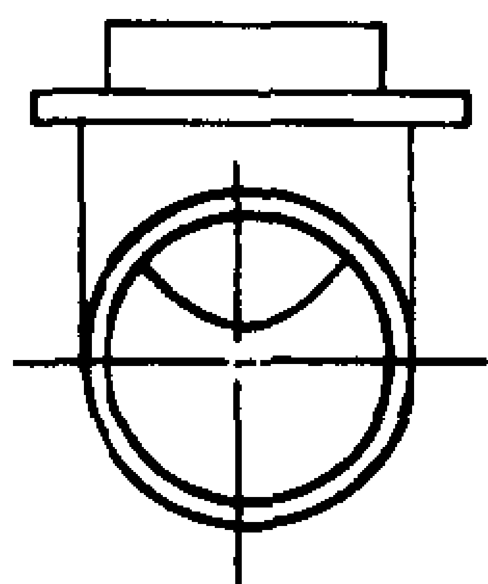


图 5－35　闸板阀

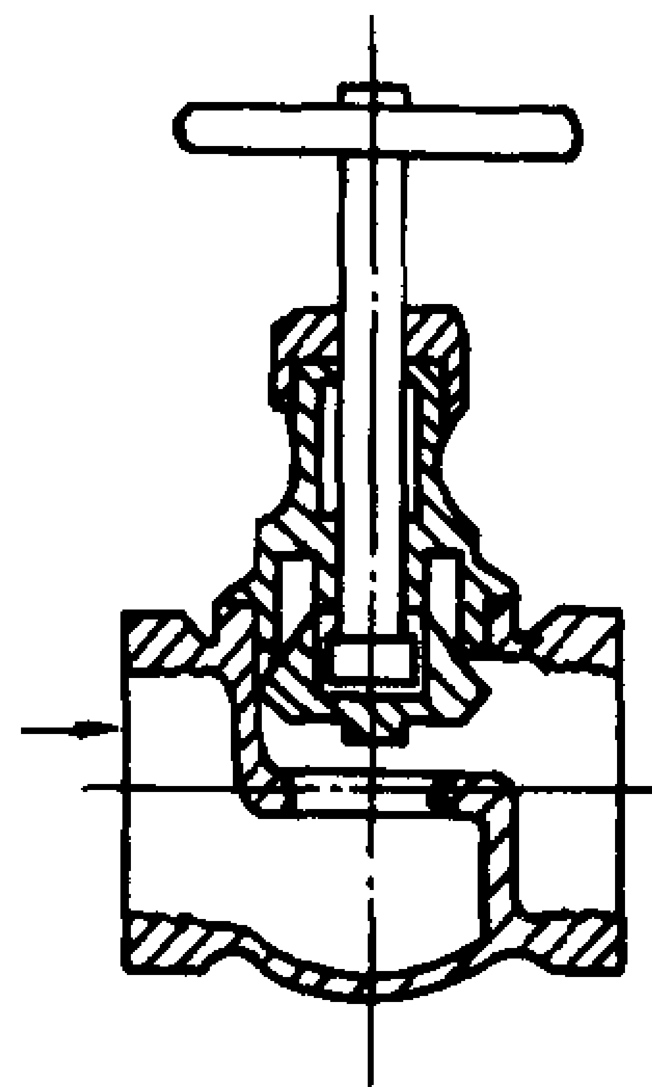


图 5－36　截止阀

表 5－12　闸板阀与截止阀的局部阻力系数

开度/%	10	20	30	40	50	60	70	80	90	全开
闸板阀 ζ	60	15	6.5	3.2	1.8	1.1	0.60	0.30	0.18	0.1
截止阀 ζ	85	24	12	7.5	5.7	4.8	4.4	4.1	4.0	3.9

9. 液压附件

液压附件上局部阻力系数可参阅表 5－13，其中各种阀口的阻力系数因开口量的不同而有较大的变动幅度，开口量（流量）较大时取小值，开口量（流量）较小时取大值。

表 5－13　液压附件的局部阻力系数

阀　口　形　状　和　局　部　阻　力　系　数				
$\zeta=1\sim3$	$\zeta=2\sim9$	$\zeta=2\sim11$	$\zeta=2\sim9$	$\zeta=8\sim16$

直角弯头 $\zeta=0.9\sim1.2$ 45°管接头 $\zeta=0.42$ 节流阀 $\zeta=3\sim10$ 油管人口 $\zeta=0.5$	直角长弯管 $\zeta=0.3\sim0.6$ 45°长弯管 $\zeta=0.25$ 粗滤油器 $\zeta=1\sim3$ 油管出口 $\zeta=1$	三通接头 $\zeta=1.5\sim1.8$ 单向阀 $\zeta=3\sim16$ 精滤油器 $\zeta=3\sim17$ 阀体上的油路 $\zeta=1.5\sim2.3$

二、水头损失的叠加原则

上述局部阻力系数多是在不受其他阻力干扰的孤立条件下测定的，如果几个局部阻力互相靠近、彼此干扰，则每个阻力系数与孤立的测定值又会有些不同。实际安装情况千变万化，我们不可能预先测知不同安装情况下的组合影响。因此在计算一条管道上的总水头（压强、能量）损失时，只能将管道上的所有沿程损失与局部损失按算术加法求和计算。这就是所谓的水头损失的叠加原则。据此用

$$h_f=\left(\lambda\frac{l}{d}+\Sigma\zeta\right)\frac{v^2}{2g} \tag{5-68}$$

表示一条管道上的总水头损失。虽然它有时比实际值略大，也有时比实际值略小，但一般情况下这种叠加原则还是可信可行的。

因为一个局部阻力不仅影响它后面的另一个局部阻力，而且也影响它后面一个适当长度上的沿程阻力。两个局部阻力靠近时，虽然后一个局部阻力损失略有增大，但取消了前一个局部阻力的影响长度也会使整体沿程阻力损失略有下降。事实上，这两种效果起互相抵消作用，用所有孤立的测定值的总和代表互有影响的实际总和，虽然在某些情况下与实际有些出入，但由于计算方法简单便利，至今仍不失为工程科技上的一种有效方法。

严格说来，一切经验数据也都是在一定具体条件下取得的，孤立条件并不存在，因而利用已有的经验数据计算管道阻力损失，不可能是尽善尽美的。过分吝求水头损失叠加原则的理论正确性并没有实际价值。只要谨慎选取阻力系数，用(5－68)式也完全能够满足工程计算的要求，这种叠加原则一般来说也是经得起实际检验的。

为了使用方便，有时可以将(5－68)式化简。

如果将局部阻力损失折合成一个适当长度上的沿程阻力损失，则令

$$\zeta=\lambda \frac{l_e}{d} \quad 或 \quad l_e=\frac{\zeta}{\lambda}d \tag{5-69}$$

式中 l_e 称为局部阻力的当量管长。于是一条管路上的总水头损失可以简化为

$$h_f=\lambda \frac{l+\Sigma l_e}{d}\frac{v^2}{2g}=\lambda \frac{L}{d}\frac{v^2}{2g} \tag{5-70}$$

式中 $L=l+\Sigma l_e$ 称为管路的总阻力长度。

反之，如果将沿程损失折合成一个适当的局部损失，则令

$$\frac{\lambda l}{d}=\zeta_e \tag{5-71}$$

ζ_e 称为沿程阻力的当量局部阻力系数，于是

$$h_f=(\zeta_e+\Sigma\zeta)\frac{v^2}{2g}=\xi \frac{v^2}{2g} \tag{5-72}$$

式中 $\xi=\zeta_e+\Sigma\zeta$ 称为管路的总阻力系数。

损失叠加的这两个简化公式使用起来比较方便，而且通过互相折算也易于对两种阻力的大小进行数量比较。(5-70)和(5-72)式这两种总水头损失公式在科技文献中用得很普遍。一般来说，管路上如果主要是沿程损失，则用(5-70)式；如果主要是局部损失，则用(5-72)式。

§5-6 管路计算

管路计算是流体力学工程应用的一个重要方面，无论在机械、土建、石油、化工、矿冶、水利等任何工程领域都会遇到管路计算问题。

管路按结构特点分，有等径管路、串联管路、并联管路、分支管路等几种。但按计算特点分却只有两种：一种是水头损失中绝大部分为沿程损失，其局部损失相对可以忽略者称为长管；一种是水头损失中沿程损失、局部损失各占一定比例，这种称为短管。这里

的长管和短管并不完全是个几何长短概念,而是一个阻力计算上的概念。

管路计算中所涉及的物理量很多,需要解决的问题也很多。不过问题的基本类型仍不外如§5-4中最后所总结的那样:或是已知 l、d、q_V 求 h_f,或是已知 l、d、h_f 求 q_V,或是已知 l、h_f、q_V 求 d。无论是那一种问题都离不开达西公式 $h_f=\lambda\dfrac{l}{d}\dfrac{v^2}{2g}$。考虑到局部阻力损失,可以用管路阻力长度 L 代替实际管长 l,则公式变成 $h_f=\lambda\dfrac{L}{d}\dfrac{v^2}{2g}$。借此,并考虑到管中的流动状态,选取适当的λ的计算公式,即可解决短管的一些计算问题。长管也可以这样分析,但是为了简化计算方法,还需要介绍一下所谓的管路特性。下面分别讨论短管计算、管路特性和长管计算这样三个问题。

一、短管计算

短管是机械工程中最常见的一种管路,尤其是机械设备上的油管、车间中的水管等等,它们的局部阻力往往不能忽略,因此在计算中需要同时考虑沿程阻力损失和局部阻力损失。

短管计算没有什么特殊的原则,主要是如何运用前面的一些公式和图表,因此下面通过两个实例来介绍短管计算的一般方法。

[**例题5-6**] 水泵管路如图5-37所示,铸铁管直径 $d=150$ mm,长度 $l=180$ mm,管路上装有滤水网($\zeta=6$)一个,全开截止阀一个,管半径与曲率半径之比为 $\dfrac{r}{R}=0.5$ 的弯头三个,高程 $h=100$ m,流量 $q_V=225$ m^3/h,水温 20 ℃。

试求水泵输出功率

[**解**] 首先需要判断流动状态以便确定沿程阻力系数 λ。

从表1-6上查得20 ℃时,水的运动粘度 $\nu=1.007\times10^{-6}$ m^2/s,于是

$$Re=\frac{vd}{\nu}=\frac{4q_V}{\pi d\nu}=\frac{4\times225\times10^6}{3\,600\pi\times0.15\times1.007}=5.27\times10^5$$

铸铁管

$$\Delta=0.25\ \text{mm},\quad \frac{\Delta}{d}=0.001\ 66,$$

$$\frac{d}{\Delta}=600$$

$$22.2\left(\frac{d}{\Delta}\right)=22.2\times600^{\frac{8}{7}}=33\ 200<Re$$

光滑管湍流。

$$597\times\left(\frac{d}{\Delta}\right)^{\frac{9}{8}}=7.97\times10^5>Re$$

可知流动状态为过渡区。

先用阿里特苏里公式求 λ 的近似值

$$\lambda=0.11\left(\frac{\Delta}{d}+\frac{68}{Re}\right)^{0.25}=0.022\ 7$$

再将此值代入柯列布茹克公式的右端，从其左端求 λ 的第二次近似值，于是

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=-2\lg\left(\frac{\Delta}{3.7d}+\frac{2.51}{Re\sqrt{\lambda}}\right)=6.212$$

解出 $\lambda=0.025\ 59$，与第一次近似值相差不多，即以此值为准。

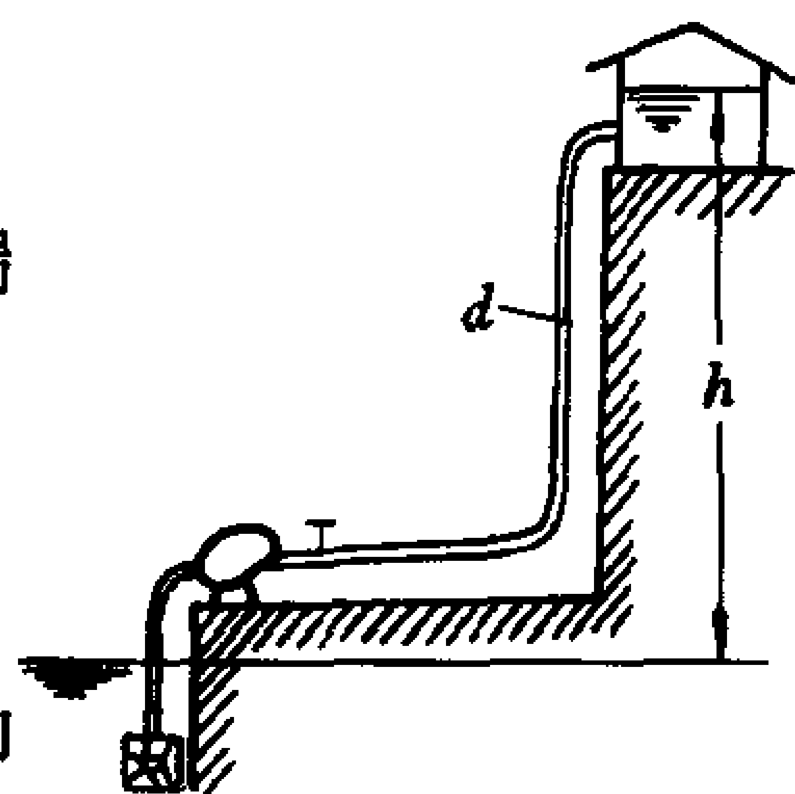


图 5-37　水泵管路

从局部阻力系数表及题给数据可知：入口 $\zeta=0.5$，弯头 $\zeta=0.294\times3$，截止阀 $\zeta=3.9$，滤水网 $\zeta=6$，出口 $\zeta=1$。于是得局部阻力的当量管长

$$\Sigma l_e=\frac{\Sigma\zeta}{\lambda}d=\frac{12.28}{0.025\ 59}\times0.15=71.98\ \text{m}$$

管路总阻力长度

$$L=l+\Sigma l_e=180+71.98=252\ \text{m}$$

$v=\dfrac{4q_V}{\pi d^2}$代入 $h_f=\lambda\dfrac{L}{d}\dfrac{v^2}{2g}$公式中可得

$$h_f=\frac{8\lambda L}{g\pi^2d^5}q_V^2=\frac{8\times0.025\ 59\times252\times225^2}{9.81\times\pi^2\times0.15^5\times3\ 600^2}=27.4\ \text{m}$$

水泵扬程

$$H = h + h_f = 100 + 27.4 = 127.4 \text{ m}$$

最后得水泵输出功率

$$P = \rho g q_V H = 9\ 810 \times \frac{225}{3\ 600} \times 127.4 = 78\ 000 \text{ W} = 78 \text{ kW}$$

[**例题 5-7**] 机床液压油的运动粘度为 $\nu = 2 \times 10^{-5}$ m^2/s，密度为 ρ = 850 kg/m^3，油缸直径 $D = 20$ cm，活塞杆直径 $D_0 = 4$ cm，油缸上的负载为 F = 5 000 N。换向阀 $\zeta = 16$，滤油器 $\zeta = 5$，节流阀 $\zeta = 12$，管路上共有 8 个直角弯头，每个的局部阻力系数均为 $\zeta = 0.9$。

油泵流量为 $q_V = 26$ l/min，节流阀前的压强 $p_2 = 1.2 \times 10^5$ Pa。

铜油管直径为 $d = 15$ mm，油管共分四段，每段长度均为 $l = 1$ m。（如图 5-38 所示，节流阀及油泵下面小段忽略。）

试求：

(1) 油路上的总压强损失 Δp；

(2) 油泵出口的压强 p_1；

(3) 油泵的输出功率 P。

[解] 进油管的平均速度

$$v_1 = \frac{4q_V}{\pi d^2} = 2.45 \text{ m/s}$$

进油管的雷诺数 $Re_1 = \frac{v_1 d}{\nu} = 1\ 838$，是层流。

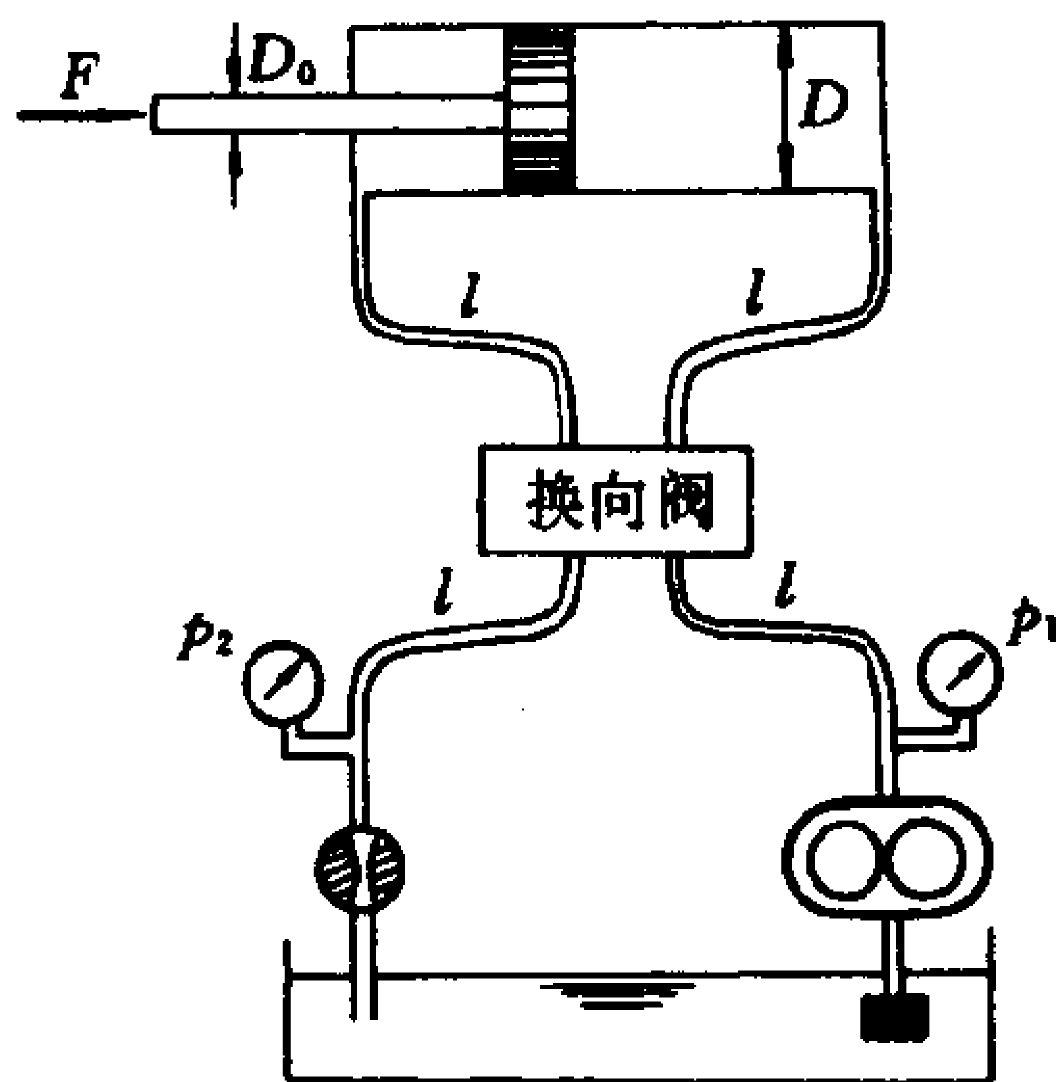


图 5-38 机床油路

进油管的沿程阻力系数

$$\lambda_1 = \frac{64}{Re_1} = 0.035$$

进油管长的当量局部阻力系数

$$\zeta_{el} = \frac{\lambda_1 2l}{d} = 4.67$$

回油管上平均速度 v_2 可通过油缸面积变化求得

$$v_2 = v_1 \frac{D^2 - D_0^2}{D^2} = 2.45 \times \frac{0.2^2 - 0.04^2}{0.2^2} = 2.35 \text{ m/s}$$

回油管的雷诺数

$$Re_2=\frac{v_2 d}{\nu}=1\ 763$$

回油管的沿程阻力系数

$$\lambda_2=\frac{64}{Re_2}=0.036$$

回油管长的当量局部阻力系数

$$\zeta_{e2}=\frac{\lambda_2 2l}{d}=4.8$$

进油管的压强损失为

$$\begin{aligned}\Delta p_1 &=\rho g(\Sigma\zeta_1)\frac{v_1^2}{2g}=\rho(\Sigma\zeta_1)\frac{v_1^2}{2}\\&=\frac{850}{2}\times(5+16+0.5+1+4\times0.9+4.67)\times2.45^2\\&=78\ 500\ \text{Pa}=78.5\ \text{kPa}\end{aligned}$$

回油管的压强损失为

$$\begin{aligned}\Delta p_2 &=\rho(\Sigma\zeta_2)\frac{v_2^2}{2}\\&=\frac{850}{2}\times(12+16+0.5+1+4\times0.9+4.8)\times2.35^2\\&=89\ 000\ \text{Pa}=89\ \text{kPa}\end{aligned}$$

油路上的总压强损失为

$$\Delta p=\Delta p_1+\Delta p_2=167\ 500\ \text{Pa}=167.5\ \text{kPa}$$

为了求出油泵出口压强 p_1,可列活塞的平衡方程式如下:

$$F=(p_1-\Delta p_1)\frac{\pi D^2}{4}-(p_2+\Delta p_2)\frac{\pi(D^2-D_0^2)}{4}$$

所以

$$p_1=\Delta p_1+\frac{4F}{\pi D^2}+(p_2+\Delta p_2)\left(\frac{D^2-D_0^2}{D^2}\right)$$

将已知数值代入,得

$$p_1=916\ 000\ \text{Pa}=916\ \text{kPa}$$

油泵的输出功率

$$P=q_V p_1=\frac{26\times10^{-3}}{60}\times916\times10^3=400\ \text{W}=0.4\ \text{kW}$$

二、管路特性

管路特性就是指一条管路上水头 H 与流量 q_V 之间的函数关

系，用曲线表示则称为管路特性曲线，这种管路特性曲线在水力机械的使用中有其特别重要的作用。任何长管和短管都有各自的特性曲线。

如图 5－39 所示，在管路的始点 1 和终点 2 之间列伯努利方程式可得

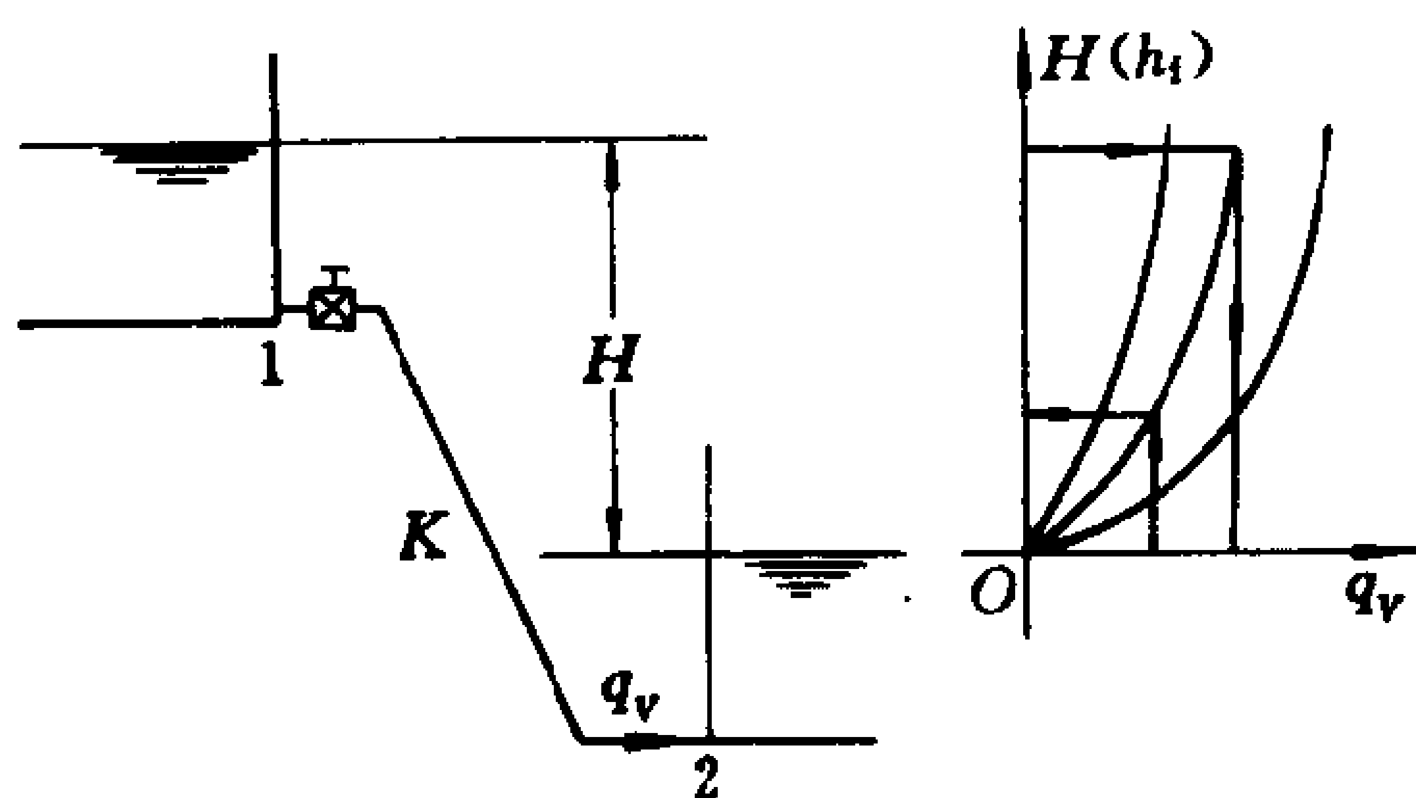


图 5－39　管路特性曲线

$$H=h_f=\lambda\frac{L}{d}\frac{v^2}{2g} \tag{5-73}$$

如果用 $v=\frac{q_V}{A}$ 代入，则

$$H=\lambda\frac{L}{d}\frac{q_V^2}{2g\left(\frac{\pi d^2}{4}\right)^2}=\frac{8\lambda L}{\pi^2 g d^5}q_V^2=Kq_V^2 \tag{5-74}$$

式中

$$K=\frac{8\lambda L}{\pi^2 g d^5}=\frac{8\lambda}{\pi^2 g d^5}(l+\Sigma l_e) \tag{5-75}$$

称为管路的阻力综合参数，或简称管路的综合参数。阻力综合参数 K 中包含着管路的长度、直径、沿程阻力和局部阻力等多种因素在内。它的物理意义可以通过水流与电流类比的方法来理解，因为(5－74)式与欧姆定律 $V=RI$ 有类似之处。水流中的水位差 H 相当于电流中的电位差 V，水流中的流量 q_V 相当于电流中的电流强度 I，因而电路中的电阻 R 就类似于水流中的阻力综合参数 K。反映 $V=RI$ 关系的直线称为电路特性曲线(图 5－40)，

反映 $H=Kq_V^2$ 关系的曲线称为管路特性曲线(图5－39)。

管路特性曲线有两方面的作用:由已知的水位差 H 可以得出通过管路的流量 q_V,反过来由已知的流量 q_V 又可以得出通过管路所产生的水头损失 h_f。

由(5－75)式可以看到,1、2 两点之间安装不同结构的管路,其 K 值自然不同,于是不同管路的管路特性曲线自然是不一样的。

图 5－40 电路特性曲线

即使管路结构一定,如改变管路中的阀门开度(类似于电路中改变电阻),管路的特性曲线也是变化的。

阻力综合参数中包含着沿程阻力系数 λ,因而不同雷诺数时 K 是变量。但是在湍流平方阻力区中,λ 与雷诺数无关,此时 K 是常量,因此利用(5－74)式计算粗糙管湍流问题就显得非常方便。

如果几段不同尺寸的管路串联或者并联,如图 5－41 所示,(左边是管路图,右边是简化图),我们可以用管路阻力综合参数写出它们的基本规律。

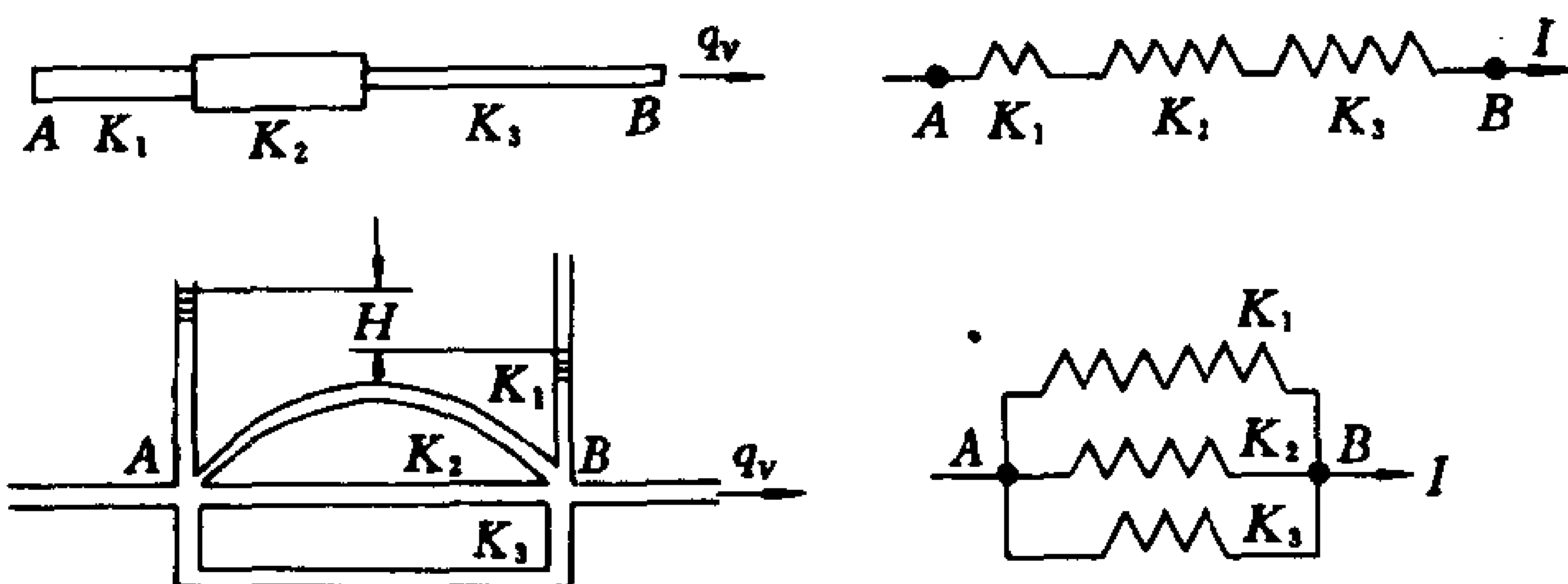


图 5－41 串联与并联管路

串联管路中,流量处处相等,总水头损失等于各段水头损失之和。于是

$$q_V=q_{V1}=q_{V2}=q_{V3} \tag{5-76}$$

$$H=H_1+H_2+H_3 \tag{5-77}$$

将 $H_1=K_1q_V^2$、$H_2=K_2q_V^2$、$H_3=K_3q_V^2$ 代入(5－77)式中,可得

$$H=(K_1+K_2+K_3)q_V^2=Kq_V^2 \tag{5-78}$$

即串联管路的总阻力综合参数 K 等于各段阻力综合参数之和

$$K=K_1+K_2+K_3 \tag{5-79}$$

并联管路中,每段管路的水头损失 H 都相等,而总流量为各段流量之和,即

$$H=H_1=H_2=H_3 \tag{5-80}$$

$$q_V=q_{V1}+q_{V2}+q_{V3} \tag{5-81}$$

将

$$q_{V1}=\sqrt{\frac{H}{K_1}},q_{V2}=\sqrt{\frac{H}{K_2}},q_{V3}=\sqrt{\frac{H}{K_3}} \tag{5-82}$$

代入(5－81)式中得

$$q_V=\left(\frac{1}{\sqrt{K_1}}+\frac{1}{\sqrt{K_2}}+\frac{1}{\sqrt{K_3}}\right)\sqrt{H}=\frac{1}{\sqrt{K}}\sqrt{H} \tag{5-83}$$

即并联管路的总阻力综合参数 K 平方根的倒数等于各段阻力综合参数平方根倒数之和

$$\frac{1}{\sqrt{K}}=\frac{1}{\sqrt{K_1}}+\frac{1}{\sqrt{K_2}}+\frac{1}{\sqrt{K_3}} \tag{5-84}$$

需要注意,并联管路各段上的水头损失相等并不意味着它们的能量损失也相等。因为各段阻力不同,流量也就不同,以同样的水头损失乘以不同的重力流量(即 $\rho g q_V$)所得到的各段功率损失是不同的。

从(5－82)式可以看出,在一定的水头 H 作用下,阻力综合参数越大,也就是阻力越大的管段,通过的流量越小,所消耗的功率也越小,这情况也与并联电路的性质是类似的。因为从(5－79)和(5－84)式来看,它们与串、并联电路中的总电阻公式的结构是完全一样的。

三、长管计算

在长管计算中,运用阻力综合参数可以使计算过程更加简化,

在长管中 $K=\dfrac{8\lambda l}{\pi^2 gd^5}$，$l$ 为实际管长。

[**例题 5-8**] 用扬程为 100 m 的水泵，通过图 5-42 所示的管路，向车间中位于 $h_G=40$ m、$h_H=60$ m 处的 G、H 两台设备供水。已知所有管段上的沿程阻力系数均为 $\lambda=0.024$，各管段的长度和直径列于表 5-14 中，调节阀 FG 的阻力综合参数 K_{FG} 与阀口开度 $S(\%)$ 的关系是 $K_{FG}=\left(\dfrac{4\ 000}{S}\right)^2$，忽略其它一切局部阻力。

要求调整 FG 阀的开度以保证两台设备的供水量完全相等。试求此时

(1) E 点处的压强 p_E

(2) 水泵的流量 q_V 与每台设备的供水量 q

(3) 调节阀的开度 $S(\%)$"。

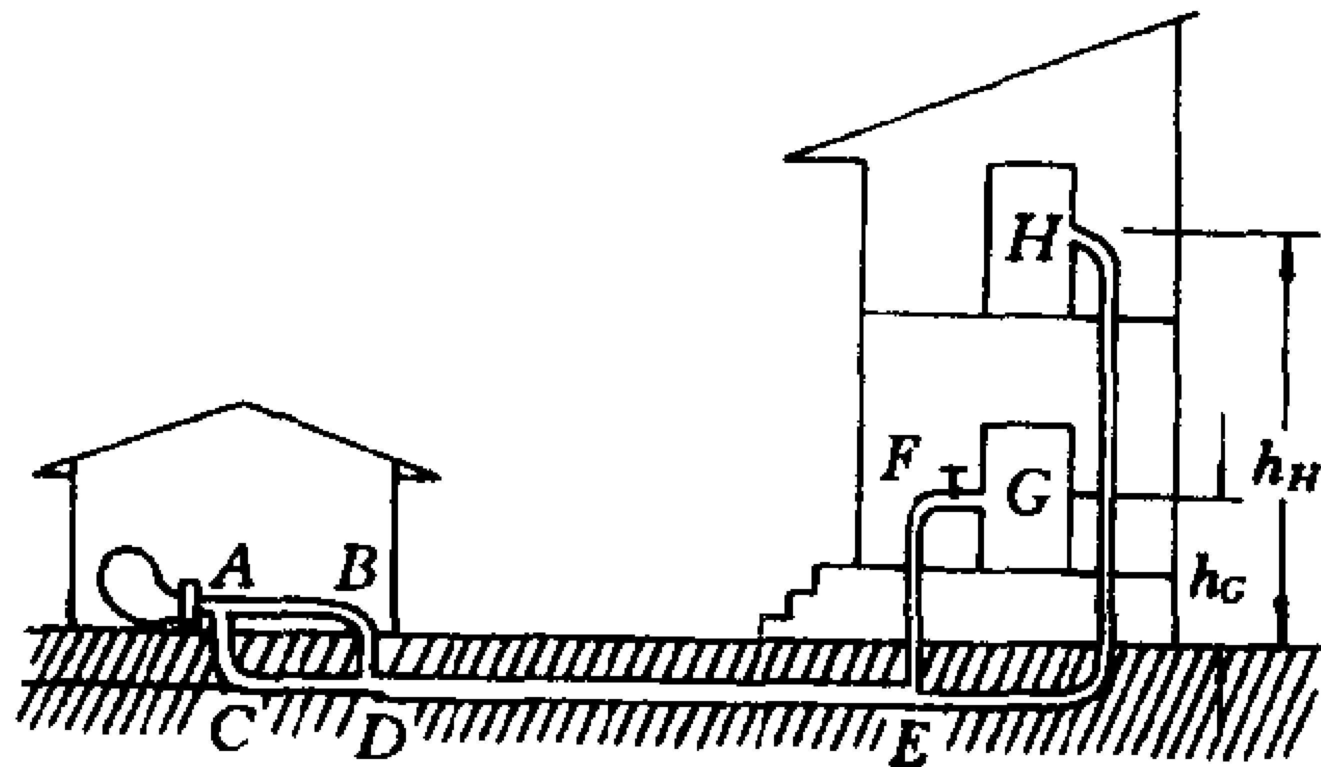


图 5-42 供水管路

表 5-14 已知数据

管 段	长度 l/m	直径 d/m
ABD	30	0.1
ACD	30	0.125
DE	60	0.15
EF	15	0.1
EH	30	0.1

[**解**] 绘出供水管路的简化图如图 5-43 所示，这是长管的串并联问题。

根据题意，由(5-75)式得

$$K=\frac{8\lambda l}{\pi^2 gd^5}=0.082\,6\ \lambda\frac{l}{d^5}$$

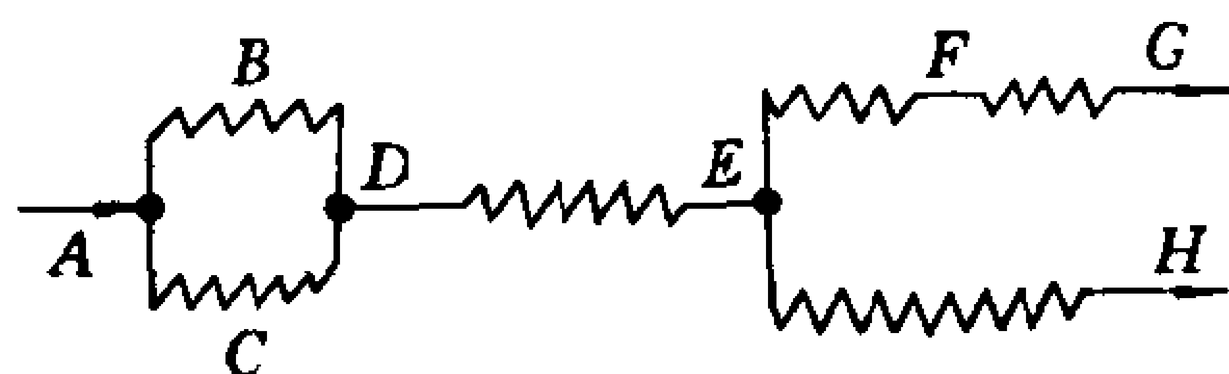


图 5-43　简化管路图

将数据代入,得出各管段的阻力综合参数为

$$K_B=5\,947,\quad K_C=1\,949,\quad K_{DE}=1\,566,$$

$$K_{EF}=2\,974,\quad K_{FG}=\left(\frac{4\,000}{S}\right)^2,\quad K_{EH}=5\,947$$

首先考虑 ABD 与 ACD 的并联问题,用公式(5-84)得

$$\frac{1}{\sqrt{K_{AD}}}=\frac{1}{\sqrt{K_B}}+\frac{1}{\sqrt{K_C}}$$

解出

$$K_{AD}=\frac{K_BK_C}{(\sqrt{K_B}+\sqrt{K_C})^2}=\frac{5\,947\times 1\,949}{(\sqrt{5\,947}+\sqrt{1\,949})^2}=788$$

其次考虑 AD 与 DE 的串联问题,用公式(5-79)得

$$K_{AE}=K_{AD}+K_{DE}=788+1\,566=2\,354$$

设 A、E、H 各点的水头为 h_A、h_E、h_H。

已知 $h_A=100$ m、$h_H=60$ m,而 h_E 正是我们要求的。(因 $p_E=\rho gh_E$)于是根据公式(5-74),$H=Kq_V^2$,可以分别列出 AE 段与 EH 段的管路特性为

$$h_A-h_E=K_{AE}q_V^2\quad 和\quad h_E-h_H=K_{EH}\left(\frac{q_V}{2}\right)^2$$

将数据代入,有

$$100-h_E=2\,354q_V^2\quad 和\quad h_E-60=5\,947\times\frac{q_V^2}{4}$$

联立解出　　$h_E=75.49$ m,　$q_V=0.102$ m^3/s

E 点压强

$$p_E=\rho gh_E=9\,810\times 75.49=740\,000\ \text{Pa}=7.4\times 10^5\ \text{Pa}$$

每台设备的供水量为

$$q=\frac{q_V}{2}=0.051\ \text{m}^3/\text{s}=51\ \text{l/s}$$

最后再解决 EF 与阀 FG 的串联问题，根据(5－74)式

$$h_E - h_G = (K_{EF} + K_{FG})\left(\frac{q_V}{2}\right)^2$$

将已知数据代入

$$75.49 - 40 = \left[2\ 974 + \left(\frac{4\ 000}{S}\right)^2\right]\left(\frac{0.102}{2}\right)^2$$

由此解出 $S = 0.387 = 38.7\%$

即，将调节阀开到这样的开度，可以保证两台设备的供水量相等，都是 $q = 51$ l/s。

［**例题 5－9**］ 图 5－44 表示升降机构上的液压油路图，在油泵的工作压强 $p = 1\ 600$ kPa 的作用下，两个油缸分别向上、下同时动作。两个油缸的管路条件完全相同，图上附有全部尺寸和所需数据，试求升降机构工作过程中的下列性能数据：

(1) 油路上的耗损功率，

(2) 油泵的输出功率，

(3) 升降机构的移动速度和负载，

(4) 升降机构的效率。

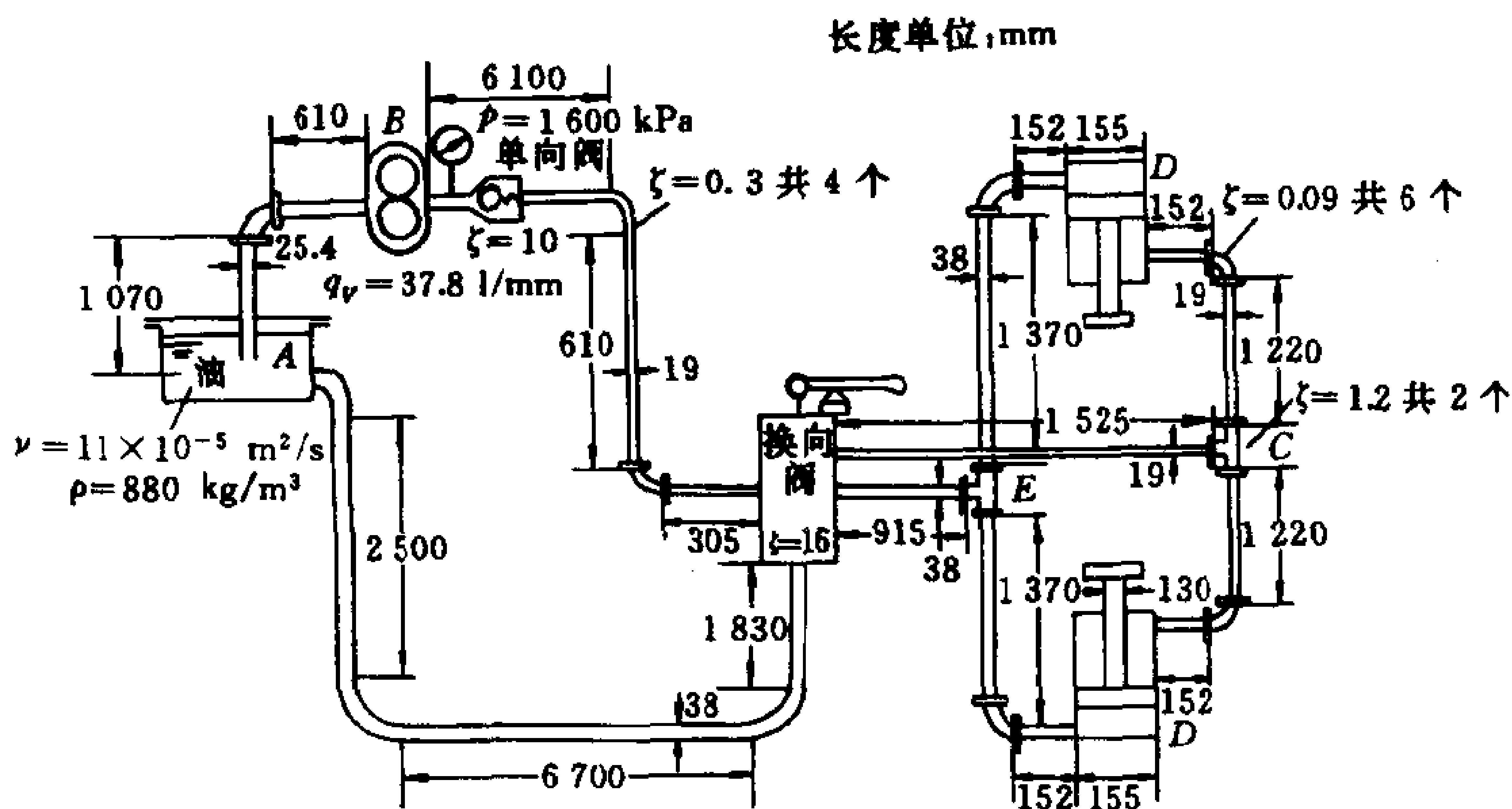


图 5－44 升降机构油路图

［**解**］ 此题并非长管，只是用到串并联概念，我们既可以用 $h_f = Kq_V^2$ 公

式，也可以用 $h_f=\lambda\dfrac{L}{d}\dfrac{v^2}{2g}$ 公式，因为阻力综合参数 K 可以写成下述四种形式：

$$K=\frac{8\lambda L}{\pi^2 gd^5}=\frac{8\lambda(l+\Sigma l_e)}{\pi^2 gd^5}=\frac{8\xi}{\pi^2 gd^4}=\frac{8(\zeta_e+\Sigma\zeta)}{\pi^2 gd^4} \tag{5-85}$$

无论用那一种形式都可求得 $h_f=Kq_V^2$ 或 $\Delta p=\rho gKq_V^2$。这与使用

$$h_f=\lambda\frac{L}{d}\frac{v^2}{2g}$$

公式的结果完全一样。

将油路分为 AB、BC、CD（并联）、DE（并联）、EA 五段，根据已知条件逐项计算，每段的计算结果列于表 5－15 中。

表 5－15　解　题　表

	d/m	l/m	v/(m/s)	Re	λ	$\zeta_e=\lambda\dfrac{l}{d}$	$\Sigma\zeta$
AB	0.025 4	1.68	1.243	287	0.223	14.75	1.4
BC	0.019	8.54	2.22	384	0.167	75.1	28.7
CD	0.019	1.372	1.11	192	0.333	24	1.9
DE	0.038	1.882	0.936	323	0.198	9.81	1.4
EA	0.038	11.945	1.87	647	0.099	31.1	19.4

	ξ	K	q_V/(m³/s)	h_f/m	Δp/Pa	P_f/W
AB	16.15	3.2×10^6	6.3×10^{-4}	1.27	0.11×10^5	6.93
BC	103.8	65.8×10^6	6.3×10^{-4}	26.1	2.25×10^5	141.75
CD	25.9	16.4×10^6	3.15×10^{-4}	1.63	0.14×10^5	4.41×2
DE	11.21	0.44×10^6	10.6×10^{-4}	0.494	0.043×10^5	4.56×2
EA	50.5	2×10^6	21.2×10^{-4}	8.99	0.776×10^5	164.5

由此不难得出：

（1）油路上的耗损功率

$$P_f=330\ \text{W}=0.33\ \text{kW}$$

（2）油泵的输出功率

$$P=(p+\Delta p_{AB})q_{VAB}=16.11\times6.3\times10^{-4}$$
$$=1\ 015\ \text{W}=1.015\ \text{kW}$$

(3) 升降机构的移动速度

$$v_0 = v_{CD}\frac{d_{CD}^2}{[D_1^2 - D_2^2]} = 1.11 \times \frac{0.019^2}{0.155^2 - 0.13^2}$$

$$= 0.056\ \text{m/s} = 56\ \text{mm/s}$$

升降机构的负载

$$F = \left[(p - \Delta p_{BC} - \Delta p_{CD})\frac{\pi}{4}(D_1^2 - D_2^2) - (\Delta p_{DE} + \Delta p_{EA})\frac{\pi}{4}D_1^2\right]$$

$$= \Big[(16 - 2.25 - 0.14)\frac{\pi}{4}(0.155^2 - 0.13^2) -$$

$$- (0.043 + 0.776)\frac{\pi}{4} \times 0.155^2\Big] \times 10^5 = 6\ 071\ \text{N}$$

(4) 升降机构的效率

$$\eta = \frac{2Fv_0}{P} = \frac{2 \times 6\ 071 \times 0.056}{1\ 015} = 0.67 = 67\%$$

*§ 5－7　管中水击现象

由于外界原因,管中液流有时会发生速度的突然变化。例如水泵突然启动或停止,换向阀突然变换工位,水轮机或液压油缸突然变化负载等等。管中液流突然变速必然引起管中压强的突然升高或降低,速度变化过程越快,则瞬时升降的压强就越大,这种现象称为管中水击或液压冲击。水击现象中所产生的瞬时压强叫水击压强,它的大小与速度变化过程的快慢及流动质量和动量的大小有关,轻微时只表现为噪音和振动,严重时甚至能使管道破裂。水击现象在水力机械和液压传动中是难于完全避免的,但是我们应该研究它的规律,降低它的危害。

一、水击现象的物理过程

如图 5－45,假定 l 长的管道一端与大容器相连,正常流动时管末端阀门处的压强为 p,速度为 v。如果在 $t=0$ 瞬时,阀门突然全部关闭,则最前面的液体突然撞击在阀门上,速度立刻降为零,压强从 p 上升到 $p+\Delta p$。在 p 与 $p+\Delta p$ 的液体交界面上形

成一个压缩波。我们现在分析一下这个压缩波在理想情况(液体不存在摩擦、管壁不产生膨胀、流体能量始终守恒)下的传播方式。如图 5－45(1)所示,设压缩波在液体中的传播速度为 c。则在 $\frac{l}{c}>t>0$的时间段内,波面从右向左传播,波面所到之处液体速度降为零、压强升为 $p+\Delta p$。波面未到之处,液体尚未受到影响,仍以速度 v 向右运动。

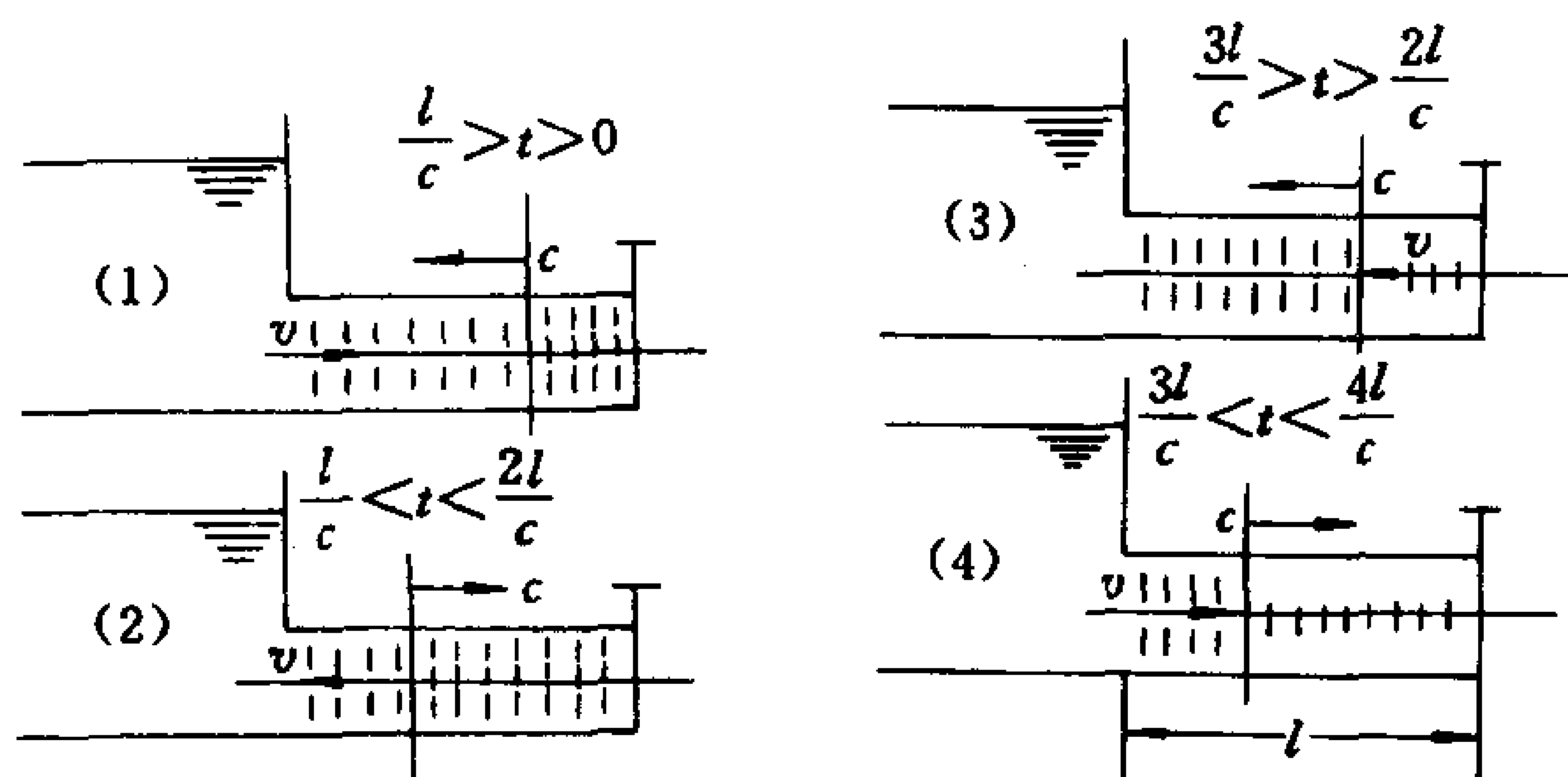


图 5－45　水击的物理过程

当 $t=\frac{l}{c}$瞬时,波面到达管口,全管中的液体均受到压缩,速度都已降为零。但管口处波面左右两端压强不等,不会平衡,管中受压的液体在 Δp 的作用下又以 v 的速度向左运动,如图 5－45(2)所示,这时在管内形成一个膨胀波,在$\frac{l}{c}<t<\frac{2l}{c}$的时间段内,膨胀波从左向右传播,波面所到之处,液体压强从 $p+\Delta p$ 降为 p,结束压缩状态,并产生一个向左运动的速度 v。

当 $t=\frac{2l}{c}$瞬时,膨胀波达到阀门处,全管中液体均已结束受压状态。这时正如一个受压弹簧,当外力取消以后,弹簧不仅会恢复到原来的长度,而且由于惯性作用,会伸长得比原长度还要长。现在阀门处的液体结束受压状态以后,它仍然具有以 v 的速度向左运动的惯性,因而当它结束受压状态以后不会稳定在原来压强为

p 的状态下，而是产生过度膨胀，压强继续降低，直到压强降为 $p-\Delta p$ 时，阀门处的液体才能稳定，这样又产生了一个新的膨胀波。在$\frac{3l}{c}>t>\frac{2l}{c}$的时间段内，新的膨胀波从右向左传播如图 5－45(3)，波面所到之处，液体产生过度膨胀，压强降为 $p-\Delta p$，波面未到之处流体仍具有向左运动的速度 v。

当 $t=\frac{3l}{c}$瞬时，新的膨胀波到达管口，波面前后压强不等，左面为 p。右面为 $p-\Delta p$。因而又产生一个新的压缩波。在$\frac{3l}{c}<t<\frac{4l}{c}$时间段内，这个新的压缩波又从左向右传播，如图 5－45(4)所示，波面之前液体处于 $p-\Delta p$ 的静止膨胀状态，波面到达之处液体具有向右的运动速度 v，压强又恢复为 p。

当 $t=\frac{4l}{c}$瞬时，新的压缩波到达阀门处，液体仍然以速度 v 冲向阀门，阀门关闭，这情况仍如 $t=0$ 时的情况一样。于是又重复上述的四个过程，如此周而复始循环下去。

在这种理想情况下，阀门处的压强应该如图 5－46 所示，在第一次压缩波和膨胀波传播过程中，阀门处的压强 $p+\Delta p$ 始终不变。在第二次膨胀波与压缩波的传播过程中，阀门处的压强 $p-\Delta p$ 也始终不变。只是每经过$\frac{2l}{c}$时间，阀门处的压强变化一次，这个时间 $t_0=\frac{2l}{c}$称为水击的相。两个相长称为水击的一个周期

$$T=2t_0=\frac{4l}{c}$$

在上面的叙述中，我们假定液体能量是守恒的，因而速度 v 降为零时产生 Δp，反过来 Δp 消失时又产生了同样的速度 v，这样循环转化皆无耗损。实际情况当然不可能这样，压强增大时不仅液体是可压缩的，而且管道也是能变形的。使管道膨胀必然消

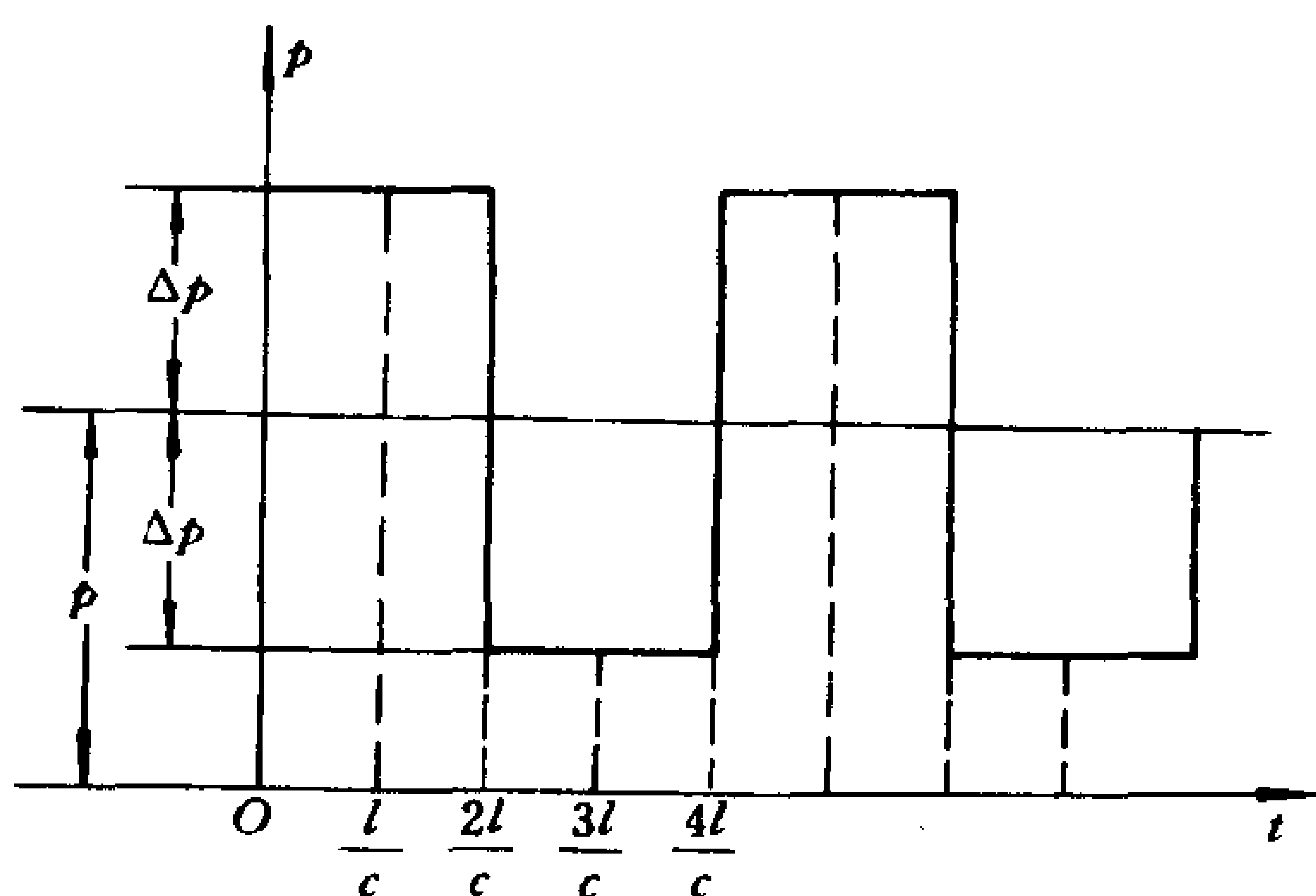


图 5-46　理想情况下的水击压强

耗了一部分能量，而且流体运动过程中也必然消耗能量。此外无论如何迅速，也不可能作到 $t=0$ 的瞬时完全关闭。因而实际情况下阀门处液体压强的波形，如图 5-47 所示，是一种衰减振荡的形式。水击现象常伴有振动，这种振动也是很快就衰减的。但水击压强 Δp 的大小却是不可忽视的一个因素，下面我们继续讨论水击压强 Δp 的计算问题。

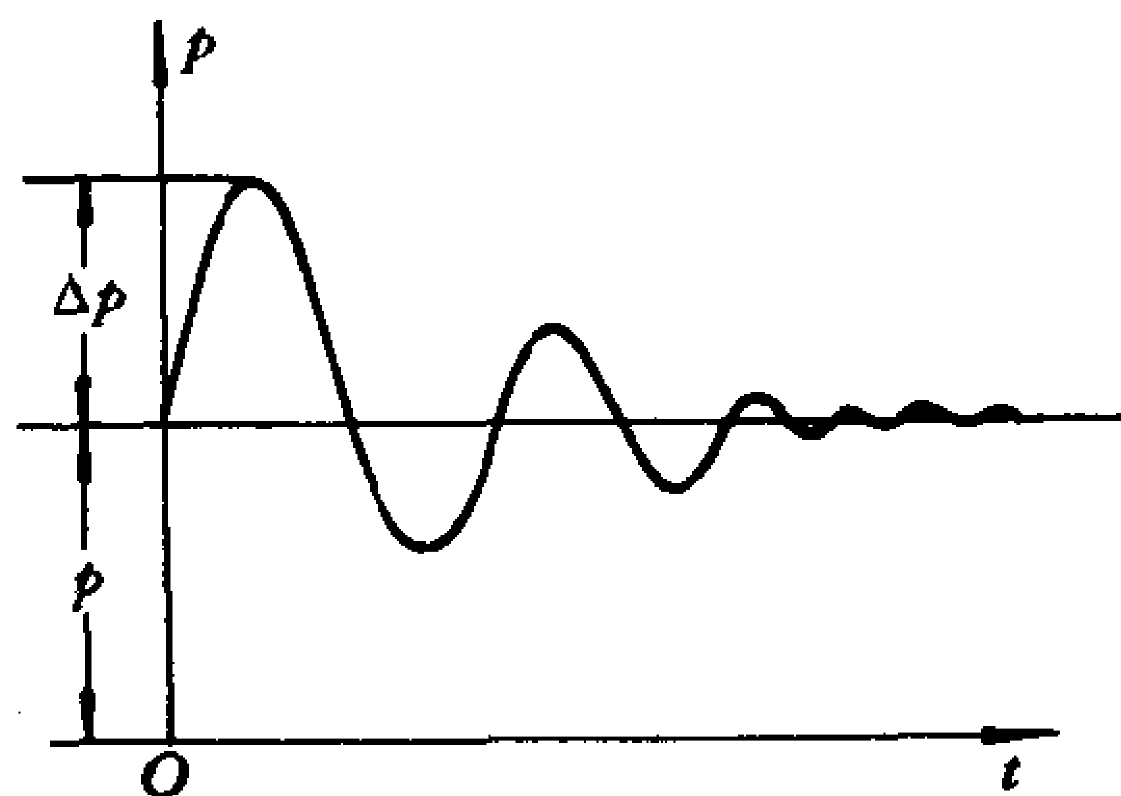


图 5-47　实际情况下的水击压强

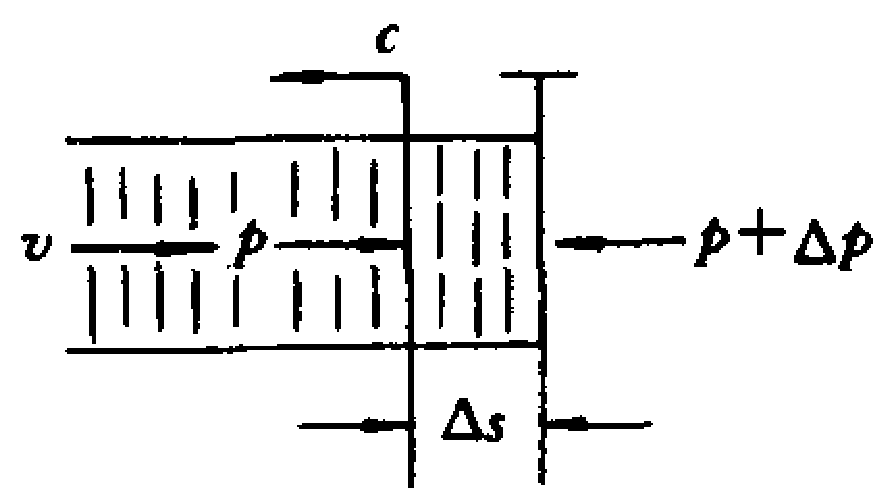


图 5-48　水击波的传播速度

二、水击压强和水击波传播速度

如图 5-48 所示，假定在 Δt 时间内，水击波（即前面所述的压缩波或膨胀波）传播到 Δs 距离处。列出波后已经静止的这部分液体的动量方程式：

可得 $$\rho\Delta sA(0-v)=[p-(p+\Delta p)]\Delta t$$

$$\Delta p=\rho v\frac{\Delta s}{\Delta t}=\rho vc \tag{5-86}$$

式中 c 为水击波的传播速度。由此可见要计算水击压强 Δp,必须首先计算出水击波的传播速度 c。为此,需要考虑在 Δp 作用下液体密度从 ρ 变为 $\rho+\Delta\rho$、管路断面积从 A 变为 $A+\Delta A$ 这样两种效果,这也就是说在较高的压强作用下需要考虑流体的压缩性与管道的变形性的问题。

因为液体压缩、管断面膨胀,所以在 Δp 作用下 Δs 段内的液体质量比正常情况下有所增加,这增加的液体量当然就是同一时间内从左面补充进来的液体质量 $\rho vA\Delta t$,于是可列出质量守恒关系为

$$\rho vA\Delta t=(\rho+\Delta\rho)(A+\Delta A)(c\Delta t)-\rho A(c\Delta t)$$

将右面展开并略去高阶无穷小项,可得

$$\rho vA=c(\rho\Delta A+A\Delta\rho)$$

所以 $$v=c\left(\frac{\rho\Delta A+A\Delta\rho}{\rho A}\right)=c\left(\frac{\Delta A}{A}+\frac{\Delta\rho}{\rho}\right) \tag{5-87}$$

现在需要设法将右端的两项相对变化量改用 Δp 表示出来。

根据第一章(1－17)式,液体的体积模量 K 等于应力比应变

$$K=-\frac{\Delta p}{\frac{\Delta v}{v}}=\frac{\Delta p}{\frac{\Delta\rho}{\rho}}$$

所以 $$\frac{\Delta\rho}{\rho}=\frac{\Delta p}{K} \tag{5-88}$$

其次再考虑 $\frac{\Delta A}{A}\doteq\frac{\frac{\pi}{4}[(d+\Delta d)^2-d^2]}{\frac{\pi}{4}d^2}=\frac{2\Delta d}{d}$ 怎样用 Δp 表示?因为固体的弹性模量 E 也等于应力比应变,故由材料力学上的定

义：

$$E=\frac{\Delta\sigma}{\frac{\Delta d}{d}} \tag{5-89}$$

可得

$$\frac{\Delta d}{d}=\frac{\Delta\sigma}{E} \tag{5-90}$$

根据第二章(2－59)式又得管壁上的应力 $\Delta\sigma=\frac{\Delta pd}{2\delta}$，代入(5－90)式得

$$\frac{\Delta d}{d}=\frac{\Delta pd}{2E\delta}$$

于是

$$\frac{\Delta A}{A}=\frac{\Delta pd}{E\delta} \tag{5-91}$$

将(5－91)及(5－88)式代回(5－87)式即得

$$v=c\left(\frac{\Delta pd}{E\delta}+\frac{\Delta p}{K}\right)=\frac{c\Delta p}{K}\left(1+\frac{Kd}{E\delta}\right)$$

所以
$$\Delta p=\frac{Kv}{c\left(1+\frac{Kd}{E\delta}\right)} \tag{5-92}$$

将此式与(5－86)式联立、消去 Δp 和 v，最后得到

$$c=\frac{\sqrt{\frac{K}{\rho}}}{\sqrt{1+\frac{Kd}{E\delta}}} \tag{5-93}$$

这就是水击波在液体中的传播速度公式，也称为儒科夫斯基(Жуковскний)公式，公式中

K 是液体的体积模量；E 是管材的弹性模量；ρ 是液体密度；

d 和 δ 是管路的直径和壁厚。式中$\sqrt{\frac{K}{\rho}}=\sqrt{\frac{\Delta p}{\Delta \rho}}=\sqrt{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}}=c_0$ 正是流体中的声速，详见第八章§8-1的(8-9)式。

由儒科夫斯基公式看出，考虑到管材的弹性变形，则水击波的传播速度 c 比液体中的声速 c_0 要小些，因为$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{Kd}{E\delta}}}<1$。管材的刚性越大，则 c 越接近声速 c_0。当 $E\rightarrow\infty$ 时，即视管材为不变形的绝对刚体时，$c=c_0$，水击波的传播速度与液体中的声速相等。

表5-16中列出常温下液体体积模量 K 和管材弹性模量 E 的大略数值可供参考。

表5-16 液体体积模量 K 与管材的弹性模量 E

材　料	水	矿物油	钢　管	铸铁管	铜　管	铝　管
$K.E$ 单位：Pa	$K=2.03\times10^9$	$K=1.67\times10^9$	$E=200\times10^9$	$E=100\times10^9$	$E=110\times10^9$	$E=70\times10^9$

有了儒科夫斯基公式，于是水击压强 Δp 的大小就不难计算了。

例如视管材为刚体 $E\rightarrow\infty$，则由(5-93)式可得水中水击波传播速度为 $c=1\ 425$ m/s。如果 $v=2$ m/s，则由(5-86)式可得 $\Delta p=1\ 000\times2\times1\ 425=28.5\times10^5\mathrm{Pa}=2\ 850$ kPa。可见水击压强比一般正常水管中的压强($1\sim10^3$ kPa)要高得多。

三、防止水击危害的方法

研究水击的目的主要在于找出防止水击危害的途径，根据水击产生的条件和水击压强公式，可以提出下列防止水击的方法。

1. 间接水击：阀门缓慢关闭时，如果完全关死所需的时间 t'_0 大于管路中水击的相 t_0，则所产生的水击叫间接水击。阀门缓慢关闭时，速度 v 不是突然而是逐渐减小为零，于是水击波化为无数弱小的微波，先后从阀门处发出，这时水击压强不是突然上升而

是如图 5－49 中的斜线那样逐渐上升的。特别是当阀门关闭时间

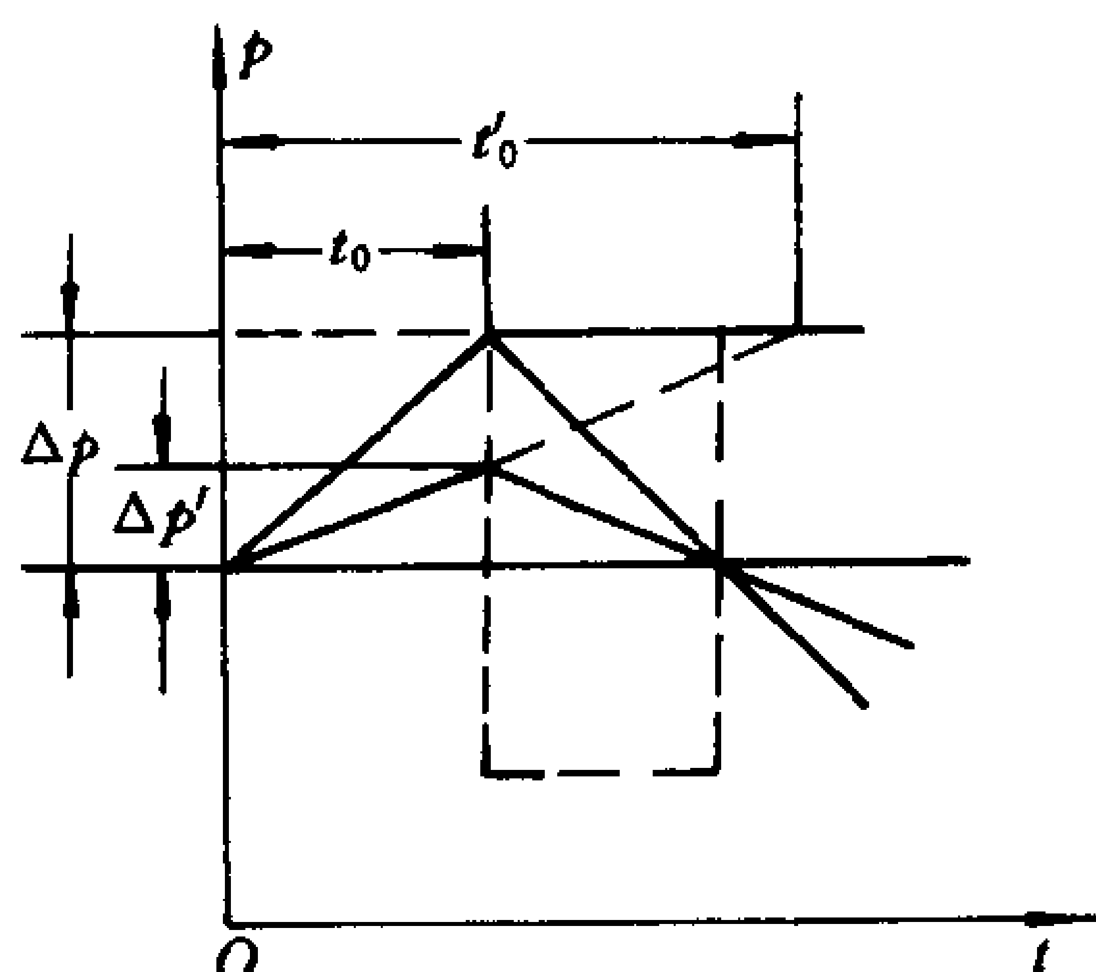


图 5－49　缓慢关闭时的水击压强

t'_0 如果大于水击的相 $t_0=\dfrac{2l}{c}$，则到 $t=t_0$ 时，最初发出的水击波已经以膨胀波的形式返回阀门处，压强开始下降，这样最大压强 $\Delta p'$ 就小于 Δp 了。从图上可以看出：

$$\Delta p'=\Delta p\,\frac{t_0}{t'_0}$$

Δp 称直接水击压强，$\Delta p'(<\Delta p)$ 称为间接水击压强。间接水击的关闭时间 t'_0 比水击相长得越多，水击压强越小。一般水管系统中的阀门都是用缓慢关闭的方法避免直接水击的。

2．过载保护：液压传动要求换向迅速、灵敏因而在换向阀处不能缓慢关闭。这时一般采用过载保护的溢流阀或安全阀以减小液压冲击对其他元件的损害（如图 5－50）。液压传动中有时采用蓄能器以图增大液动机的瞬时功率，当液压冲击发生时，蓄能器自然也起过载保护的作用（如图 5－51）。

3．减小管路长度和增加管道的弹性：当 l 减小时，水击的相也减小，这时易于使直接水击（$t'_0<t_0$）变成间接水击（$t'_0>t_0$）。

管道弹性增大，则弹性模量 E 减小，从而也可使水击压强降低。例如液压传动中的铜管、铝管有比钢管更好的防水击性能，采

用橡胶管或尼龙管则其减轻水击的效果就更加明显。

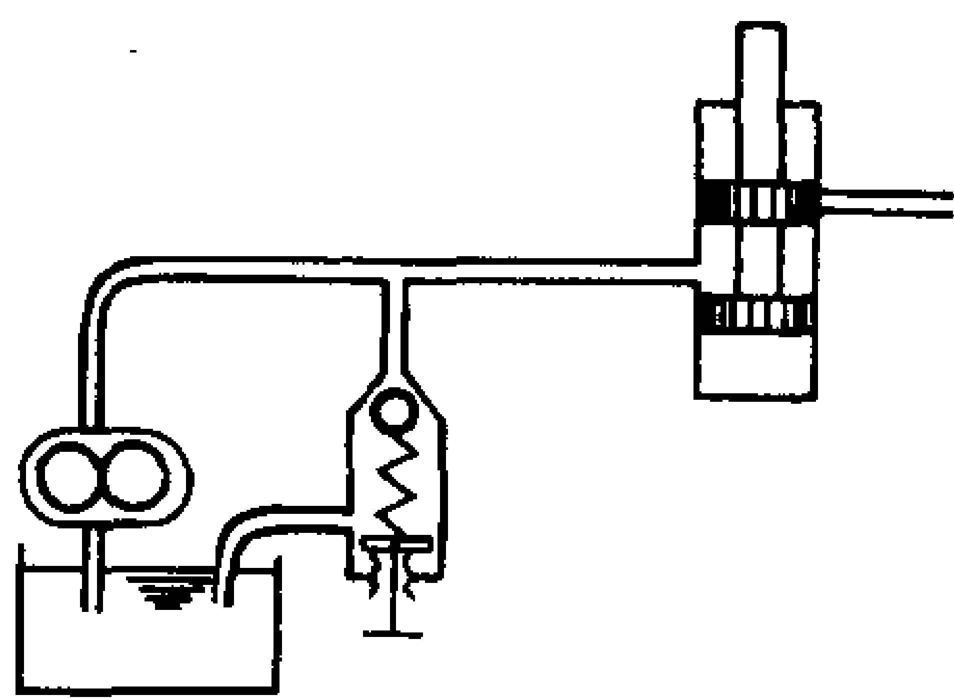


图 5－50　安全阀保护

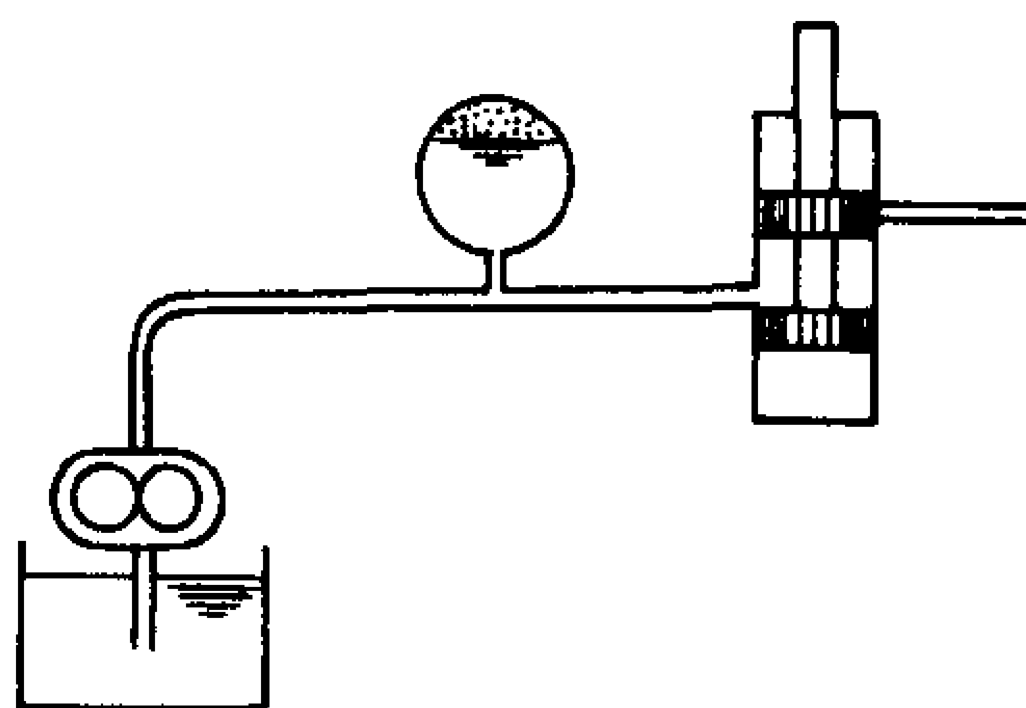


图 5－51　蓄能器保护

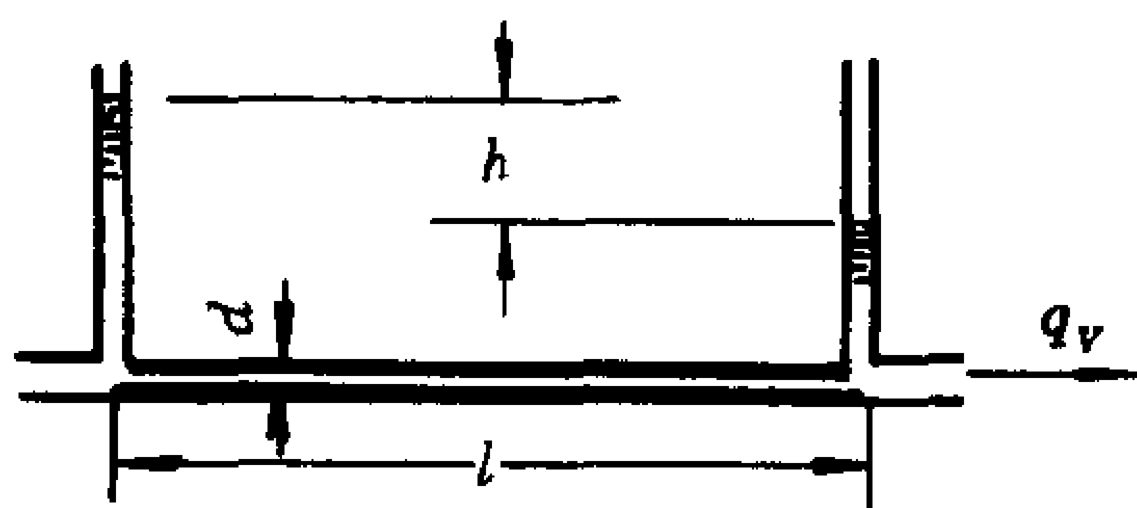
习　　题

5－1. 利用毛细管测定油液粘度，已知毛细管直径 $d=4$ mm，长度 $l=0.5$ m，流量 $q_V=1\ \text{cm}^3/\text{s}$ 时，测压管的落差 $h=15$ cm，试求油液的运动粘度。

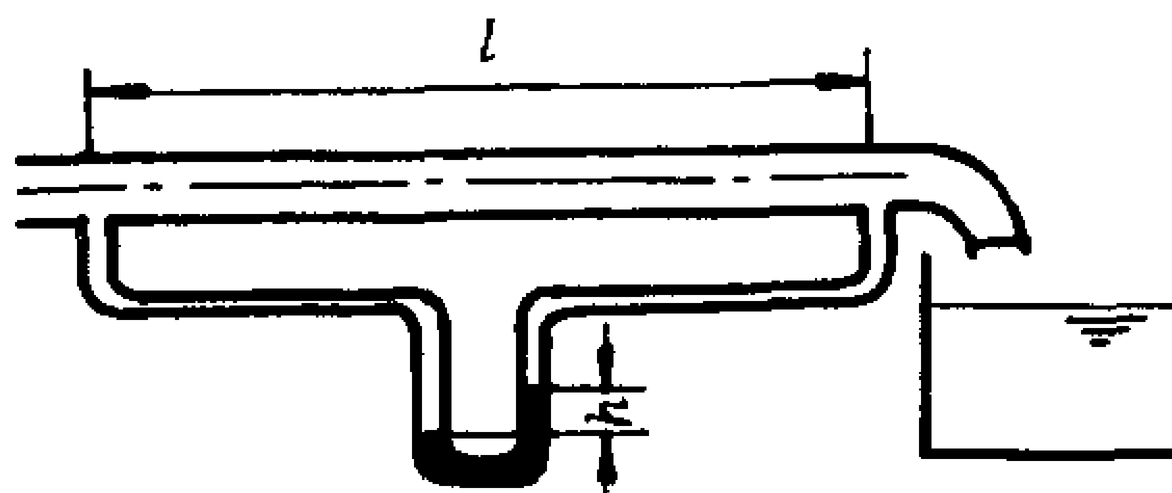
[答：$\nu=0.185\ \text{cm}^2/\text{s}$]

5－2. 管径 $d=5$ cm，管长 $l=6$ m 的水平管中有相对密度为 0.9 的油液流动，汞差压计读数为 $h=14.2$ cm，3min 内流出的油重为 5 000 N，试求油的动力粘度 μ。

[答：$\mu=0.149$ Pa·s]



题 5－1 图



题 5－2 图

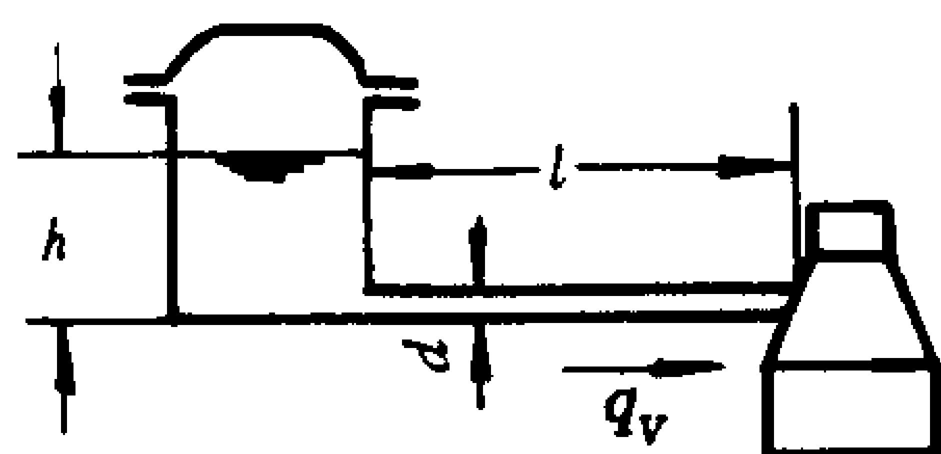
5－3. 用 $d=6$ mm，$l=5$ m 的油管向发动机供应润滑油，油的运动粘度为 $\nu=1.5\ \text{cm}^2/\text{s}$，流量为 $q_V=0.4\ \text{cm}^3/\text{s}$，润滑油管末端为大气压，试确定油面高度 h。

[答：$h=0.96$ m]

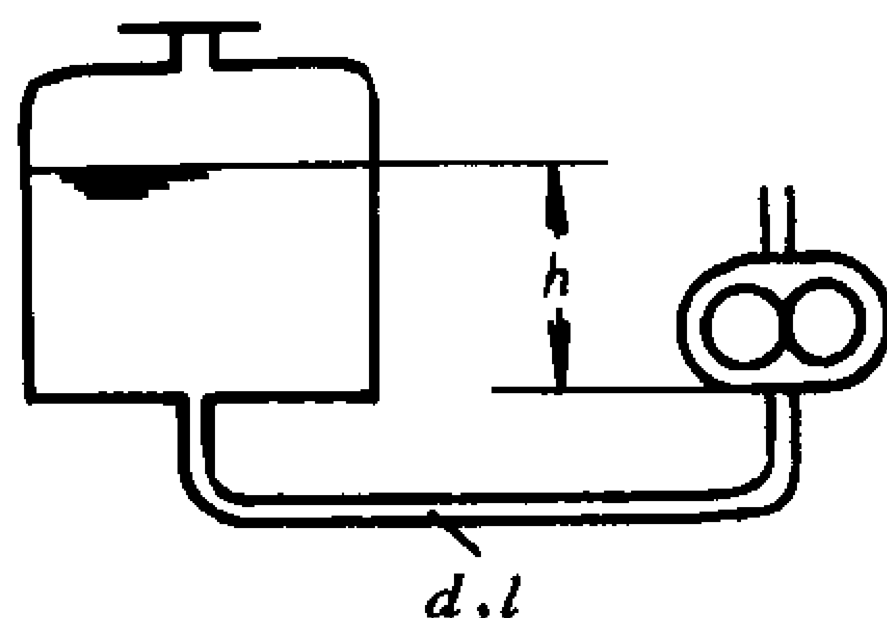
5－4. 润滑系统的油泵在温度 $t=20$ ℃时，供给 $q_V=60$ l/min 的机油，

机油运动粘度 $\nu=2\ cm^2/s$,相对密度为 0.9,机油管直径 $d=35$ mm,长度 $l=5$ m,泵入口断面在液面下 $h=1$ m,问泵入口断面上的压强是多少？如果油温升高为 80 ℃时,$\nu=0.2\ cm^2/s$,相对密度为 0.85,泵入口断面压强又是多少？

[答:$t=20$ ℃时,$p=-16$ kPa;$t=80$ ℃时,$p=5.7$ kPa]



题 5-3 图



题 5-4 图

5-5. 用效率 $\eta=0.8$,流量 $q_V=10$ l/s 的油泵,将密度 $\rho=900\ kg/m^3$ 的油液从开口油池输送到计示压强 $p=200$ kPa 的密封容器中。$h=20$ m,油管中总能量损失为 $h_f=7.35$ m,试求油泵功率。

[答:$P=5.52$ kW]

5-6. 相对密度为 0.85,动力粘度为 $0.01\times g$ Pa·s 的润滑油在 $d=3$ cm 的管道中流动,每米长管道的压强降落为 $0.15\times g\times 10^4$ Pa,g 为重力加速度,试求:

(1) 雷诺数及质量流量,

(2) 管壁上的切应力,

(3) 在 40 m 管道中流动所需的功率。

[答:$Re=1\ 096$,$q_m=152$ kg/min,$\tau_0=110.4$ Pa,$P=1\ 754$ W]

5-7. 水从直径 d、长 l 的铅垂管路流入大气中,水箱中液面高为 h,管路局部阻力可以忽略,其沿程阻力系数为 λ。

(1) 试求管路起始断面 A 处的压强,

(2) h 等于多少,可使 A 点压强为大气压？

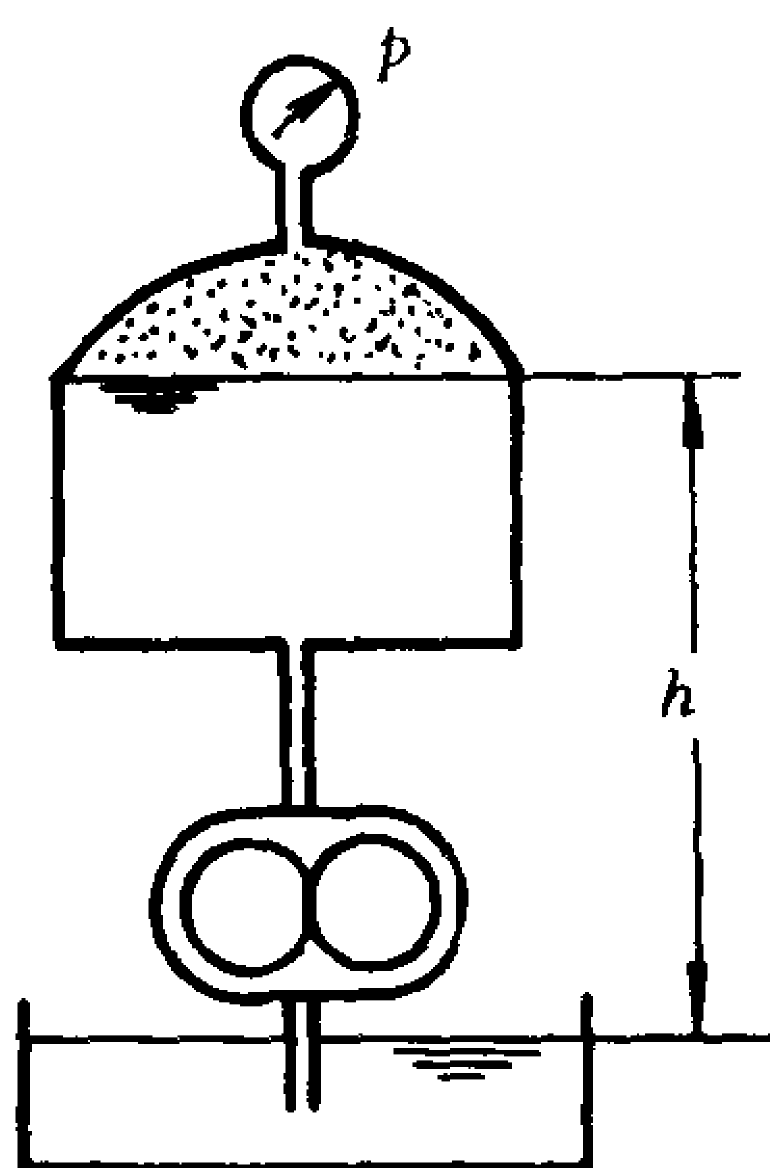
(3) 试求管中平均速度,

(4) h 等于多少,可使得管中流量与 l 无关？

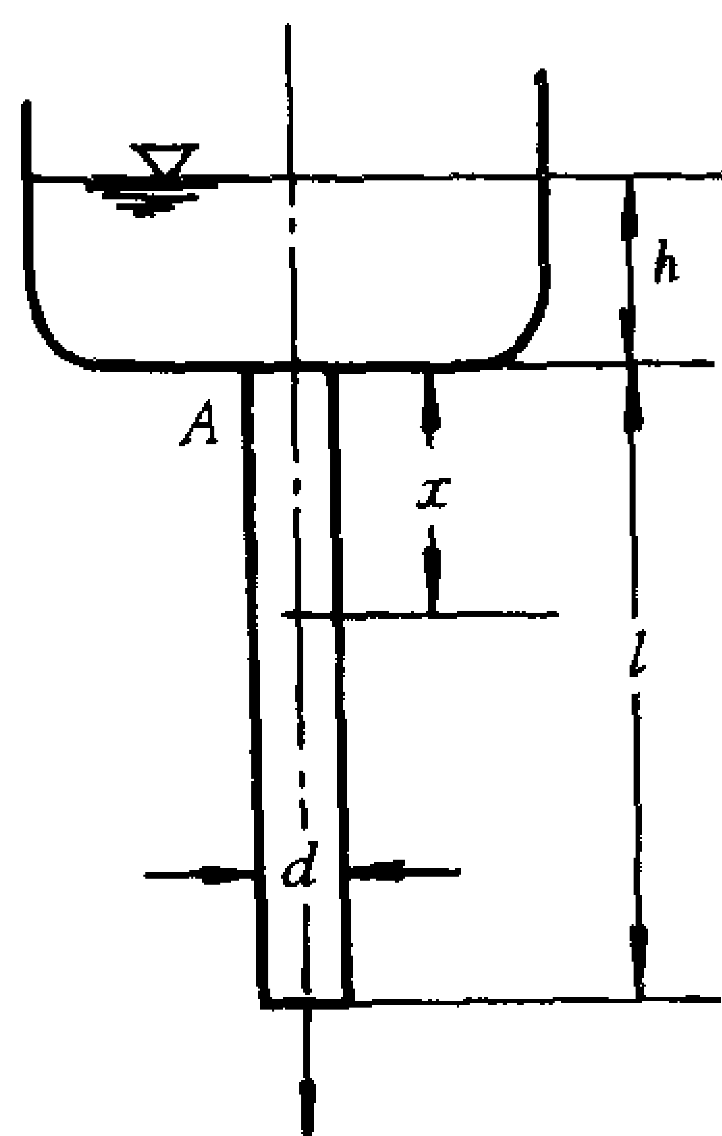
(5) 如果 $d=4$ cm,$l=5$ m,$h=1$ m,$\lambda=0.04$,试求 A 点(即 $x=0$)及 $x=1,2,3,4$ m 各处的压强。

$$\left[\text{答:(1) } p=\rho g l\frac{\lambda\frac{h}{d}-1}{\lambda\frac{l}{d}+1}\qquad (2)\ h=\frac{d}{\lambda}\qquad (3)\ v=\sqrt{\frac{2g(h+l)}{1+\lambda\frac{l}{d}}}\right.$$

$$\left.(4)\ h=\frac{d}{\lambda}\qquad (5)\ p_A=0,p_1=p_2=p_3=p_4=0\right]$$



题 5－5 图



题 5－7 图

5－8. 水在直径 $d=30$ cm 的管中流动呈湍流状态，测得在距壁面 3 cm 的 A 点处的水流速度 $v_x=2$ m/s，速度梯度 $\frac{dv_x}{dy}=10.5\ s^{-1}$，试求：

(1) A 点处的混合长度 L，

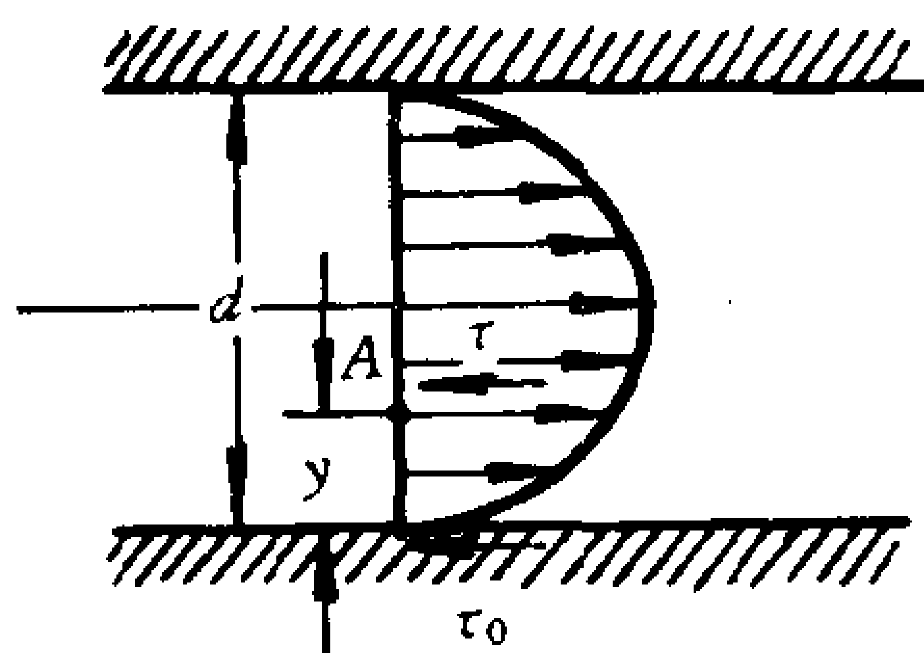
(2) A 点处的切应力 τ，

(3) 壁面上的切应力 τ_0，

(4) 如果沿程阻力系数 $\lambda=0.03$，试求管中平均流速 v 与流量 q_V。

[答：$L=1.07$ cm，$\tau=12.6$ Pa，$\tau_0=15.88$ Pa，$v=2.06$ m/s，$q_V=0.146$ m^3/s]

5－9. 运动粘度 $\nu=0.2\ cm^2/s$ 的油在圆管中流动的平均速度为 $v=1.5$ m/s，每 100 m 长度上的沿程损失为 40 cm，试求其沿程阻力系数与雷诺数的关系。



题 5－8 图

[答：$\lambda = 4.65 \times 10^{-7}\ Re$]

5－10. 半径 $R = 10$ cm 的输水管中的水流为湍流，已知轴心处最大速度为 $v_{max} = 2.5$ m/s，在 $y = 5$ cm 处的速度为 $v_x = 2$ m/s，混合长度系数 $k = 0.4$。试求管壁处的切应力 τ_0。

[答：$\tau_0 = 83.3$ Pa]

5－11. 相对密度 0.85，$\nu = 0.125\ \text{cm}^2/\text{s}$ 的油在粗糙度 $\Delta = 0.04$ mm 的无缝钢管中流动，管径 $d = 30$ cm，流量 $q_V = 0.1\ \text{m}^3/\text{s}$，试判断流动状态并求：

(1) 沿程阻力系数 λ；

(2) 粘性底层厚度 δ；

(3) 管壁上的切应力 τ_0。

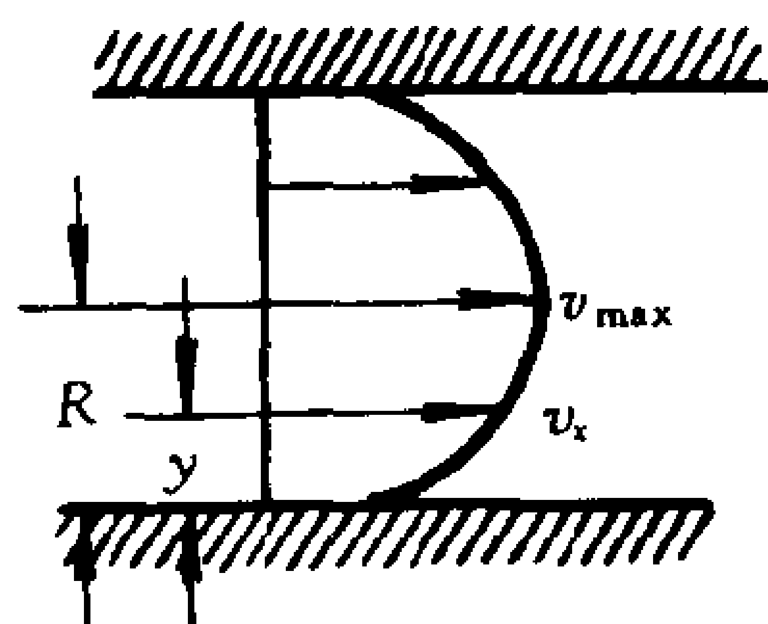
[答：$\lambda = 0.023, \delta = 1.9$ mm，$\tau_0 = 4.89$ Pa]

5－12. 圆管湍流的速度分布规律近似用七分之一定律表示：

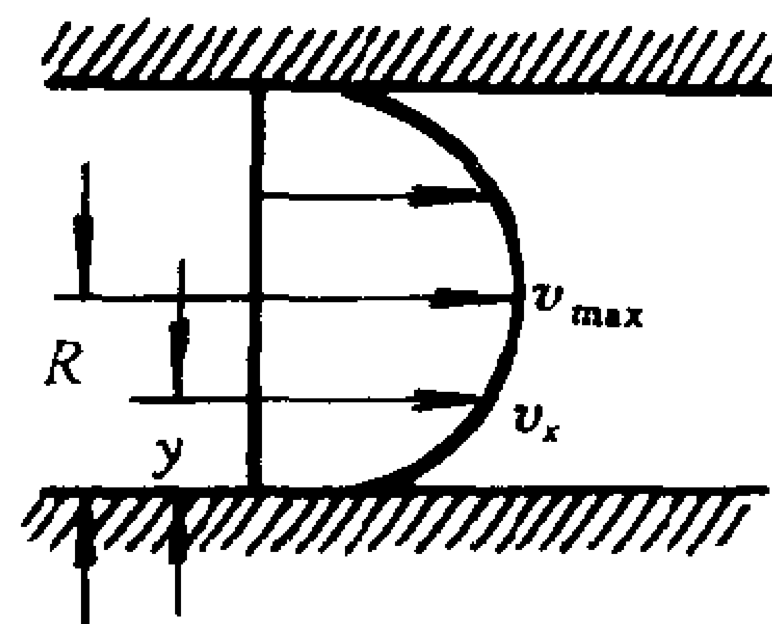
$$v_x = v_{max}\left(\frac{y}{R}\right)^{\frac{1}{7}}$$

式中 v_{max} 为管轴心的最大速度，

试求动能与动量修正系数。



题 5－10 图



题 5－12 图

[答:$\alpha=1.06,\beta=1.02$]

5-13. 试判断表中五种流动的流动状态,并求其沿程阻力系数。

流动类型	平均速度 v m/s	运动粘度 ν cm^2/s	直径 d mm	绝对粗糙度 Δ mm
铜管中的润滑油	0.2	1.5	20	0.001 5
铜管中的燃料油	0.8	0.02	10	0.001 5
铁管中的冷却水	2	0.000 5	25	0.19
钢管中的空气	60	0.15	55	0.003
钢管中的空气	11	0.15	400	0.6

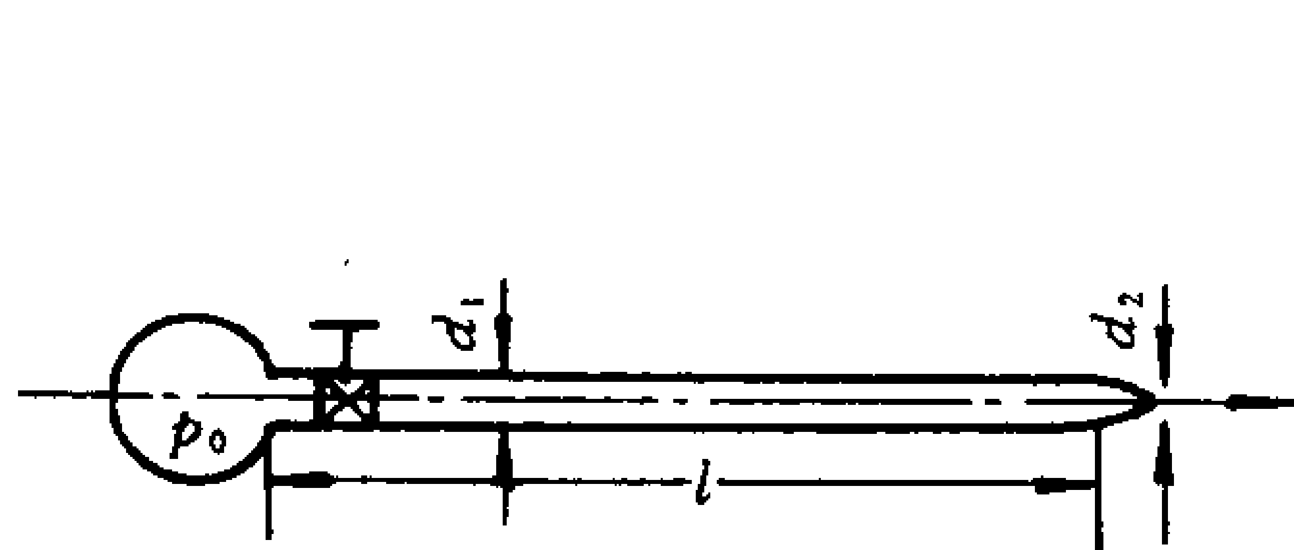
[答:层流　　2.4
光滑管湍流　　0.039 8
粗糙管湍流　　0.034 6
光滑管湍流　　0.015 2
湍流过渡区　　0.022 4]

5-14. 从压强为 $p_0=5.49\times10^5$ Pa 的水管处接出一个橡皮管,长为 $l=18$ m,直径 $d_1=1.2$ cm,橡皮管的沿程阻力系数 $\lambda=0.024$,阀门的局部阻力系数 $\zeta=7.5$,试求下列二种情况下的出口速度 v_2 及二种情况下的出口动能之比。

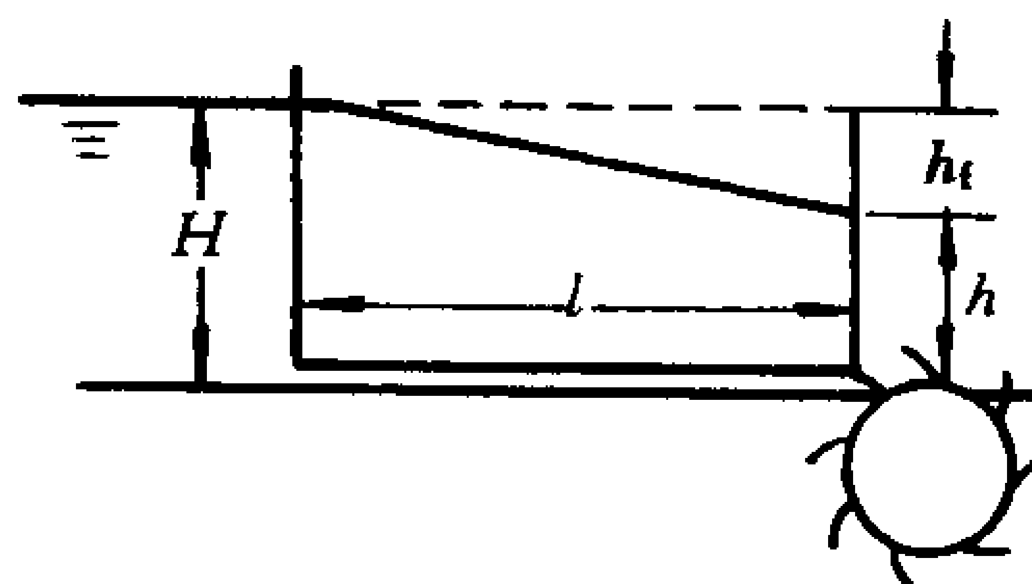
(1) 末端装有直径为 $d_2=0.3$ cm,阻力系数为 $\zeta=0.1$ 的喷嘴,

(2) 末端无喷嘴。

[答:(1)$v_2=29.44$ m/s,　(2) $v_2=4.97$ m/s,(3) 二者动能之比为 13]



题 5-14 图



题 5-15 图

5-15. 长管输送流体只计沿程损失,当 H、l 一定时,试证明在 $h_f=\frac{H}{3}$ 条件下,管路输送功率为最大。

已知 $H=127.4\ \text{m}$，$l=500\ \text{m}$，管路末端的可用水头为 $h=\dfrac{2}{3}H$，管路末端的可用功率为 1 000 kW，$\lambda=0.024$，试求管路的输送流量与管路直径。

$\left[\text{答：用}\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}v}=0\text{ 可证出 }h_f=\dfrac{H}{3}, q_V=1.2\ \text{m}^3/\text{s}, d=0.5\ \text{m}\right]$

5-16. 水平管路直径由 $d_1=10$ cm 突然扩大到 $d_2=15$ cm，水的流量 $q_V=2\ \text{m}^3/\text{min}$，

(1) 试求突然扩大的局部水头损失，

(2) 试求突然扩大前后的压强水头之差，

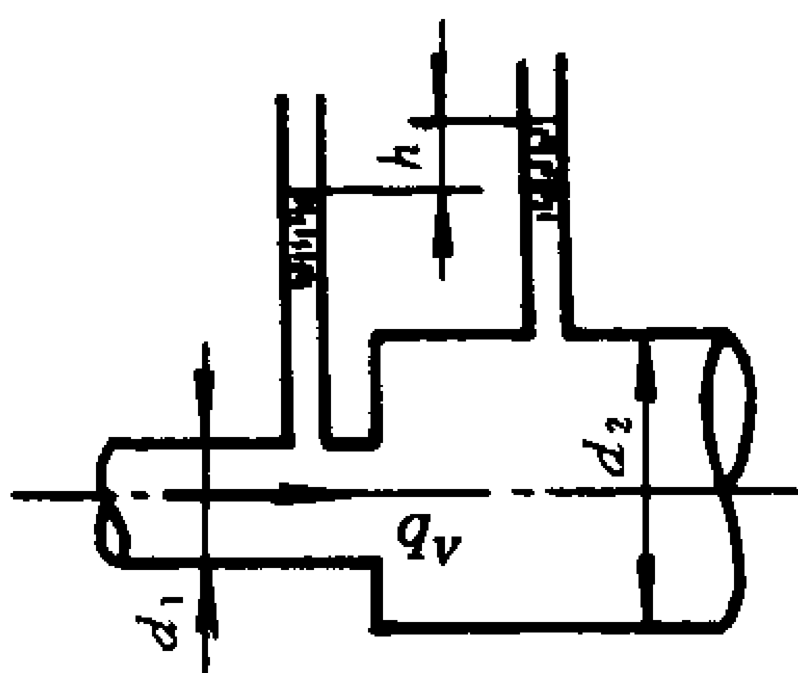
(3) 如果管道是逐渐扩大而忽略损失，试求逐渐扩大前后的压强水头之差。

$\left[\text{答：}h_f=0.284\ \text{m}, \dfrac{p_2-p_1}{\rho g}=0.455\ \text{m}, \dfrac{p_2-p_1}{\rho g}=0.74\ \text{m}\right]$

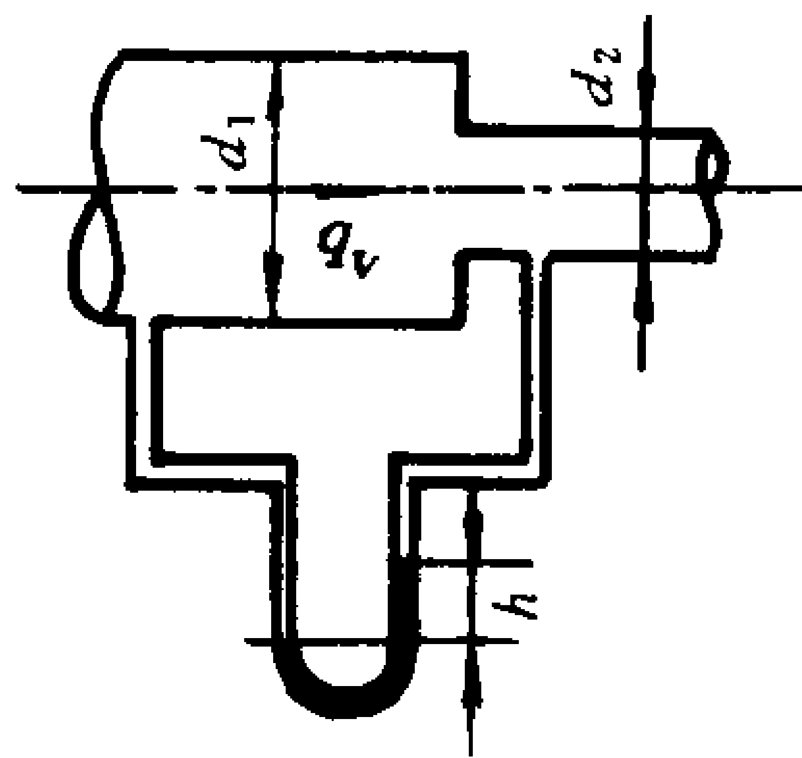
5-17. 水平管路直径由 $d_1=24$ cm 突然扩大为 $d_2=48$ cm，在突然扩大的前后各安装一测压管，读得局部阻力后的测压管比局部阻力前的测压管水柱高出 $h=1$ cm。

试求管中流量 q_V。

[答：$q_V=0.032\ 7\ \text{m}^3/\text{s}$]



题 5-17 图

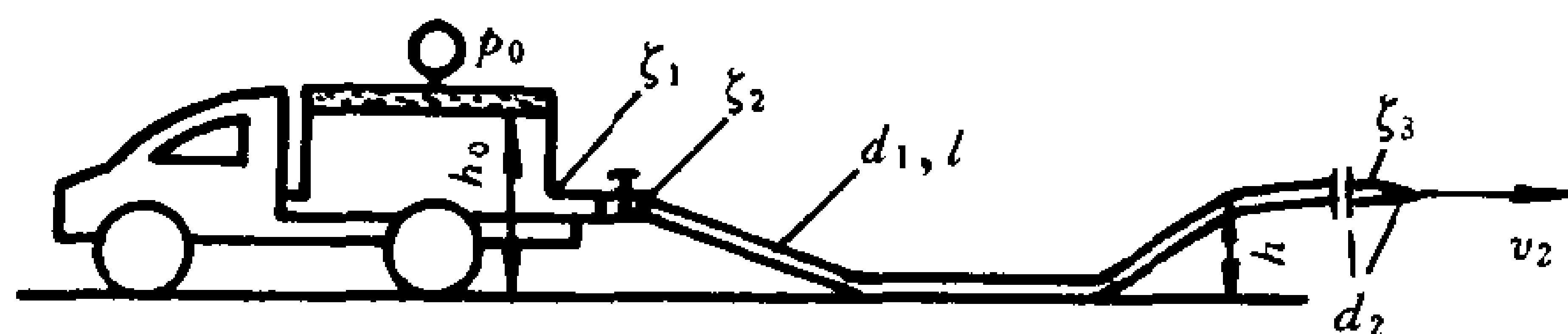


题 5-18 图

5-18. 水平突然缩小管路的 $d_1=15$ cm，$d_2=10$ cm，水的流量为 $q_V=2\ \text{m}^3/\text{min}$，用汞测压计测得 $h=8$ cm，试求突然缩小的水头损失。

[答：$h_f=0.268$ m 水柱]

5-19. 消防水龙带直径 $d_1=20$ mm，长 $l=20$ m，末端喷嘴直径 $d_2=10$ mm，入口损失 $\zeta_1=0.5$，阀门损失 $\zeta_2=3.5$，喷嘴 $\zeta_3=0.1$(相对于喷嘴出口速度)，沿程阻力系数 $\lambda=0.03$，水箱计示压强 $p_0=4\times10^5$ Pa，$h_0=3$ m，$h=1$ m。



题 5－19 图

试求喷嘴出口速度 v_2

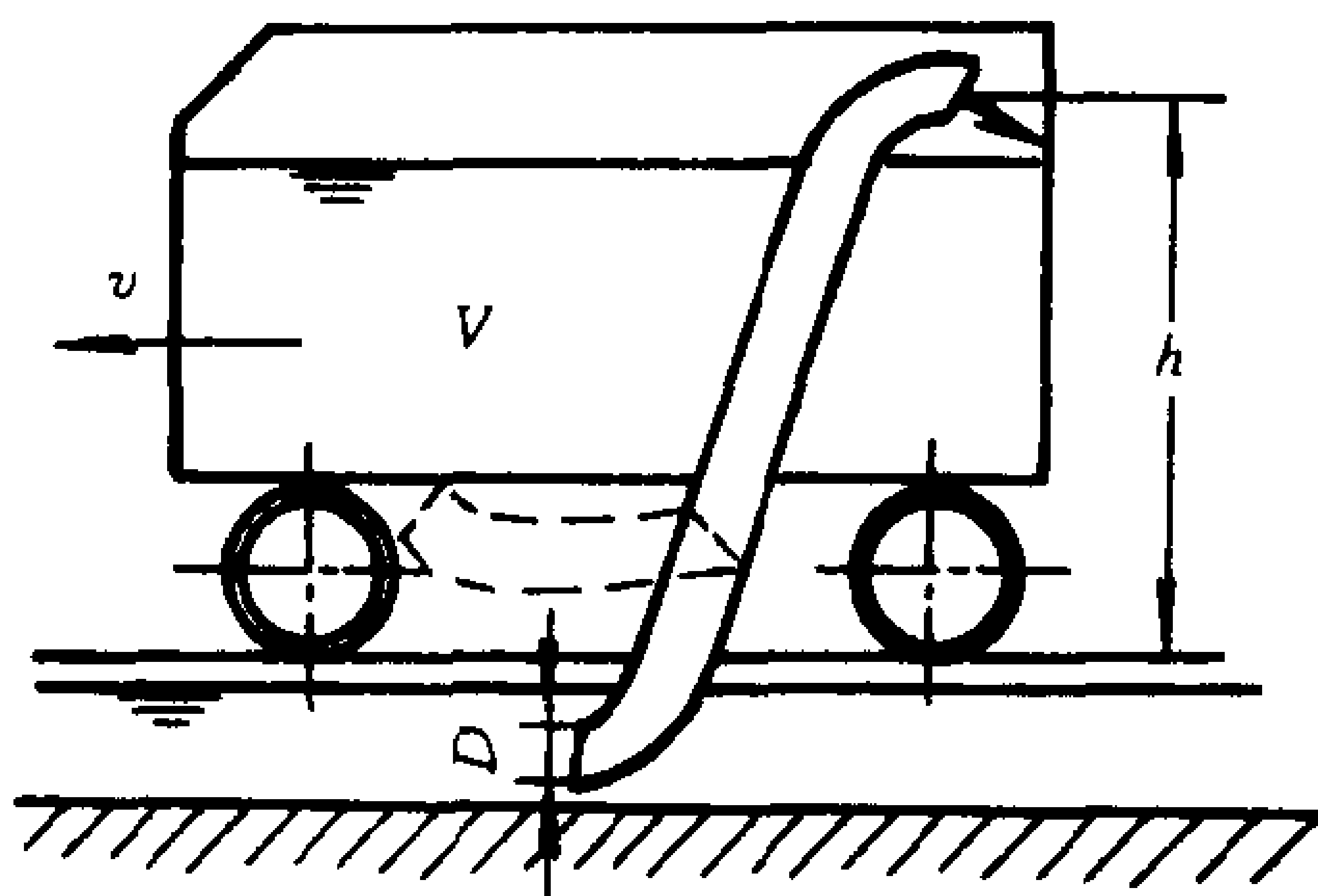
[答：$v_2 = 16$ m/s]

5－20. 机车行进中用水管自轨道间的水槽自动取水，管道直径 $D=200$ mm，水的升高高度 $h=3$ m，管道总阻力系数 $\zeta=2$。

(1) 当机车速度 $v=36$ km/h 时，为了盛满容积 $V=10$ m^3，需要多少时间？

(2) 在怎样的最小机车速度下，还可以取水？

[答：$t=86$ s，$v_{\min}=27.5$ km/h]



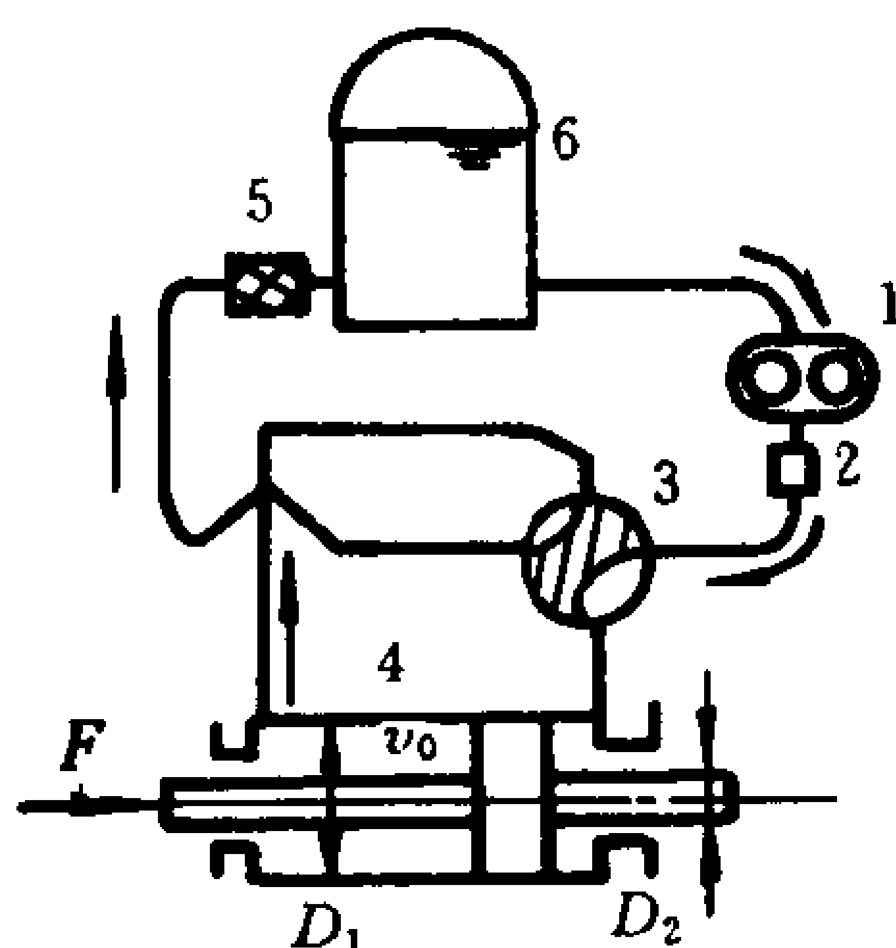
题 5－20 图

5－21. 齿轮泵 1 从油箱 6 中吸油，然后经过止逆阀 2、换向阀 3 进入油缸 4。再从油缸经换向阀 3 及滤油器 5 返回油箱。

已知油缸上的载荷 $F=5\ 000$ N，活塞向左移动时速度为 $v_0=0.15$ m/s，$D_1=50$ mm，$D_2=20$ mm，油液密度 $\rho=1\ 210$ kg/m^3，油液粘度 $\nu=1.2$ cm^2/s。

管路总长度 $l=11$ m，管径 $d=10$ mm，止逆阀、换向阀和滤油器的局部损失用管当量长度表示，则为 $\frac{l_e}{d}=50$、40、60，试求齿轮泵的功率。如果活塞反向时，负载 $F=1\ 000$ N，管路损失不变，试问齿轮泵的功率又是多少？

[答:正向 $P=1.2$ kW,反向 $P=0.6$ kW]

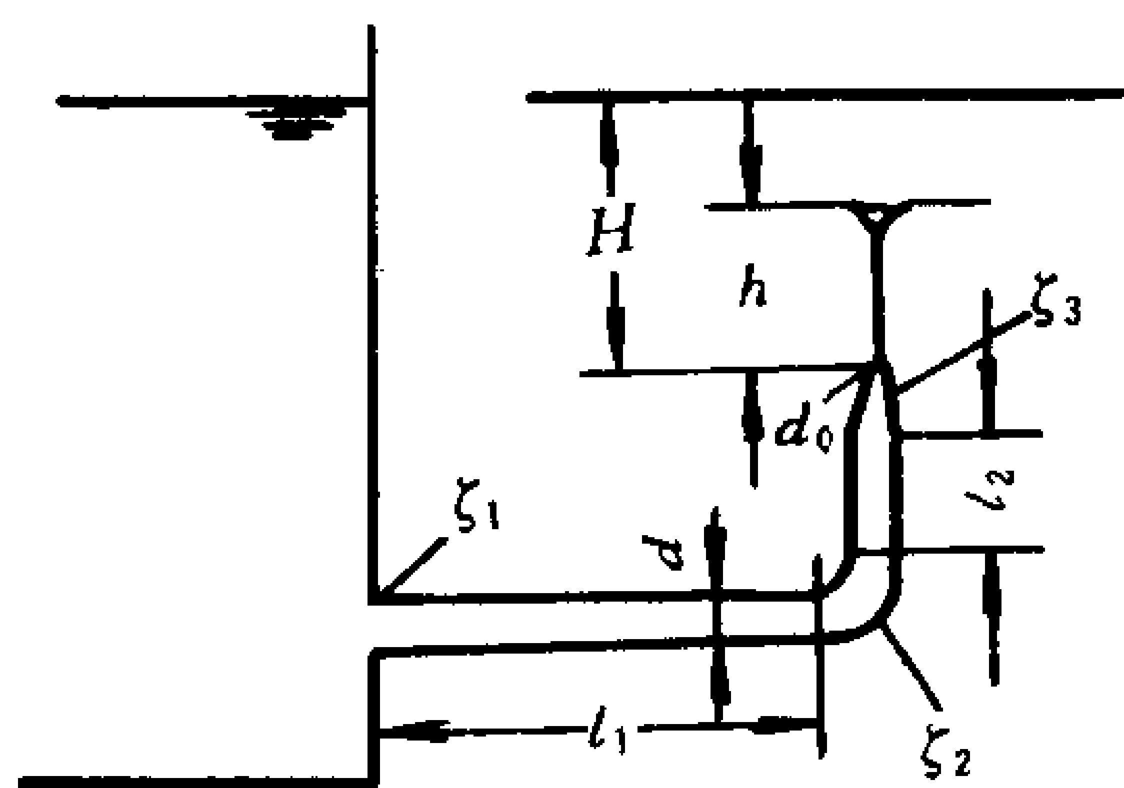


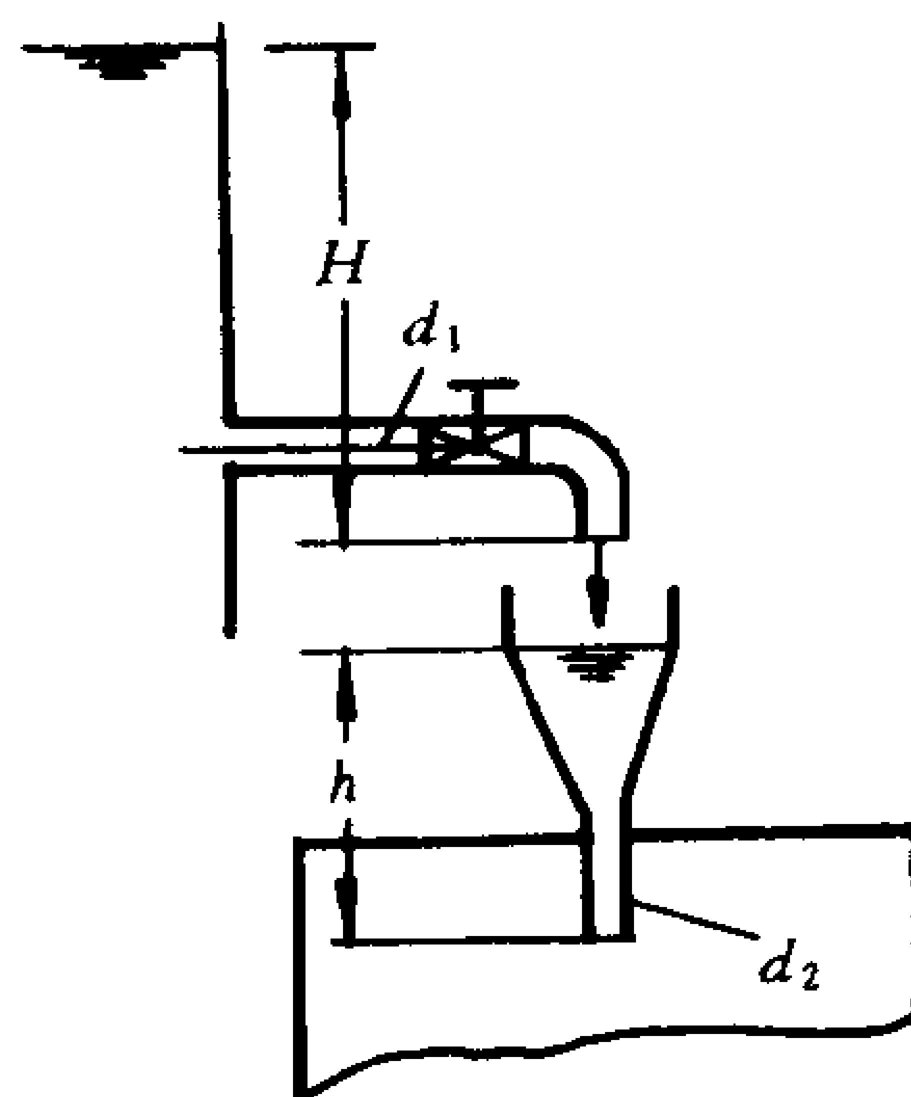
题 5－21 图

5－22. 管路直径 $d=25$ mm,$l_1=8$ m,$l_2=1$ m,$H=5$ m,喷嘴直径为 $d_0=10$ mm,弯头 $\zeta_2=0.1$,喷嘴 $\zeta_3=0.1$,$\lambda=0.03$。

试求喷水高度 h。

[答:$h=3.59$ m]





题 5－22 图　　　　题 5－23 图

5－23. 通过直径 $d_2=50$ mm、高 $h=400$ mm 且阻力系数 $\zeta=0.25$ 的漏斗,向油箱中充灌汽油。汽油从上部蓄油池经短管截门弯头而流入漏斗。短管直径 $d_1=30$ mm,截门阻力系数 $\zeta=8.5$,弯头阻力系数 $\zeta=0.8$,短管入口阻力系数 $\zeta=0.5$,不计沿程阻力。

试求油池中液面高度 H,以保证漏斗不向外溢流,并求此时进入油箱的

流量 q_V。

[答:$H=26.6$ m,$q_V=4.9$ l/s]

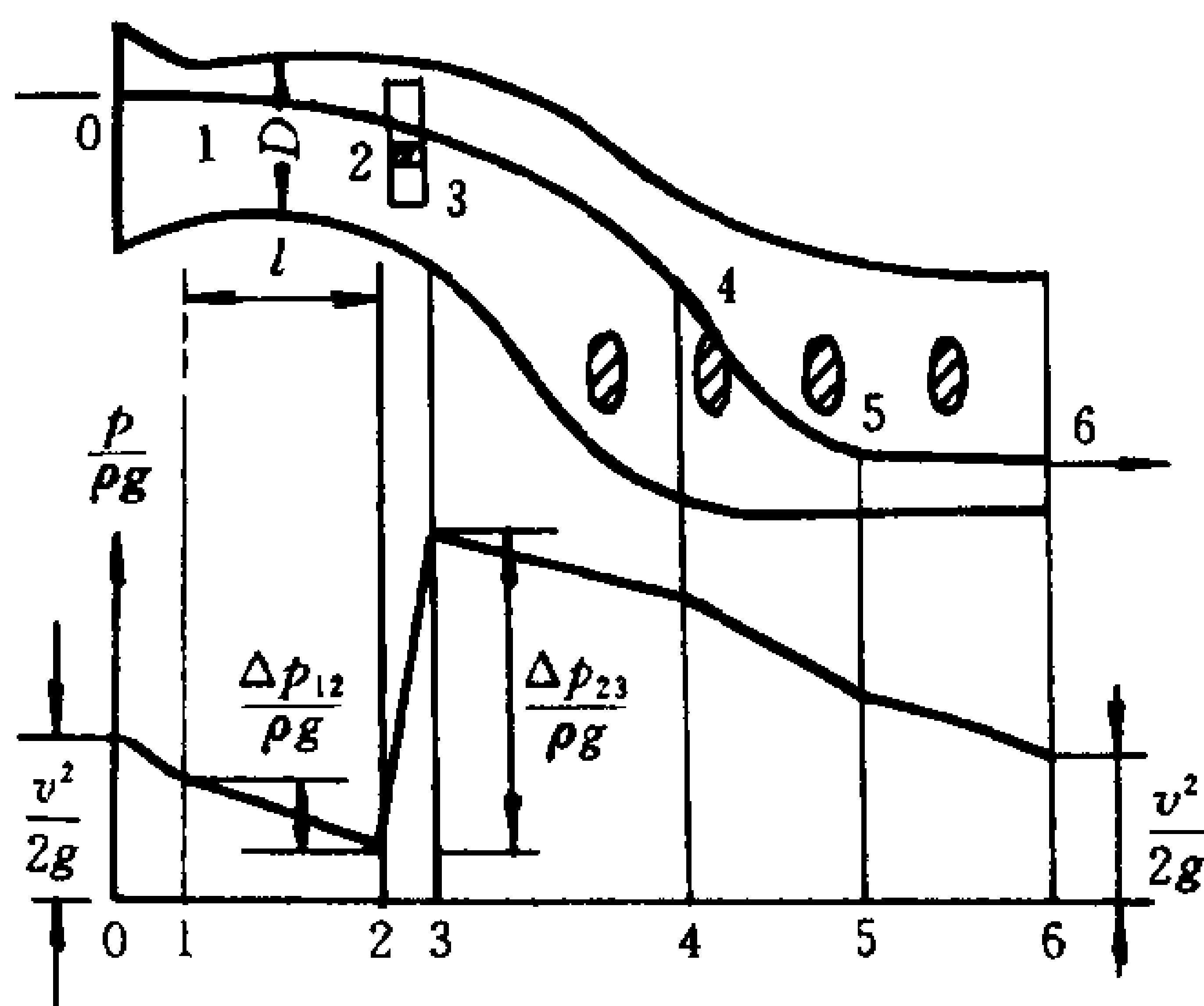
5-24. 风冷式四缸发动机的冷却气流如图所示,0~1 为进口段,1~2 为进气管段,2~3 为风扇增压段,3~4 为机前段,4~5 为冷却段,5~6 为机后段。整个气流的压强水头$\frac{p}{\rho g}$的变化如下部折线所示。

进口和出口处的气流速度相等。已知空气密度 $\rho=1.2$ kg/m^3,空气运动粘度 $\nu=1.5$ cm^2/s,空气流量 $q_V=1.94$ m^3/s。

(1) 如果进气管段1~2的直径为 $D=35$ cm,长度 $l=1$ m。绝对粗糙度 $\Delta=0.2$ mm,试确定进气管段中的气流速度 v,并确定其流动状态,求沿程损失$\frac{\Delta p_{12}}{\rho g}$。

(2) 如果各段的阻力系数分别为 $\zeta_{01}=0.5$,$\zeta_{34}=1.5$,$\zeta_{45}=6.5$,$\zeta_{56}=1.5$,试求风扇应提高的压强水头$\frac{\Delta p_{23}}{\rho g}$。

(3) 如果风扇效率为 $\eta=0.8$,试求风扇的消耗功率 P_{23}。



题 5-24 图

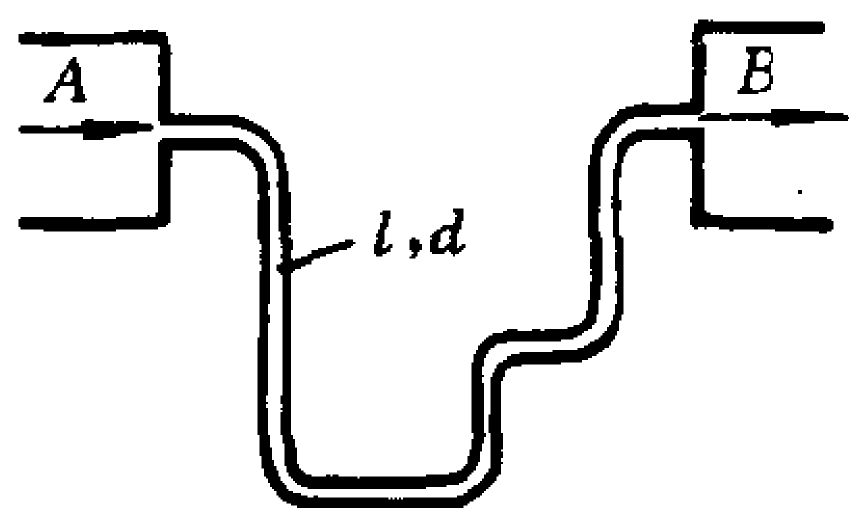
[答:(1) $v=20.2$ m/s,光滑管湍流,$\frac{\Delta p_{12}}{\rho g}=1.28$ m

(2) $\frac{\Delta p_{23}}{\rho g}=209.3$ m

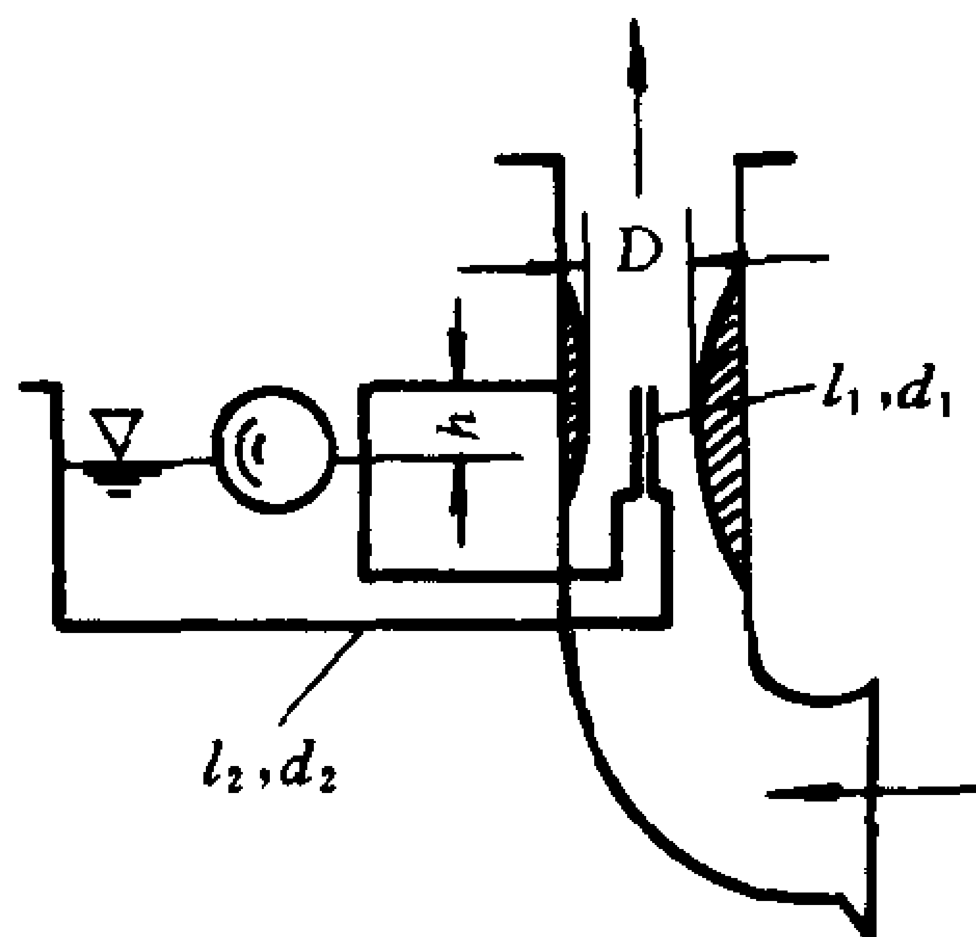
(3) $P_{23}=5.975$ kW]

5-25. AB 为发动机中的除尘管路。总长 $l=1.35$ m，管径 $d=35$ mm，管壁绝对粗糙度为 $\Delta=0.04$ mm，含尘空气的密度为 $\rho=1.025$ kg/m^3，运动粘度 $\nu=0.19$ cm^2/s，流量为 $q_V=0.017\,2$ m^3/s，六个弯头的中心线曲率半径 R 均为 17.5 cm，并考虑入口及出口损失，试求 p_A-p_B。

[答：$p_A-p_B=525$ Pa]



题 5-25 图



题 5-26 图

5-26. 在汽油机汽化器中，进气管吸入空气在喉部产生真空，故又将汽油从浮子室中吸出，经混合后进入汽缸。已知喷嘴直径 $d_1=1$ mm，喷嘴长度 $l_1=10$ mm，喉部直径 $D=16$ mm，喷嘴出口高出液面 $h=3$ mm，汽油密度 $\rho=750$ kg/m^3，汽油运动粘度 $\nu=0.008$ cm^2/s，空气密度 $\rho_a=1.2$ kg/m^3，汽油管直径 $d_2=10$ mm，汽油管长度 $l_2=100$ mm，进气管中相对于喉部气流速度 v_a 的总阻力系数为 $\zeta=0.3$，汽油质量流量为 $q_m=1$ g/s。试求

(1) 喉部的真空度 p_a-p；

(2) 喉部的空气流速 v_a；

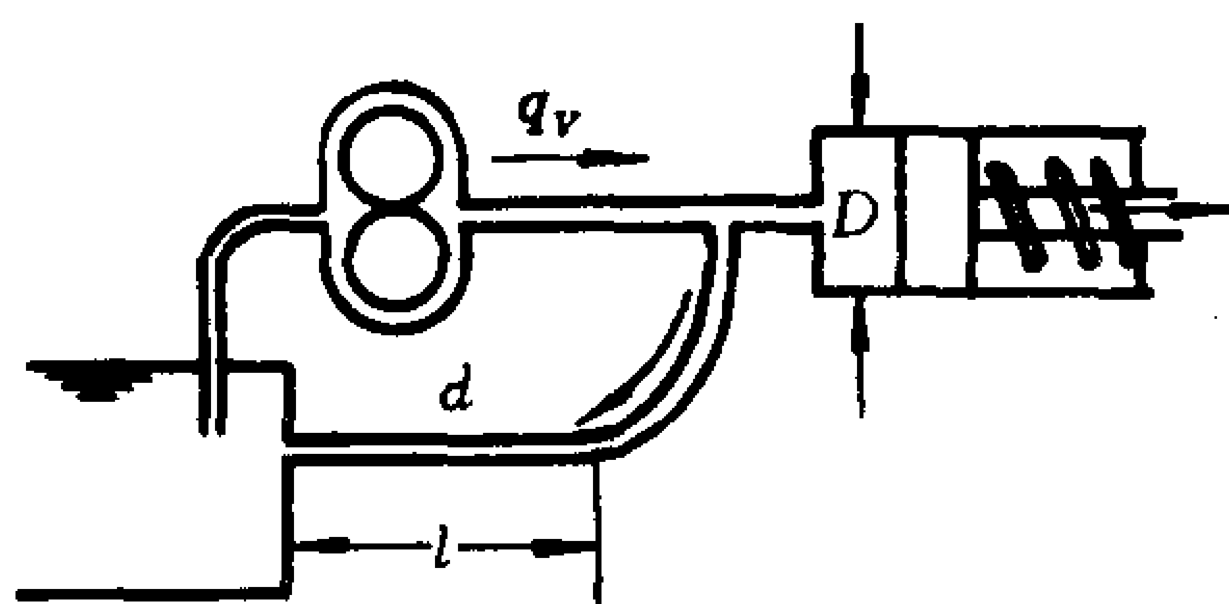
(3) 空气与汽油的混合比 $k=\dfrac{q_{ma}}{q_m}$。

[答：$p_a-p=1\,978$ Pa，$v_a=50$ m/s，$k=12.2$]

5-27. 流量为 $q_V=0.3$ l/s 的油泵与 $l=0.7$ m 的细管组成一个循环油路，借以保持直径为 $D=30$ mm 的调速阀位置保持恒定。已知油的动力粘度 $\mu=0.03$ Pa·s，密度 $\rho=900$ kg/m^3，调速阀上的弹簧预压缩量 $s=6$ mm，弹簧刚度为 $k=8$ N/mm，为使调速阀恒定，细管直径 d 应为多少？

管路中其他阻力忽略不计，只计细管中的沿程阻力。

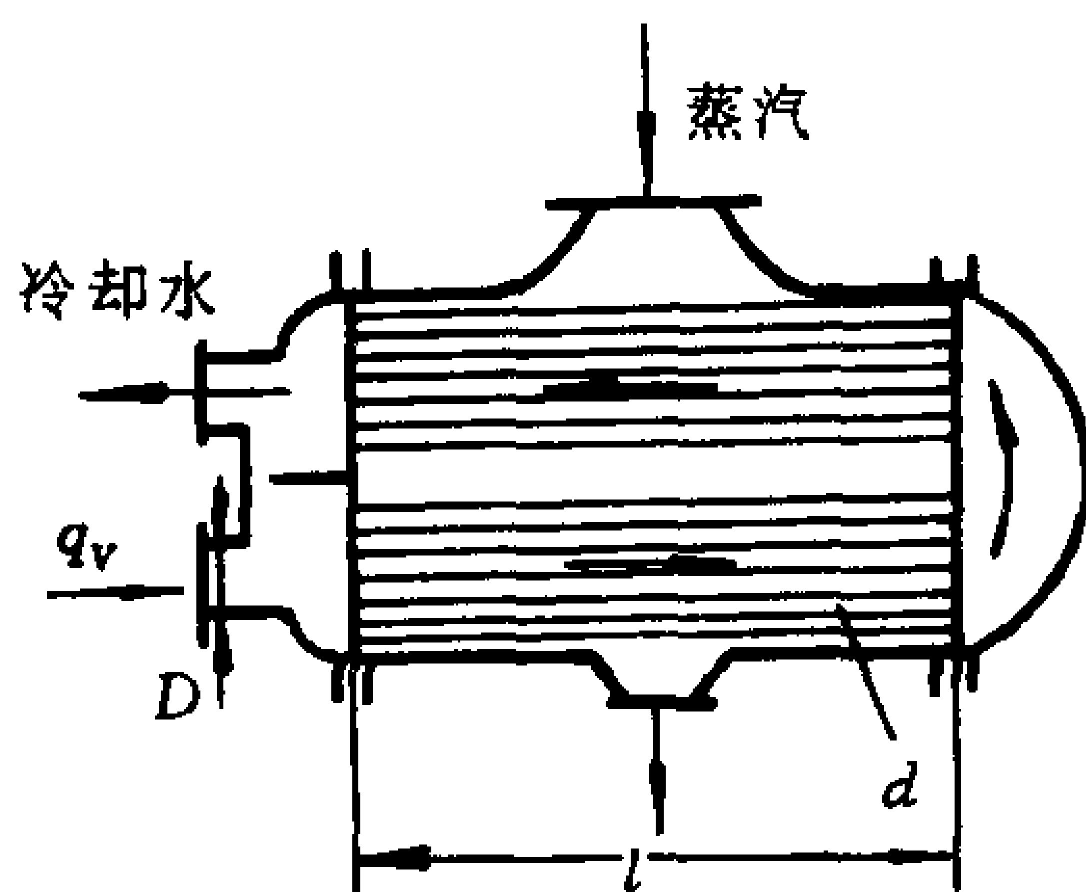
[答：$d=7.8$ mm]



题 5-27 图

5-28. 蒸汽机冷却水经过两个串联的区段，每个区段由 250 根并联的黄铜管组成；每根黄铜管长为 $l=5$ m，$d=16$ mm，入口和出口的局部阻力系数为 0.5 和 1，并考虑沿程损失。水的运动粘度为 $\nu=0.009\ \mathrm{cm^2/s}$，水的流量 $q_V=360\ \mathrm{m^3/h}$，试求水头损失。

[答：$h_f=3.54$ m]

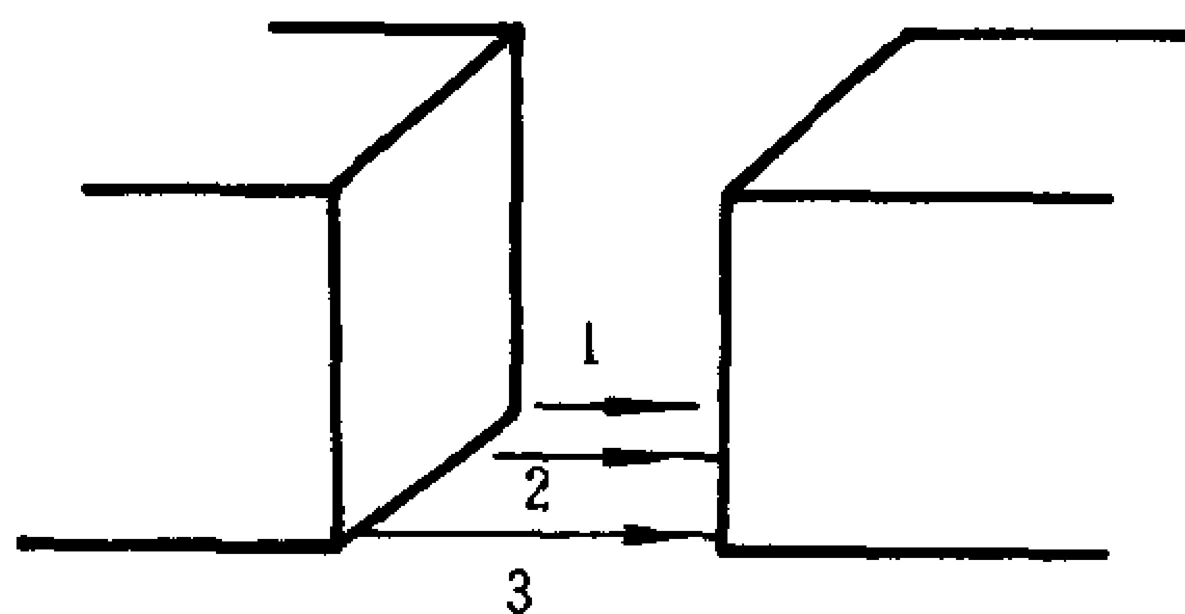


题 5-28 图

5-29. 水泵站用一根管径为 60 cm 的输水管时，沿程损失水头为 27 m。为了降低水头损失，取另一根同长度的管道与之并联，并联后水头损失降为 9.6 m，假定两管的沿程阻力系数相同，两种情况下的总流量不变，试求新加的管道的直径是多少？

[答：$d=51.3$ cm]

5-30. 两水箱之间用三根不同直径、相同长度的水平管道 1、2、3 相连接。已知 $d_1=10$ cm，$d_2=20$ cm，



题 5-30 图

$d_3=30$ cm, $q_{V1}=0.1\ \mathrm{m^3/s}$,三管沿程阻力系数相等,试求 q_{V2}、q_{V3}。

[答:$q_{V2}=0.566\ \mathrm{m^3/s}$, $q_{V3}=1.54\ \mathrm{m^3/s}$]

5-31. 两根长度均为 250 m 的管道,其直径分别为 10 cm 和 20 cm。通过管道的总流量是 $0.08\ \mathrm{m^3/s}$,试求两管串联或并联时的水头损失。忽略局部阻力,沿程阻力系数设为 $\lambda=0.04$。

[答:串联 $h_f=545.3$ m,并联 $h_f=11.93$ m]

5-32. 用一根等径直管输送液体。如果流量不变、管长不变、液体粘度不变,只将管道直径减小一半,试问在层流、湍流平方阻力区两种情况下,其压强损失比原来各增大多少倍?

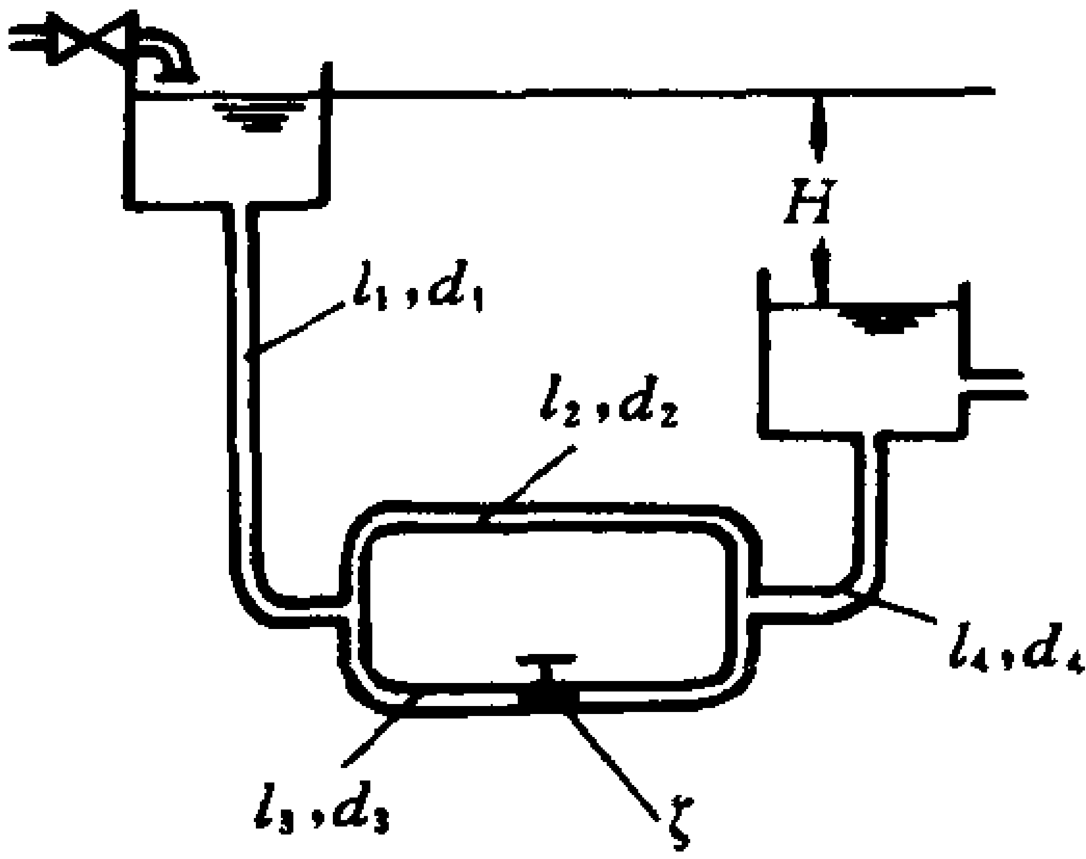
[答:层流时增大 16 倍,湍流平方阻力区时增大 32 倍]

5-33. 两水池的水位差 $H=24$ m, $l_1=l_2=l_3=l_4=100$ m, $d_1=d_2=d_4=100$ mm, $d_3=200$ mm,沿程阻力系数 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_4=0.025$, $\lambda_3=0.02$,除阀门外,其他局部阻力忽略。

(1) 阀门局部阻力系数 $\zeta=30$,试求管路中的流量,

(2) 如果阀门关闭,求管路流量。

[答:(1) $q_V=23.75$ l/s, (2) $q_V=19.6$ l/s]



题 5-33 图

5-34. 水管系统如图所示,各管段的长度、直径及沿程阻力系数如表所示。

管　段	l/m	d/m	λ
A_1B	100	0.5	0.022
A_2B	100	0.5	0.022
BC	300	0.75	0.020
CD	500	0.3	0.024

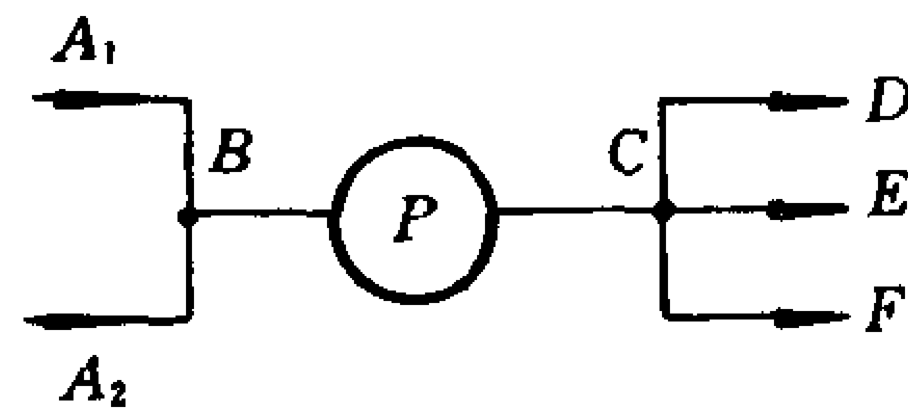
续表

管　段	l/m	d/m	λ
CE	400	0.25	0.024
CF	500	0.3	0.024

D、E、F 三点通大气，其标高相同，均在入口 A_1、A_2 之上 100 m。A_1B、A_2B 中平均流速皆为 $v=2.5$ m/s，泵的效率 $\eta=0.83$。

试求泵的流量、泵前后的压强差、泵的消耗功率。

[答：$q_V=0.98$ m^3/s，$\Delta p=15.4\times10^5$ Pa，$P=1\ 822$ kW]

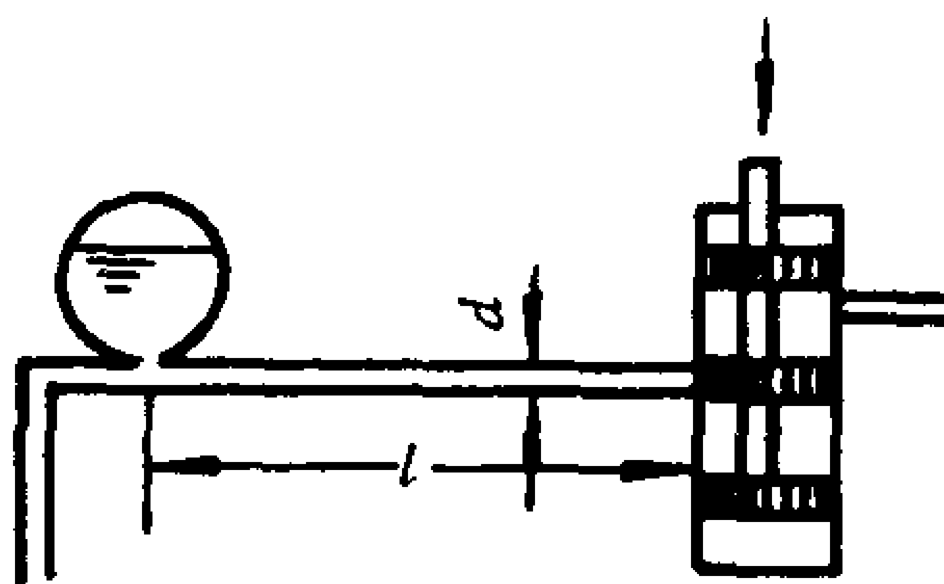


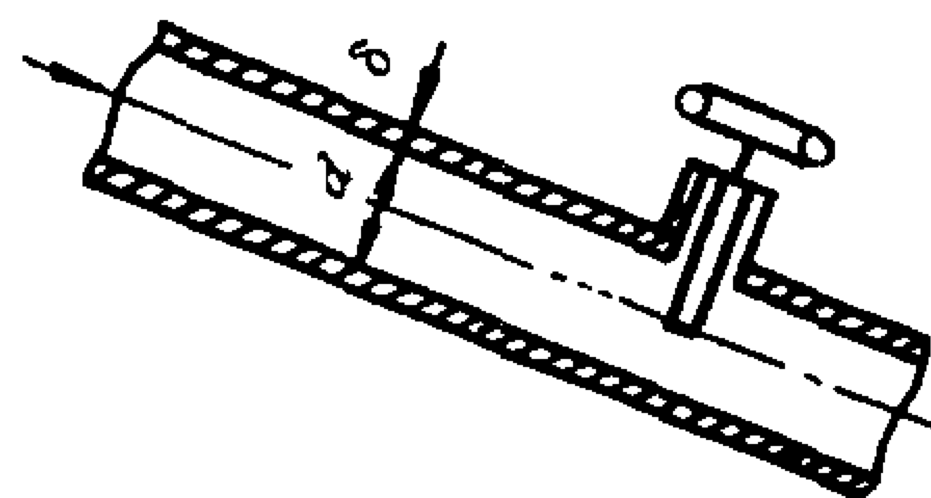
题 5－34 图

5－35. 液压滑阀在电磁铁的操纵下用 $t=0.02$ s 将油路切断，试求水击波传播速度与水击压强。

已知 $l=2$ m，$d=10$ mm，管壁厚度 $\delta=1$ mm，油的密度 $\rho=900$ kg/m^3，油的体积模量 $K=1.33\times10^9$ Pa；钢管弹性模量 $E=220\times10^9$ Pa，油的运动速度 $v=5$ m/s。

[答：$c=1\ 180$ m/s，$\Delta p=900$ kPa]





题 5－35 图　　题 5－36 图

5－36. 水电站引水钢管直径 $d=200$ mm，壁厚 $\delta=10$ mm，当水流速度 $v=2$ m/s 时阀门前的压强为 1 000 kPa。试问当阀门突然关闭时，管壁中的应力能比原来增大多少倍？已知：

水的体积模量　$K=2\times10^9$ Pa，

钢的弹性模量　$E=200\times10^9$ Pa。

[答：3.58 倍]

第六章 孔口出流

流体经过孔口出流是一个有广泛应用的实际问题。大如水利工程上的闸孔，小如粘度计上的针孔，孔口出流在许多领域中都可见到。例如水力采煤用的水枪，消防用的龙头，汽油机中的汽化器，柴油机中的喷嘴，火炮中的驻退机，车辆中的减震器，等等。机械制造的液压技术中换向阀、减压阀、节流阀、溢流阀等处都是孔口出流，就是在自动控制的喷嘴挡板、阻尼器等处也同样会遇到孔口出流的问题。

本章讨论液体孔口出流中的主要概念、分析影响孔口出流性能的几个系数(流速系数、流量系数、收缩系数和阻力系数)，最后再简单介绍节流汽穴和变水头孔口出流问题。至于气体孔口与喷嘴的出流问题则适于在第八章中论述。

§6－1 薄壁孔口出流

如图6－1所示，当$\frac{l}{d}\leqslant 2$时一般称为薄壁孔口。

一、孔口出流公式

液体在压强差$\Delta p = p_1 - p_2$的作用下经过薄壁孔口出流时，由于流线不能突然折转，故从孔口流出后形成一个流束直径最小的收缩断面$c-c$，收缩断面的面积A_c与孔口断面面积A之比称为孔口的收缩系数，用C_c表示，则

$$C_c = \frac{A_c}{A} \tag{6-1}$$

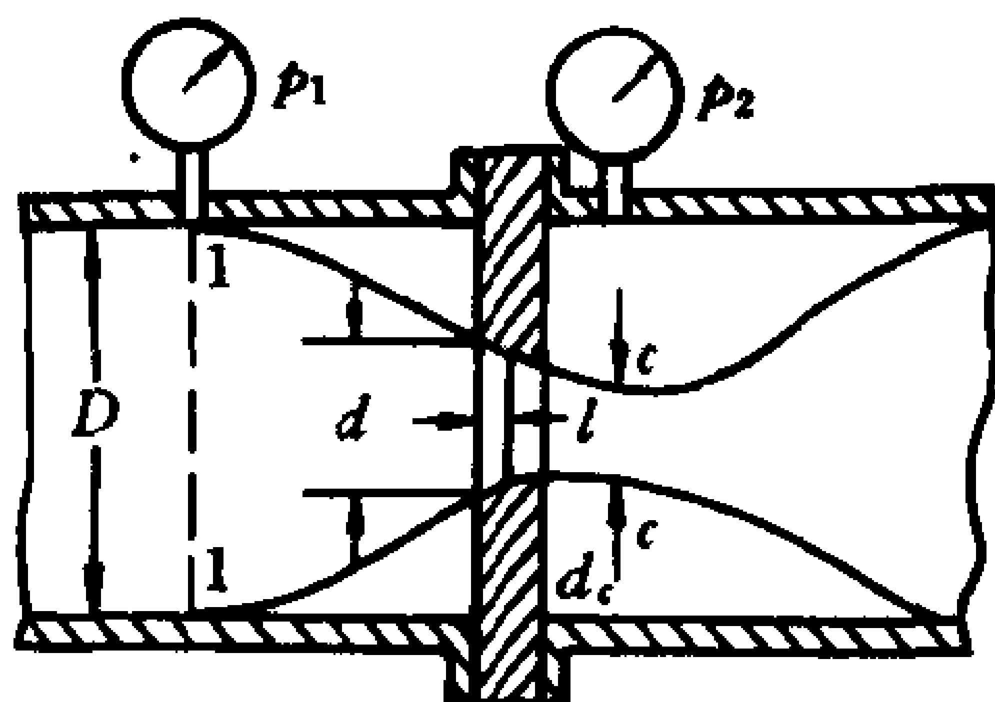


图 6－1　薄壁孔口

对图示的 1－1 和 $c-c$ 断面列伯努利方程式，令 $\alpha=1$，则

$$\frac{p_1}{\rho g}+\frac{v_1^2}{2g}=\frac{p_c}{\rho g}+\frac{v_c^2}{2g}+\zeta\frac{v_c^2}{2g}$$

因为

$$v_1=v_c\frac{A_c}{A_1}=v_c\frac{C_c d^2}{D^2},\ p_c\approx p_2$$

所以

$$\frac{p_1-p_2}{\rho g}=\left[1+\zeta-C_c^2\left(\frac{d}{D}\right)^4\right]\frac{v_c^2}{2g}$$

由此可解出

$$v_c=\frac{1}{\sqrt{1+\zeta-C_c^2\left(\frac{d}{D}\right)^4}}\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} \tag{6-2}$$

如果孔口直径 d 远小于管道直径 D，则称为小孔口，其 $\left(\frac{d}{D}\right)^4\approx 0$，于是可得小孔口出流速度为

$$v_c=\frac{1}{\sqrt{1+\zeta}}\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}=C_v\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} \tag{6-3}$$

式中

$$C_v=\frac{1}{\sqrt{1+\zeta}} \tag{6-4}$$

称为孔口的流速系数。

经过孔口出流的流量

$$q_V = A_c v_c = C_c A v_c = C_c C_v A\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} = C_q A\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} \qquad (6-5)$$

式中

$$C_q = C_c C_v = \frac{C_c}{\sqrt{1+\zeta}} \qquad (6-6)$$

称为孔口的流量系数。

(6－3)与(6－5)式就是计算孔口出流速度和流量的公式。如果不是在压强差 Δp 而是在水位差 $H_1 - H_2$ 或是在水头 H 作用下的孔口出流，则公式中的 $\frac{\Delta p}{\rho}$ 应当换成 $g(H_1 - H_2)$ 或 gH，于是可写出重力作用下的孔口出流公式为

$$\left.\begin{aligned} v_c &= C_v\sqrt{2g(H_1 - H_2)} \\ q_V &= C_q A\sqrt{2g(H_1 - H_2)} \end{aligned}\right\} \qquad (6-7)$$

或

$$\left.\begin{aligned} v_c &= C_v\sqrt{2gH} \\ q_V &= C_q A\sqrt{2gH} \end{aligned}\right\} \qquad (6-8)$$

下面讨论一下公式中影响孔口出流性能的系数。

二、孔口出流系数

孔口出流性能的主要标志是它的流速系数、流量系数、收缩系数与阻力系数。这些统称为孔口的出流系数。

1. 流速系数

从公式(6－3)来看，如果经孔口流动没有能量损失，孔口的阻力系数 $\zeta=0$，则孔口的理想流速应该是

$$v_T = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} = \sqrt{2gH} \qquad (6-9)$$

于是

$$C_v = \frac{v_c}{v_T} = \frac{v_c}{\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}} = \frac{v_c}{\sqrt{2gH}} \qquad (6-10)$$

这说明流速系数的物理意义就是实际流速 v_c 与理想流速 v_T

之比，阻力系数越大，则实际流速越小，其流速系数也就越小。流速系数可以用下述方法测定。

如图 6-2，孔口出流射入大气后即成为平抛运动，将 Oxy 坐标原点取在收缩断面上，则据平抛运动公式可得

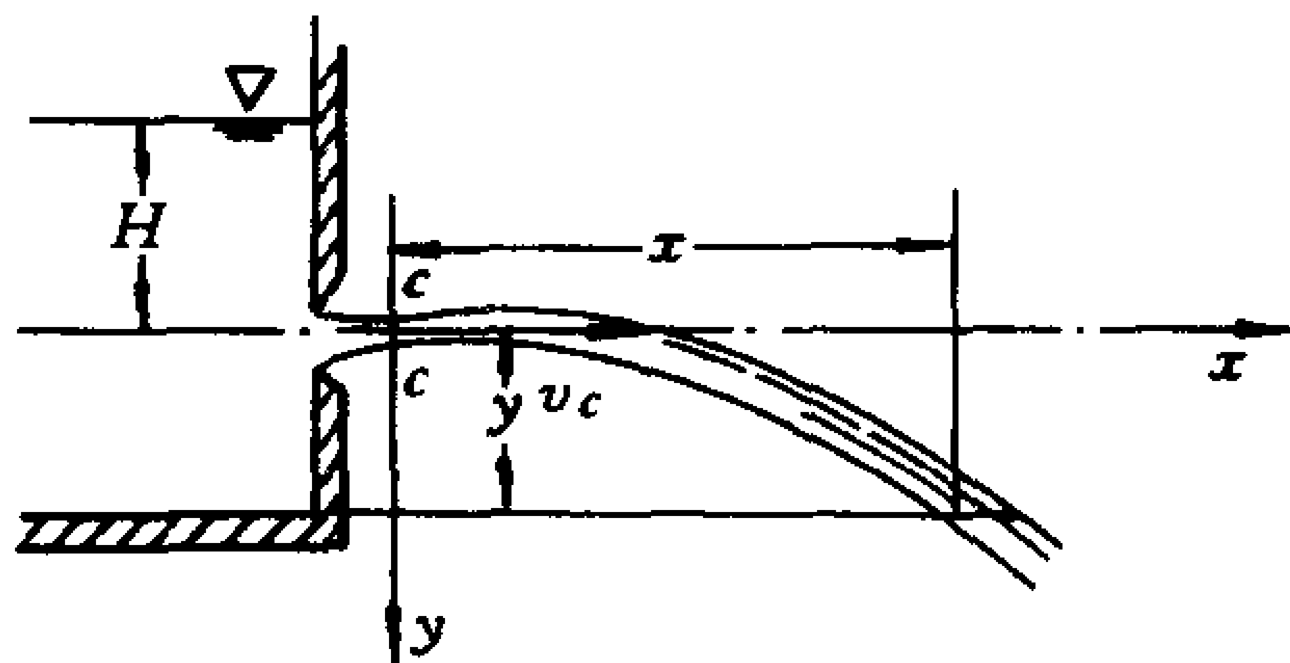


图 6-2　流速系数的测定

$$\left.\begin{aligned} x &= v_c t \\ y &= \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}\right\} \tag{6-11}$$

消去 t，可得 $v_c = x\sqrt{\dfrac{g}{2y}}$，代入(6-10)式中，则

$$C_v = \frac{x}{2}\sqrt{\frac{1}{Hy}} \tag{6-12}$$

通过对 H、x、y 的测定，即可得出流速系数的实验数值。

阿里特苏里将薄壁小孔口的实验结果表示成如图 6-3 所示的曲线形式，曲线的横坐标是用理想流速 $v_T = \sqrt{2gH}$ 表示的所谓孔口雷诺数

$$Re = \frac{v_T d}{\nu} = \frac{\sqrt{2gH}\cdot d}{\nu}$$

从图上可以看到当 $Re \geqslant 10^5$ 时 $C_v = 0.97$。

2. 流量系数

从(6-5)式得

$$C_q = \frac{q_V}{A\sqrt{\dfrac{2\Delta p}{\rho}}} = \frac{q_V}{A\sqrt{2gH}} = \frac{q_V}{Av_T} = \frac{q_V}{q_T} \tag{6-13}$$

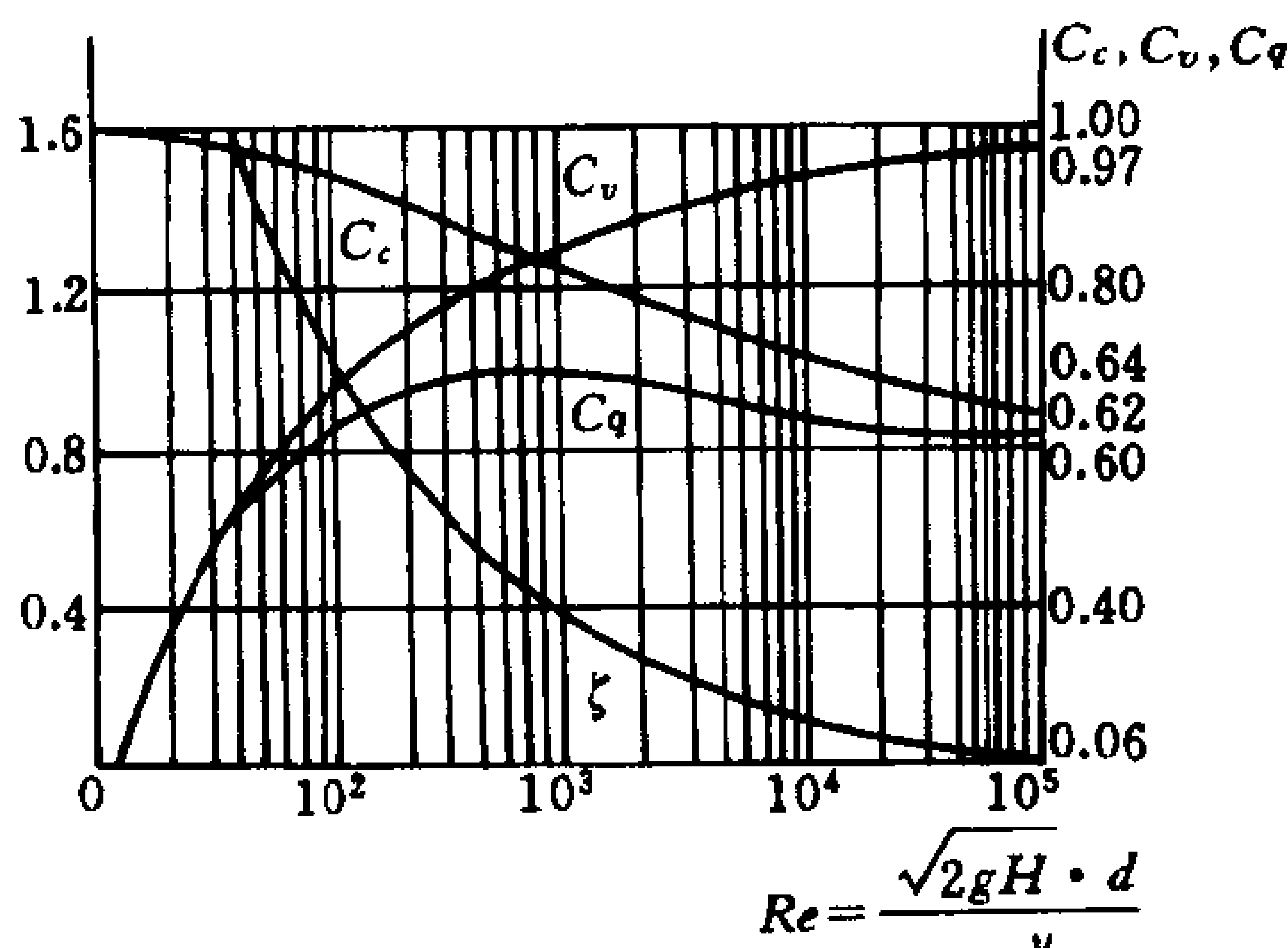


图 6－3　薄壁孔口的性能

这说明流量系数的物理意义就是实际流量与理想流量 q_T 之比。

按(6－13)式，通过流量 q_V 与 H、A 的测定，很容易得出流量系数 C_q 的实验值。C_q 与 Re 的关系也表示在图 6－3 上，当 $Re \geqslant 10^5$ 时，$C_q = 0.62$。

3．收缩系数与阻力系数

用实验得出的 C_q 与 C_v，可以算出收缩系数

$$C_c = \frac{C_q}{C_v} \tag{6-14}$$

C_c 与 Re 的关系也表示在图 6－3 上，当 $Re \geqslant 10^5$ 时，$C_c = 0.64$。

用实验得出的 C_v，可以算出孔口的阻力系数

$$\zeta = \frac{1}{C_v^2} - 1 \tag{6-15}$$

ζ 与 Re 的关系也表示在图 6－3 上，当 $Re \geqslant 10^5$ 时 $\zeta = 0.06$。

以上是孔口出流的公式和系数的数值。这些数值只适于孔口直径 $d \ll D$(即管道直径)时的小孔口。如果在公式(6－2)中不能忽略 $\left(\frac{d}{D}\right)^4$ 项，则称为大孔口。

三、大孔口的出流公式

如图 6－1，当 d 并非远小于 D 时，则管道侧壁与孔口外圆周

靠近，这时从孔口流出时，其收缩程度大为减轻，或者说大孔口的收缩系数较大。大孔口收缩系数取决于孔口直径与管道直径之比，其经验公式为

$$C_c = 0.63 + 0.37\left(\frac{d}{D}\right)^4 \tag{6-16}$$

当$\left(\frac{d}{D}\right)^4$项不能忽略时，大孔口的出流速度仍需按(6－2)式计算，即

$$v_c = \frac{\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}}{\sqrt{1+\zeta - C_c^2\left(\frac{d}{D}\right)^4}} = \frac{\sqrt{2gH}}{\sqrt{1+\zeta - C_c^2\left(\frac{d}{D}\right)^4}} = C_v\sqrt{2gH} \tag{6-17}$$

大孔口的流量公式为

$$q_V = A_c v_c = C_c A\frac{\sqrt{2gH}}{\sqrt{1+\zeta - C_c^2\left(\frac{d}{D}\right)^4}} = C_q A\sqrt{2gH} \tag{6-18}$$

大孔口出流公式表面上看起来与小孔口公式的形式是完全相同的，但大孔口的流速系数

$$C_v = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta - C_c^2\left(\frac{d}{D}\right)^4}} \tag{6-19}$$

流量系数

$$C_q = C_c C_v = \frac{C_c}{\sqrt{1+\zeta - C_c^2\left(\frac{d}{D}\right)^4}} \tag{6-20}$$

以及收缩系数 C_c 的(6－16)式均与小孔口不同，C_c、C_v、C_q 均随$\frac{d}{D}$的增大而增大，也就是说孔口越大，它的 C_c、C_v、C_q 三个系数值也越大。

大孔口常常用于孔板流量计中，这里所得到的公式不仅与§3

-6 中节流式流量计的系数关系是一致的，而且与§5-5 中管道尺寸突然缩小的情况也有互通之处。

大孔口的性能主要通过它的三个系数来表现，§3-6 中的图 3-26 上列有大孔口的流量系数 C_q 实验值、表 5-8 上列有突然缩小的收缩系数 C_c 与阻力系数 ζ 的实验值。

[**例题 6-1**] 如图 6-4 所示，在 $\rho=860\ \mathrm{kg/m^3}$、$\nu=8.4\times10^{-6}\ \mathrm{m^2/s}$ 的油管中，加装一个小孔阻尼器以降低油流速度。已知 $D=25.4$ mm，$d=5$ mm，阻尼器两端压强差 $\Delta p=0.11\times10^5$ Pa。

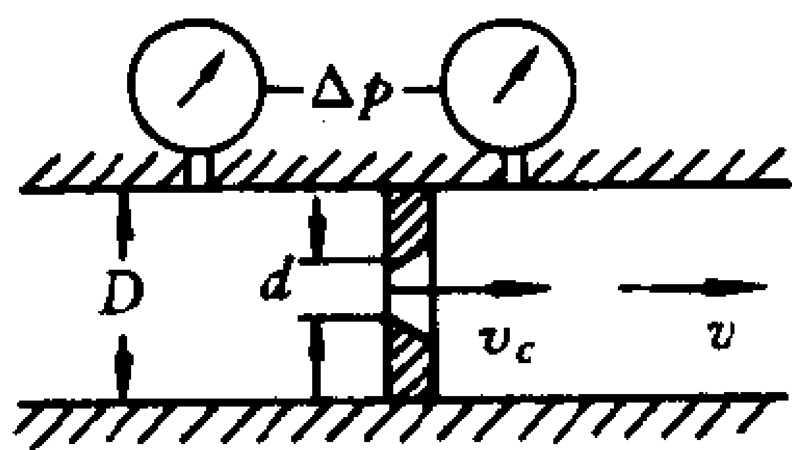


图 6-4 小孔阻尼器

试求管中流速 v 及流量 q_V。

[**解**] 首先计算孔口雷诺数

$$Re=\frac{\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}d}{\nu}=\frac{\sqrt{\frac{2\times0.11\times10^5}{860}}\times0.005}{8.4\times10^{-6}}=3\ 010$$

查图 6-3，可得 $C_v=0.91$，$C_c=0.74$，$C_q=0.67$，$\zeta=0.22$。

据此可算出经孔口的流速

$$v_c=C_v\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}=0.91\times\sqrt{\frac{2\times11\ 000}{860}}=4.6\ \mathrm{m/s}$$

管中平均速度

$$v=v_cC_c\left(\frac{d}{D}\right)=4.6\times0.74\times\left(\frac{0.005}{0.025\ 4}\right)^2$$
$$=0.132\ \mathrm{m/s}$$

流量

$$q_V=v\frac{\pi}{4}D^2=0.132\times\frac{\pi}{4}\times0.025\ 4^2=0.000\ 067\ \mathrm{m^3/s}$$
$$=4\ \mathrm{l/min}$$

或由 $q_V = C_q \frac{\pi}{4} d^2 \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}$ 亦可得出同样结果。

[例题 6－2] 在直径 $D = 50$ mm 的水管末端装一个直径 $d = 25$ mm 的孔板流量计(如图 6－5)，测得孔板前压强 $p = 25\,000$ Pa，试求流量 q_V。

[解] 这是大孔口的问题。

根据(6－16)式可得

$$C_c = 0.63 + 0.37\left(\frac{d}{D}\right)^4 = 0.653$$

由表 5－8 可查得 $\frac{A_2}{A_1} = \left(\frac{d}{D}\right)^2 = 0.25$ 时 $\zeta = 0.41$。据(6－19)式得

$$C_v = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta - C_c^2\left(\frac{d}{D}\right)^4}} = 0.85$$

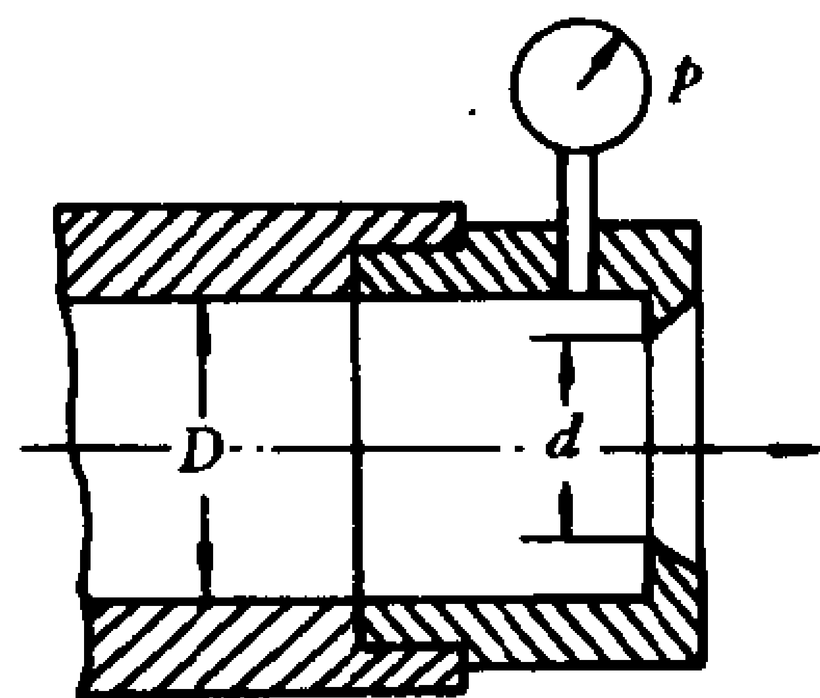


图 6－5 孔板流量计

于是

$$C_q = C_c C_v = 0.555$$

$$q_V = C_q \frac{\pi}{4} d^2 \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} = 0.555 \times \frac{\pi \times 0.025^2}{4} \sqrt{\frac{2 \times 25\,000}{1\,000}}$$

$$= 0.001\,9\ \text{m}^3/\text{s} = 1.9\ \text{l/s}$$

§6－2 厚壁孔口出流

如图 6－6 所示，当 $2 < \frac{l}{d} \leqslant 4$ 时称为厚壁孔口，或外伸管嘴。

一、厚壁孔口出流公式

厚壁孔口在入口处同样形成一个 $c-c$ 收缩断面，$c-c$ 断面上的速度用 v_c 表示、流束面积用 A_c 表示，这种收缩称为厚壁孔口的内收缩。

流体过 $c-c$ 断面以后，由于遇到前面的阻力，速度又稍有降低，因而流束又扩张附壁流出孔口，在出口处不再收缩，故厚壁孔口只有内收缩而无外收缩，这是它与薄壁孔口的区别之一。

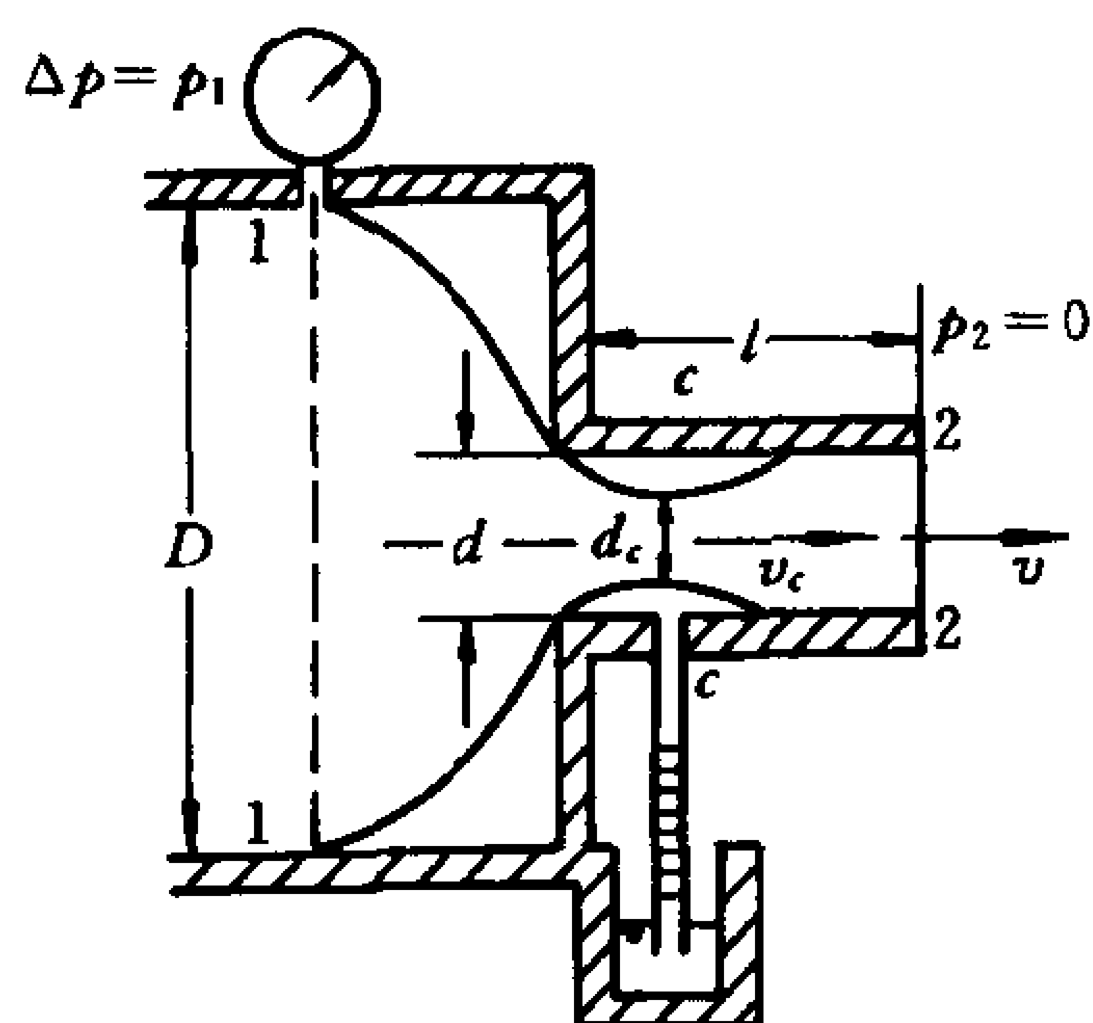


图 6-6　厚壁孔口

它与薄壁孔口的第二点区别是厚壁孔口的总阻力系数包括下列三个组成部分。一是入口阻力系数 ζ_1(与薄壁孔口中的 ζ 性质类似而稍有不同);二是 $c-c$ 断面后的扩张阻力系数 ζ_2(可按突然扩大的包达定理计算);三是后半段上沿程的当量阻力系数 $\zeta_e=\lambda\dfrac{l'}{d}$。此处 $l'\approx\dfrac{l}{2}$代表厚壁孔口后半段上的长度。

列 1-1、2-2 断面上的伯努利方程式,令 $\alpha=1$,则

$$\frac{p_1}{\rho g}+\frac{v_1^2}{2g}=\frac{v^2}{2g}+\Sigma\zeta\frac{v^2}{2g}$$

将 $v_1=v\left(\dfrac{d}{D}\right)^2$ 代入,并令 $\Delta p=p_1-p_2=p_1$,则

$$v=\frac{1}{\sqrt{1+\Sigma\zeta-\left(\dfrac{d}{D}\right)^4}}\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} \tag{6-21}$$

如果 $d\ll D$,且$\left(\dfrac{d}{D}\right)^4\approx0$,即为厚壁小孔口的情况,于是

$$v=\frac{1}{\sqrt{1+\Sigma\zeta}}\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}=\frac{1}{\sqrt{1+\Sigma\zeta}}\sqrt{2gH}=C_v\sqrt{2gH} \tag{6-22}$$

式中流速系数

$$C_v = \frac{1}{\sqrt{1+\Sigma\zeta}} \qquad (6-23)$$

流量

$$q_V = Av = C_v A\sqrt{2gH} = C_q A\sqrt{2gH} \qquad (6-24)$$

式中流量系数

$$C_q = C_v \qquad (6-25)$$

从(6－22)与(6－24)看到，厚壁孔口的出流公式与薄壁孔口出流公式在形式上仍然是完全一致的，只是它的流速系数、流量系数与薄壁孔口不同而已。

二、厚壁孔口的出流系数

厚壁孔口的总阻力系数 $\Sigma\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_e$。其中入口阻力系数 ζ_1 可根据薄壁孔口的 ζ 来计算，这两者的区别在于，薄壁孔口的 ζ 是与$\frac{v_c^2}{2g}$配合的；而现在的 ζ_1，则需与$\frac{v^2}{2g}$相配合。于是可根据 $\zeta=0.06$ 折算如下：

入口阻力系数

$$\zeta_1 = \zeta\left(\frac{v_c}{v}\right)^2 = \zeta\left(\frac{A}{A_c}\right)^2 = 0.06\times\left(\frac{1}{0.64}\right)^2 = 0.146$$

此外，突然扩大阻力系数 ζ_2 可按包达定理计算

$$\zeta_2 = \left(\frac{A}{A_c}-1\right)^2 = \left(\frac{1}{0.64}-1\right)^2 = 0.316$$

如在沿程阻力 $\zeta_e = \lambda\frac{l'}{d}$中取 $\lambda=0.02$，$\frac{l'}{d}=2$，则

$$\zeta_e = \lambda\frac{l'}{d} = 0.02\times 2 = 0.04$$

所以 $$\Sigma\zeta = 0.146+0.316+0.04 = 0.5$$

最后可得厚壁孔口的流速系数为

$$C_v = \frac{1}{\sqrt{1+\Sigma\zeta}} = \frac{1}{\sqrt{1+0.5}} = 0.82$$

因为厚壁孔口没有外收缩，其收缩系数 $C_c=1$，故

厚壁孔口的流量系数 $C_q = C_c C_v = C_v = 0.82$。

三、孔口与管嘴出流性能的比较

从上述情况知道，不论薄壁、厚壁，也不论大孔、小孔，孔口出流的公式都可以写成同样形式，关键在于它们的出流系数各自不同。工程上常用的孔口与管嘴有图 6-7 所示的几种。其中从左向右分别称为(1)薄壁孔口，(2)厚壁孔口或外伸管嘴，(3)内伸管嘴，(4)收缩管嘴，(5)扩张管嘴，(6) 流线形管嘴。

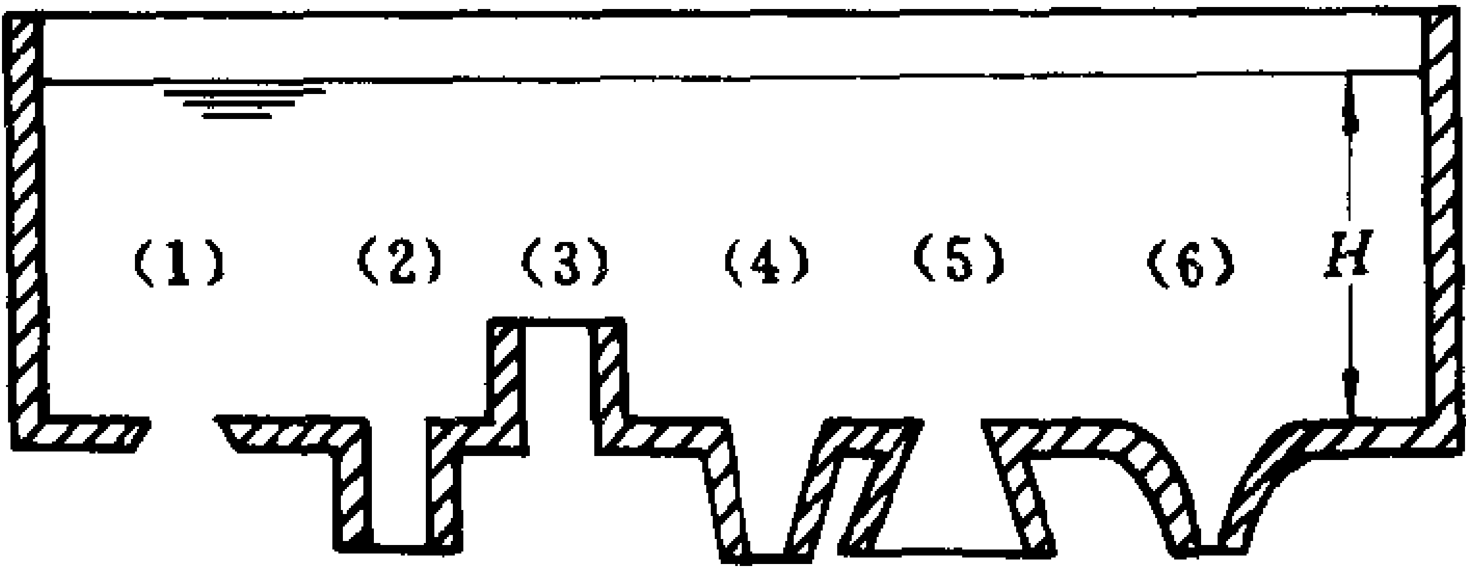


图 6-7 孔口与管嘴

为了便于比较，假定它们在容器壁面上的面积 A 是相同的。

通过实验测得它们的出流系数如表 6-1 所示，这些系数都是对应于出口断面上的数值，我们应该注意到它们的出口断面面积是不完全相同的。

1. 薄壁孔口可作为比较的基础，其系数值与 §6-1 中的叙述是一致的。

表 6-1 孔口与管嘴出流系数

名称	阻力系数 ζ	收缩系数 C_c	流速系数 C_v	流量系数 C_q
薄壁孔口	0.06	0.64	0.97	0.62
厚壁孔口(外伸管嘴)	0.5	1	0.82	0.82
内伸管嘴	1	1	0.71	0.71
收缩管嘴 $\theta=13\sim14°$	0.09	0.98	0.96	0.95
扩张管嘴 $\theta=5\sim7°$	4	1	0.45	0.45
流线形管嘴	0.04	1	0.98	0.98

2. 厚壁孔口(外伸管嘴)

它的流速系数小于薄壁孔口,因此它的速度也小于薄壁孔口,这自然是由于它的阻力大于薄壁孔口的缘故。

它的流量系数大于薄壁孔口,因此它的流量也大于薄壁孔口。这从 $C_q = C_c C_v$ 公式上固然可以承认,但从阻力的比较上似乎是有不易理解之处:既然它的阻力远大于薄壁孔口,流速减小,为什么流量反而会比薄壁孔口要大呢?

厚壁孔口流量大于薄壁孔口流量的物理原因需要用伯努利方程式分析。

回头来看图6-4,对1-1及 $c-c$ 断面列伯努利方程式,令 $\alpha=1$,得

$$\frac{p_1}{\rho g}+\frac{v_1^2}{2g}=\frac{p_c}{\rho g}+\frac{v_c^2}{2g}+\zeta\frac{v_c^2}{2g}$$

因 $d \ll D$,所以 $v_1 \approx 0$,于是

$$p_c = p_1-(1+\zeta)\frac{\rho v_c^2}{2}$$

以 $v_c=\dfrac{q_V}{A_c}=\dfrac{C_q A\sqrt{\dfrac{2p_1}{\rho}}}{C_c A}=\dfrac{C_q}{C_c}\sqrt{\dfrac{2p_1}{\rho}}$ 代入,则

$$p_c = p_1-(1+\zeta)\frac{\rho}{2}\left(\frac{C_q}{C_c}\right)^2\frac{2p_1}{\rho}=p_1\left[1-(1+\zeta)\left(\frac{C_q}{C_c}\right)^2\right]$$

将厚壁孔口流量系数 $C_q=0.82$,入口阻力系数 $\zeta=0.06$,内收缩系数 $C_c=0.64$ 代入,得

$$p_c = p_1\left[1-(1+0.06)\times\left(\frac{0.82}{0.64}\right)^2\right]=-0.74p_1 \quad (6-26)$$

因为 $p_1>0$,所以 $p_c<0$,这说明 $c-c$ 断面上的压强比大气压小,也就是说 $c-c$ 断面上存在着真空度。事实上我们如果按图6-6那样在 $c-c$ 断面上连接一个小管和盛汞容器,可以看到小管中汞柱上升,这完全证实了 $c-c$ 断面上确实是存在着真空度。

这真空度如同一个小水泵一样，有自水源向外抽吸液体的作用，这就是厚壁孔口流量大于薄壁孔口流量的物理原因。

维持管嘴中的真空度需要两个条件。一是管嘴长度不能太短，要求$\frac{l}{d}>(2\sim4)$，否则大气很容易冲入口内破坏真空、使管嘴变成薄壁孔口（如图 6－8）。二是 p_1 不能太大。因为 $p_c=-0.74p_1$，所以 p_1 越大，p_c 就越小。p_c 的极限是饱和蒸气压 p_v，如果 p_1 大到使 $p_c=p_v$ 的程度，则管嘴内将出现气穴，一切流动现象都遭到破坏，这更谈不上什么增大流量了。

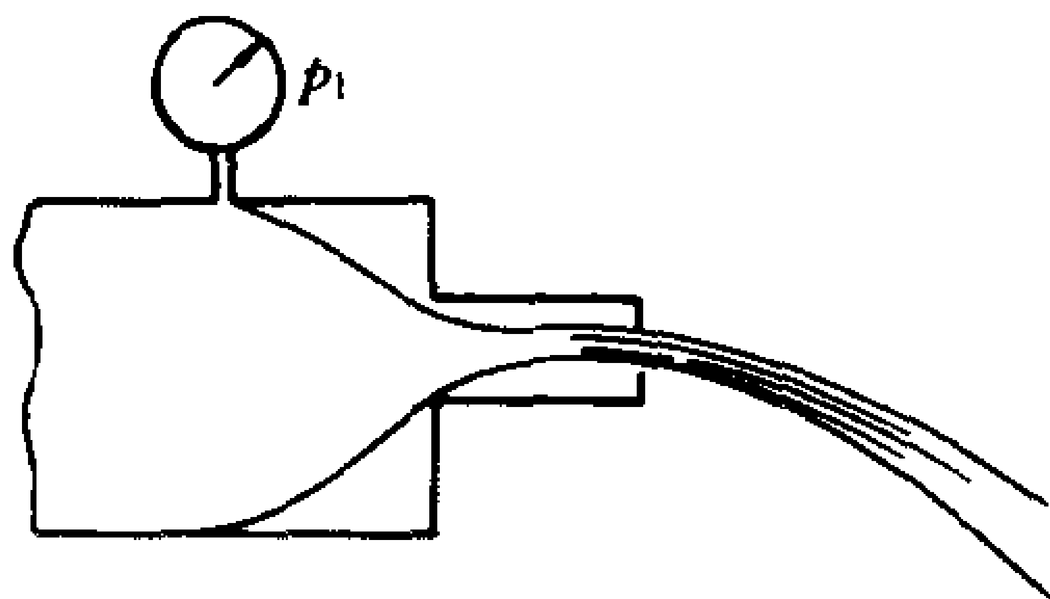


图 6－8　管嘴真空度破坏

维持管嘴正常工作的这两个条件是设计和使用管嘴时必要给以充分注意的。

3．内伸管嘴

它与外伸管嘴的差别是阻力较大，适合装置于外形需隐蔽之处。但与外伸管嘴相比，它的流速和流量大约要降低 15%左右。

4．收缩管嘴

这种管嘴除内收缩以外，在出口处还有外收缩，它的特点是内收缩后不需过分扩张，因而阻力较小。这种管嘴流速系数较大，出口速度是这几种管嘴中最高的。在 $\theta=13\sim14°$时，不但出口速度大，而且有相当的流量，这时的动能达到最大值，如果 θ 继续增大，虽然速度提高，但流量要减小。

这种管嘴最适用于需要大动能而不需要大流量的场所，水力

采煤，水力喷沙，水力远射，冲击式水轮机喷管等处均用之。

5. 扩张管嘴

它的扩张阻力大，因而流速系数和流速皆小，在 $\theta=5\sim7^\circ$ 时阻力最小，是为最佳扩张角。θ 再大则流线脱离壁面形成薄壁孔口。

这种管嘴的真空度比外伸管嘴更大，因而它有更大的抽吸能力，它的流量系数表面上看来只有 0.45，但这是对出口断面而言的，如果折合成其入口断面的数值，则流量系数是很大的，这是几种管嘴中流量最大的一种，它适用于大流量而低流速的场所，水轮机的尾水管、喷射水泵、文丘里流量计等处均采用扩张管嘴。

6. 流线形管嘴

它阻力最小，不收缩，不易产生气穴，流线不脱离壁面，适用于减小阻力、减小干扰等情况，但加工需圆滑。

分析表 6－1 时，需要注意两点：(1)流速系数大的，流速也大，因为 $v=C_v\sqrt{2gH}$。(2)流量系数大的，流量却不一定大，因为 $q_V=C_qA\sqrt{2gH}$，这里 A 是出口面积。扩张管嘴 C_q 虽不大，但由于它出口面积大，吸力大，结果它的流量却是最大的。收缩管嘴的 C_q 虽然不小，但由于它的出口面积小，吸力小，结果流量却是最小的。

也就是说当出口面积与器壁上的面积不相等时，C_q 的大小并不代表流量的大小，这是要特别注意的。

[**例题 6－3**] 在直径 $D=20$ mm 的油管中装有直径 $d=4$ mm、流速系数 $C_v=0.8$ 的一个固定节流器(如图 6－9)。

节流器前后的损失可忽略，已知 $p_0=10$ kPa，$p_2=0$，油的密度 $\rho=850$ kg/m^3，试求节流器末端及管道出口处的速度 v_1、v_2。

[**解**] 首先求节流器末端的压强 p_1。列 1－1 及 2－2 断面的伯努利方程式及连续方程式

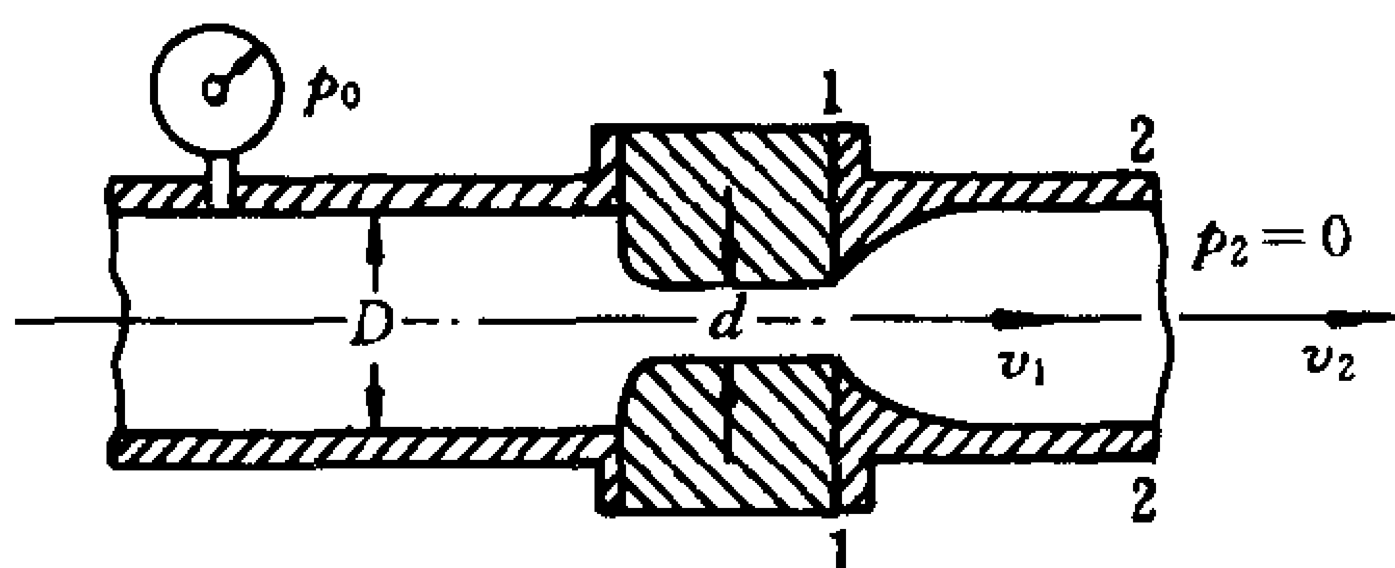


图 6-9 固定节流器

$$\frac{p_1}{\rho g}+\frac{v_1^2}{2g}=\frac{v_2^2}{2g},\ v_1d^2=v_2D^2$$

由此得

$$p_1=\frac{\rho v_1^2}{2}\left[\left(\frac{d}{D}\right)^4-1\right]$$

将 p_1 代入节流器的流速公式中,

$$v_1=C_v\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}=C_v\sqrt{\frac{2(p_0-p_1)}{\rho}}=C_v\sqrt{\frac{2}{\rho}\left\{p_0-\frac{\rho v_1^2}{2}\left[\left(\frac{d}{D}\right)^4-1\right]\right\}}$$

两端乘方,并整理

$$\frac{\rho v_1^2}{2C_v^2}=p_0-\frac{\rho v_1^2}{2}\left[\left(\frac{d}{D}\right)^4-1\right]$$

解出 v_1 得

$$v_1=C_v\sqrt{\frac{2p_0}{\rho\left[1+C_v^2\left(\frac{d}{D}\right)^4-C_v^2\right]}}$$

$$=0.8\sqrt{\frac{2\times10^4}{850[1+0.64\times0.2^4-0.64]}}$$

$$=6.46\ \text{m/s}$$

$$v_2=v_1\left(\frac{d}{D}\right)^2=6.46\times0.2^2=0.26\ \text{m/s}$$

[**例题 6-4**] 在水位 $H=2.75$ m 的水箱侧壁装一个收缩-扩张管嘴(如图 6-10),其喉部直径为 $d_1=5$ cm。

收缩段的损失甚小可忽略不计。

(1) 如果喉部产生气穴时的真空度为 $\frac{p_1}{\rho g}=8.5$ m 水柱,试求未发生气穴

时的最大流量。

(2) 如果扩张段的损失为同样面积比的突然扩大管的损失的$\frac{1}{4}$,试求不发生气穴时出口直径 d_2 的最大值。

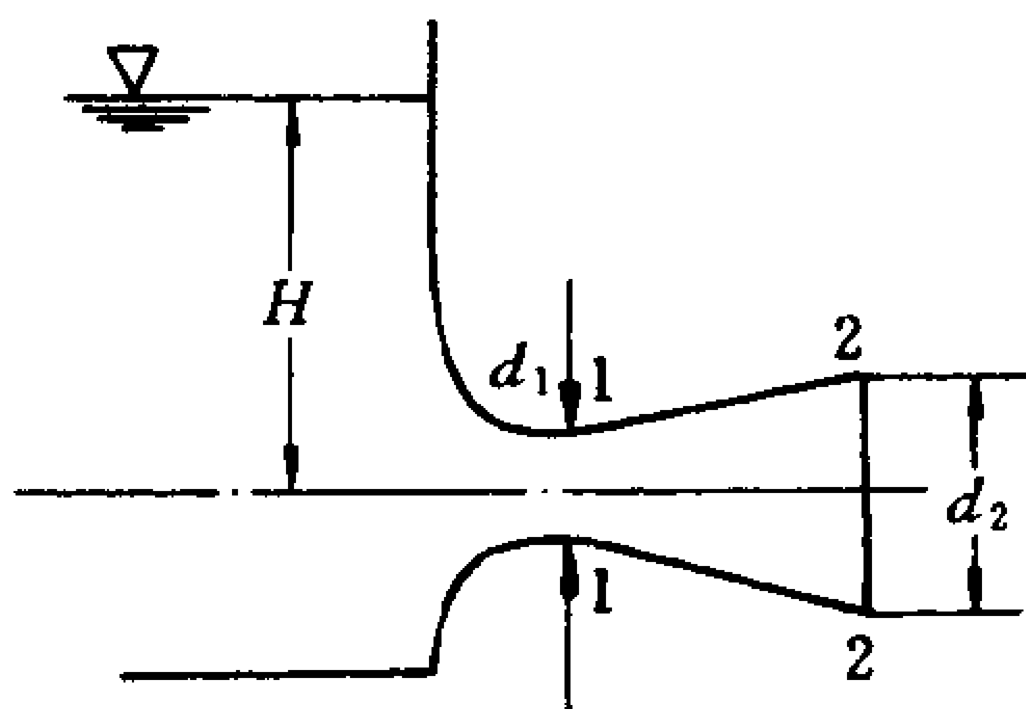


图 6-10 收缩-扩张管嘴

[解] 因为收缩段没有损失,列水面与 1-1 断面的伯努利方程式

$$H=\frac{v_1}{2g}-\frac{p_1}{\rho g} \qquad \text{(因真空度为负)}$$

即可得出不发生气穴时的喉部最大速度为

$$v_1=2g\sqrt{\left(H+\frac{p_1}{\rho g}\right)} \tag{1}$$

于是可得最大流量为

$$q_V=\frac{\pi}{4}d_1^2\sqrt{2g\left(H+\frac{p_1}{\rho g}\right)}=\frac{\pi}{4}\times 0.05^2\times\sqrt{2\times 9.81(2.75+8.5)}$$
$$=0.029\ \text{m}^3/\text{s}=29\ \text{l/s}$$

其次列水面与 2-2 断面的伯努利方程式

$$H=\frac{v_2^2}{2g}+\frac{1}{4}\frac{(v_1-v_2)^2}{2g}=\frac{v_2^2}{2g}\left[1+\frac{1}{4}\left(\frac{v_1-v_2}{v_2}\right)^2\right]$$
$$=\frac{v_2^2}{2g}\left[1+\frac{1}{4}(K-1)^2\right]$$

式中

$$K=\frac{v_1}{v_2}=\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2$$

由此解出

$$v_2^2=\frac{2gH}{1+\frac{1}{4}(K-1)^2} \tag{2}$$

由(1)及(2)式可得

$$K^2 = \frac{H + \frac{p_1}{\rho g}}{H}\left[1 + \frac{1}{4}(K-1)^2\right]$$
$$= 4.1[1 + 0.25(K-1)^2]$$

由此解出

$$K = 2.58$$

所以 $$d_2 = \sqrt{K}d_1 = \sqrt{2.58} \times 5 = 8 \text{ cm}$$

讨论:如果不加扩张管嘴,则最大流量为 $q_V = \frac{\pi}{4}d_1^2\sqrt{2gH} = 14.5$ l/s,可见加管嘴后流量能增加一倍。

如果 d_2 再加大,将产生气穴,流量也不会超过 29 l/s。

§6-3 孔口及机械中的气穴现象

从上面例题中我们看到,节流孔口处的液体速度比较大,压强往往出现真空度,当这种真空度增大到一定程度以后,液体中溶解的空气首先要分离成气泡,从液体中游离出来。压强再降低,真空度再增大,甚至液体本身也会汽化,形成所谓气穴现象。机械和孔口中发生气穴会产生许多不良后果。轻则妨碍流动性能;重则伴生气蚀,发生机械性的损伤和化学性的腐蚀。有时破坏机件,有时产生强烈噪音和振动,因此在流体机械中气穴和气蚀现象是有百害而无一利的,应该认真分析它的产生原因、寻求解决办法。

气穴产生的条件是局部地区的高速和低压。孔口面积很小,是典型的高速部位,当然高速必然也表现为低压,只有压强低到饱和蒸气压时液体才能持续维持汽化状态。

水泵、油泵的入口处也是典型的低压部位,此处并非高速,但是由于吸入管的高程及损失,液体流到此处压强已经很低,因而即使不是高速也仍然出现低压,虹吸管最高点处的情况也与此类似。

压强低到什么程度会产生气穴,这要看液体中是否溶解气体,

以及气体溶解量的多少而定。一般水中溶解气体不超过2%，因而水中气穴往往以 $p=p_v$(液体饱和蒸气压)为标准。油中溶解气体常达6%～12%，因而油中气穴往往以 $p=p_g$(空气分离压)为标准。水的 p_v 随温度而异，数值已列于表1－7中，油的 p_g 随温度和空气溶解量而异，它的数值可见图6－11及图6－12。

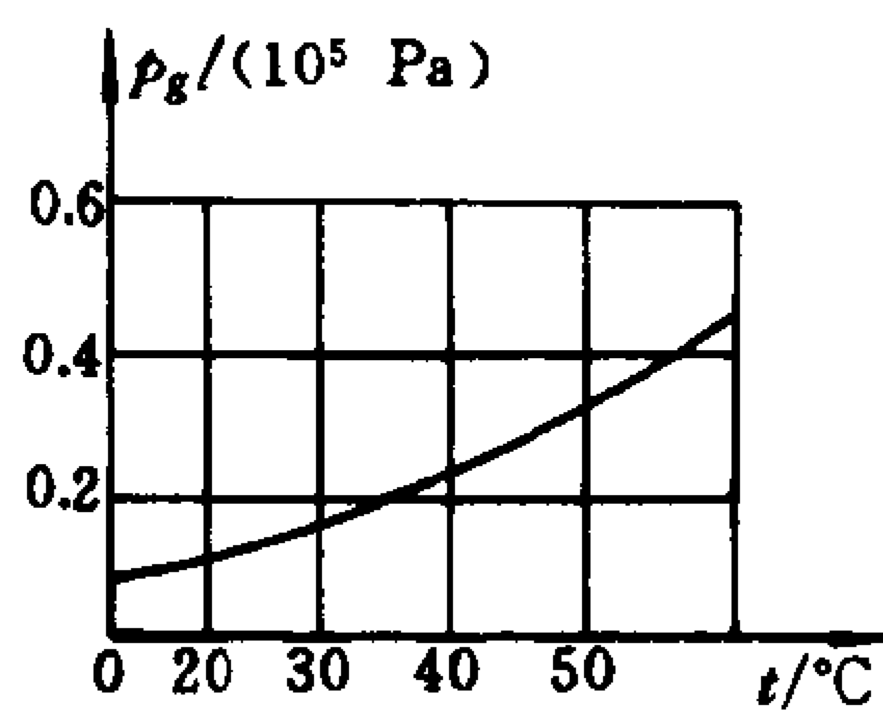


图6－11 空气分离压与温度的关系

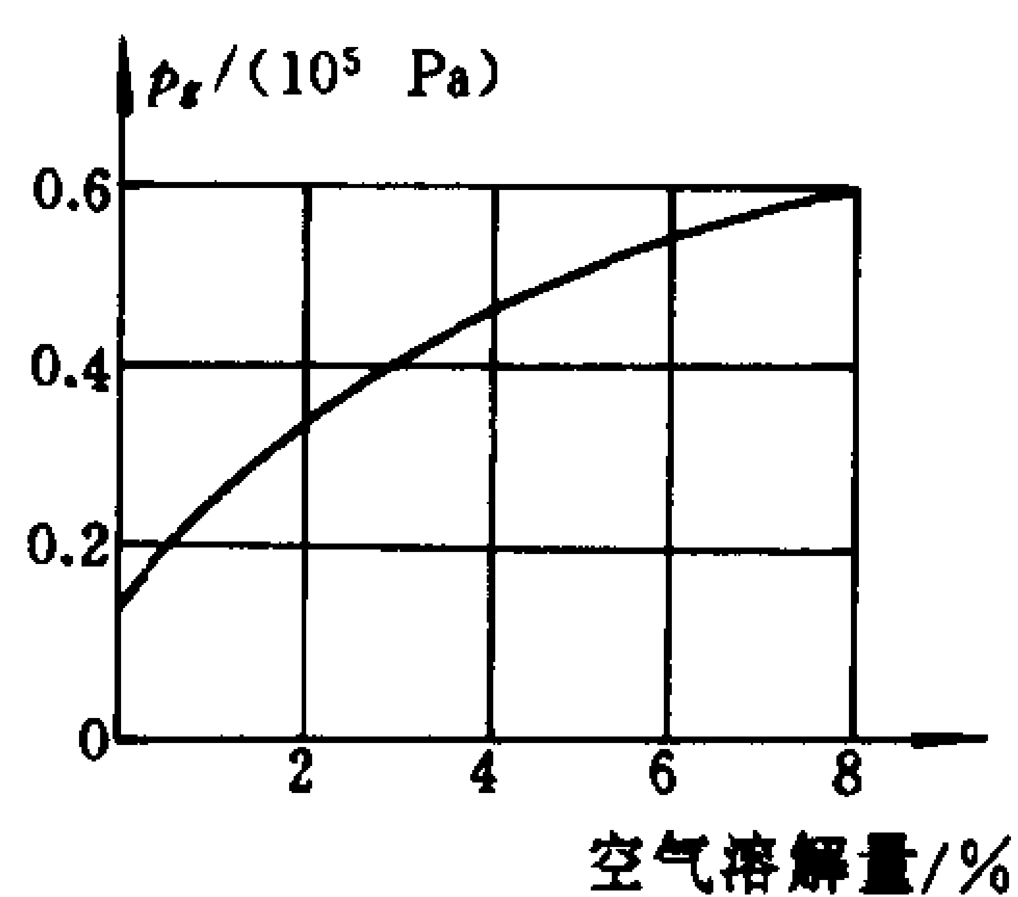


图6－12 空气分离压与空气溶解量的关系

下面分别讨论孔口节流及油泵、水泵入口处的气穴问题及其防止办法。

一、节流气穴

如图6－13，设节流孔口前、后的绝对压强为 p_1、p_2，节流口处的速度为 v。列节流口前后的伯努利方程式时，因管中速度 $v_1 \ll v$ 可相对忽略。于是

$$\frac{p_1}{\rho g}=\frac{p_2}{\rho g}+\frac{v^2}{2g}+\zeta\frac{v^2}{2g}$$

即

$$\frac{p_1-p_2}{\rho g}=(1+\zeta)\frac{v^2}{2g}\approx\frac{v^2}{2g} \qquad (6-27)$$

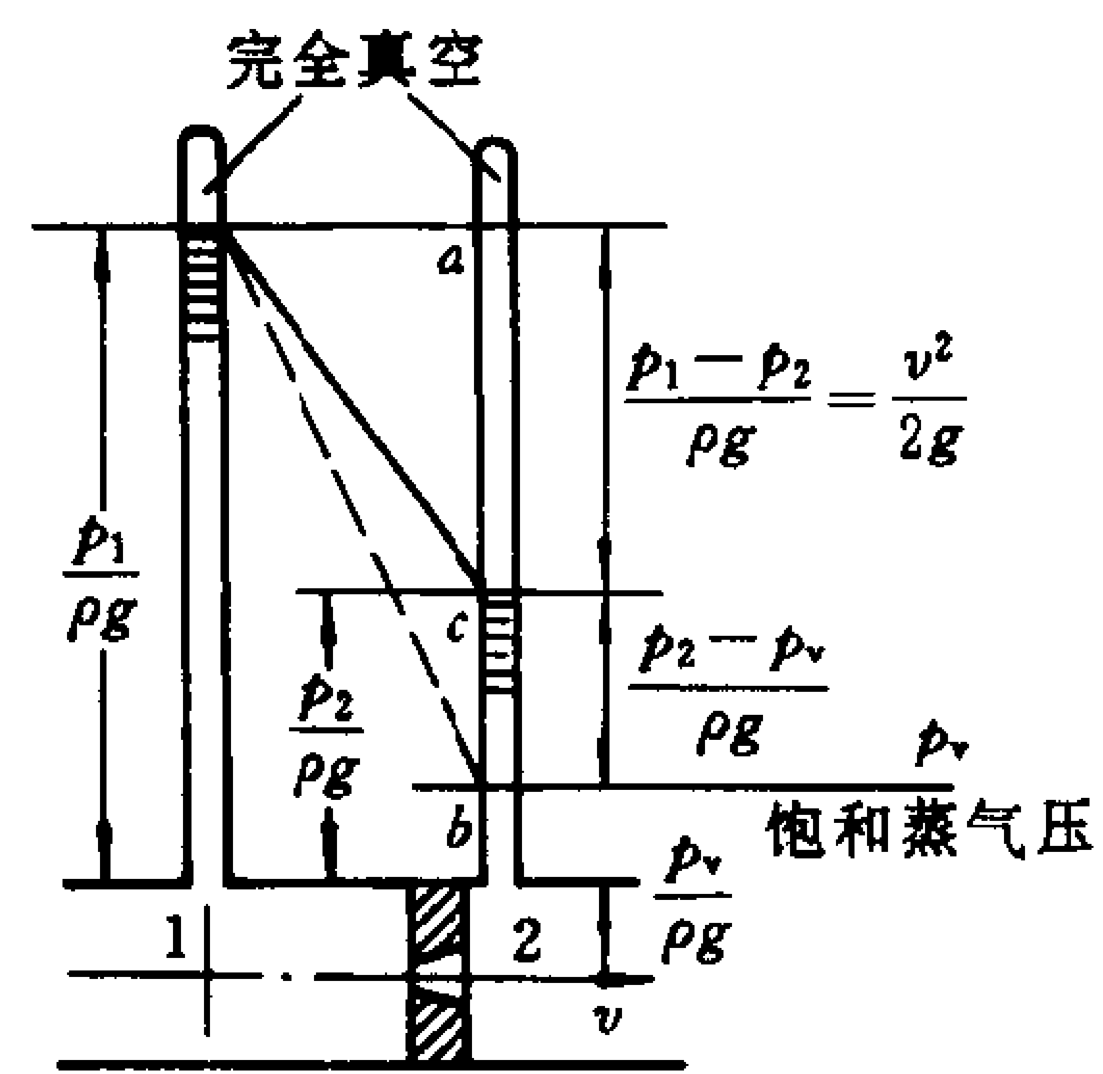


图6－13 节流气穴

在顶端抽成完全真空的测压管中，$\frac{p_1-p_2}{\rho g}$可以用两测压管中的液面差表示。假如$\frac{p_1}{\rho g}$一定，则经过孔口的速度 v 越大，$\frac{p_2}{\rho g}$越低；一旦$\frac{p_2}{\rho g}$下降到$\frac{p_v}{\rho g}$(或 p_2 下降到 p_v)时，孔口处就要产生气穴了。

在没有产生气穴的正常情况下，由于$\frac{p_2}{\rho g}$接近$\frac{p_v}{\rho g}$的程度不同，产生气穴的可能性也不一样。怎样表示不同 p_2 时产生气穴危险性的大小呢？从图 6－13 中可以看出，关键在于节流口后面测压管中液面的高低。因为$\frac{p_1}{\rho g}$、$\frac{p_v}{\rho g}$是一定的。ab 的长度不变。$\frac{p_2}{\rho g}$不同，则 c 点将 ab 分成不同的两段，ac 与 cb，于是 cb 与 ac 的比值也就不同。$\frac{cb}{ac}\to\infty$时绝无气穴发生；$\frac{cb}{ac}=0$ 时肯定产生气穴。因而我们可以用$\frac{cb}{ac}$的比值来表示产生气穴的可能性的大小。这比值越大，越不可能产生气穴；这比值越小，产生气穴的危险性就越大。我们称这个比值为气穴系数，用 σ 表示，则

$$\sigma=\frac{cb}{ac}=\frac{\frac{p_2-p_v}{\rho g}}{\frac{p_1-p_2}{\rho g}}=\frac{p_2-p_v}{p_1-p_2} \tag{6-28}$$

或将(6－27)式中的 p_1-p_2 代入可得

$$\sigma=\frac{p_2-p_v}{\frac{\rho v^2}{2}} \tag{6-29}$$

(6－28)和(6－29)式就是气穴系数的两种表达式，气穴系数不仅具有欧拉数的形式，而且它也确实是一个判别气穴相似的准则。因为从理论上来说 $p_2=p_v$ 时，也就是 $\sigma=0$ 时，才产生气穴。但实际上由于溶解气体早在饱和蒸气压之前就已经分离形成汽泡。

实验证明在液压节流孔处当 σ 下降到 0.4 左右就已经开始产生气穴了。这就是说 $\sigma=0.4$ 就是气穴系数的临界值。$\sigma>0.4$ 不产生气穴，$\sigma<0.4$ 则有气穴产生。σ 数越小，则气穴越严重。因此正如 $Re=2\ 320$ 是判别层、湍流的标准一样，气穴系数 $\sigma=0.4$ 是判别有无气穴的标准，而且 σ 数的大小是气穴程度的标志。机械工程中所进行的气穴相似实验就是根据相同 σ 数而设计的。

同时，我们还可以进一步导出产生气穴时节流口前后的压强比。如果令 $\sigma=0.4$，由(6－28)式可得

$\dfrac{p_2-p_v}{p_1-p_2}=0.4$ 也是产生气穴的标志。

与 p_1、p_2 相比，p_v 甚小可忽略之，于是可得

$$\frac{p_1}{p_2}=3.5 \tag{6-30}$$

这就是说节流口前后压强比 $\dfrac{p_1}{p_2}=3.5$ 是产生气穴的界限，为了避免产生气穴，必须使 $\dfrac{p_1}{p_2}<3.5$。这就是避免节流口气穴的关键。据此，不仅可以通过用压强表测定节流口前后压强的办法来观察气穴的危险性大小，而且可以设法减小节流口前后的压强比 $\dfrac{p_1}{p_2}$ 来降低气穴的危险程度。这样就提供了解决气穴问题的方向，一是降低节流口前的压强 p_1，一是提高节流口后的压强 p_2。

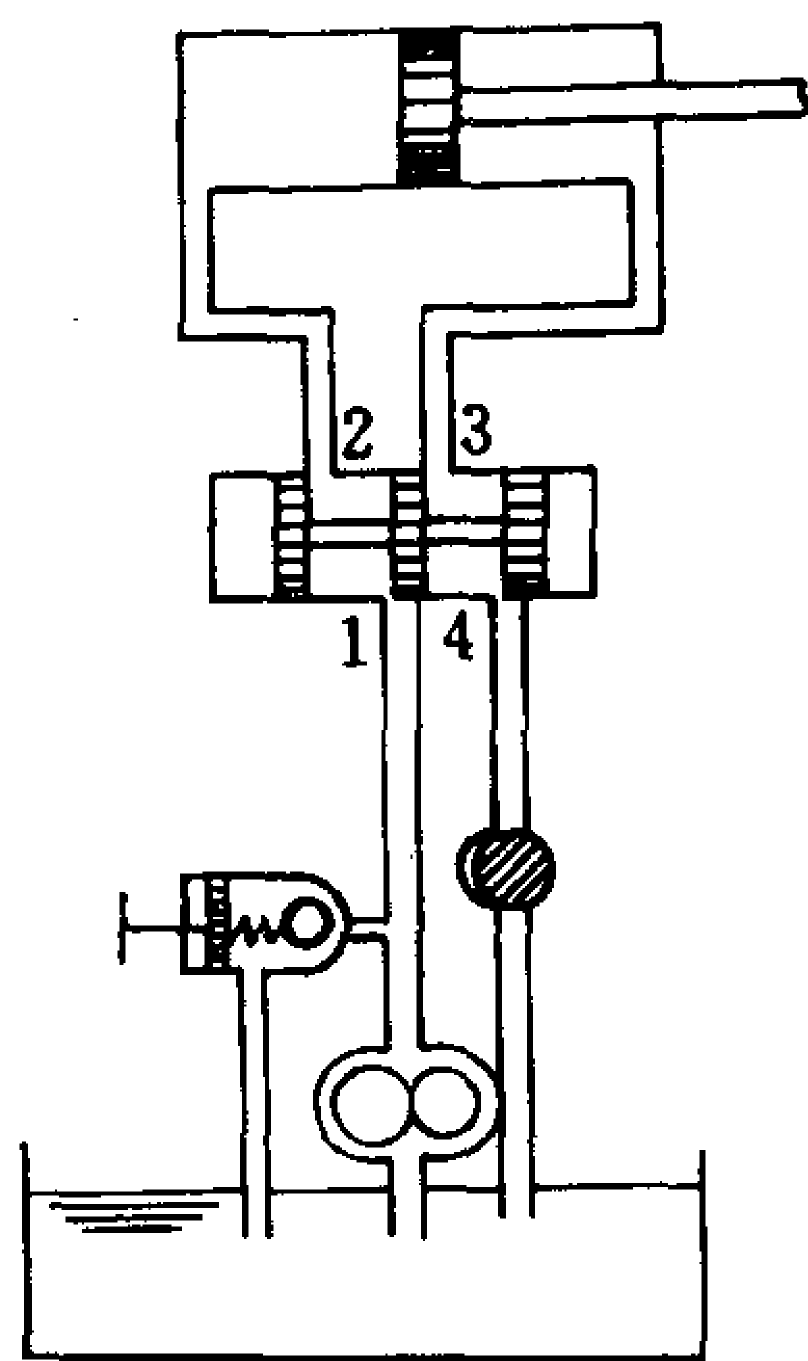


图 6－14　机床油路图

例如图 6－14 所示，换向阀的四个油口是产生气穴的关键部位。油缸进油管路上的阀口 1、2 前后的压强比 $\dfrac{p_1}{p_2}$ 需要

靠油缸负载和溢流阀的调节来保证它不超过3.5。溢流阀限制了 p_1 不能过大，油缸负载保证了 p_2 不能过小，因此阀口1、2处的气穴可能性较小。但油缸回油管路上的阀口3、4前后的压强比 $\frac{p_3}{p_4}$ 却有可能超过3.5。因为油缸右端的压强 p_3 有一定的数值，而当4点直接通向油箱时，$p_4 \approx 0$，这样 $\frac{p_3}{p_4}$ 就会大于3.5。为了避免3、4阀口处产生气穴，通常可在油缸回油管路上加装一个节流阀，如图所示。这种节流阀一方面有调节油缸活塞移动速度的功能，一方面也有避免气穴的功能。因为这样可以提高 p_4，从而降低 $\frac{p_3}{p_4}$ 的比值。节流阀装在回油管上，虽然可以提高换向阀后的压强（也称为背压），但却也增大了节流阀前的压强，节流阀前后的压强比也应当予以注意。这种方法的实质是将一个大的压强比，分散为两个小的压强比，因此这种方法适用面很大，它可以使总数为12的压强比分散为 $\sqrt{12}=3.46$ 的两个压强比，这样当然增大了阻力，但是气穴却可以避免了。

此外，用降低温度、减小阻力、避免流道上尖棱结构等等方法也都可以防止气穴，在液压技术中提高节流孔口后面背压的方法是用得比较普遍的。

二、泵前气穴

水泵、油泵入口也是气穴与气蚀的多发部位。如图6－15，对泵前断面与液面列伯努利方程式可得

$$\frac{p_a}{\rho g}=\frac{p}{\rho g}+h+(1+\Sigma\zeta)\frac{v^2}{2g}$$

即

$$\frac{p}{\rho g}=\frac{p_a}{\rho g}-\left[h+(1+\Sigma\zeta)\frac{v^2}{2g}\right] \tag{6-31}$$

公式左端就是泵前的绝对压强，从公式右端来看，如果吸水高度 h

及动能和损失$(1+\Sigma\zeta)\dfrac{v^3}{2g}$的总和过大，则泵入口前绝对压强就有可能接近饱和蒸汽压，于是泵前就要产生气穴。泵前气穴所产生的汽泡随着流体进入泵的高压区后迅速消灭，因而瞬时的撞击力很大，水泵叶轮和油泵齿轮在这种情况下，往往被砸得坑坑点点。此时振动和噪音也很大。扬程、流量、效率都非常低。气穴和气蚀情况下的泵是不能工作的。

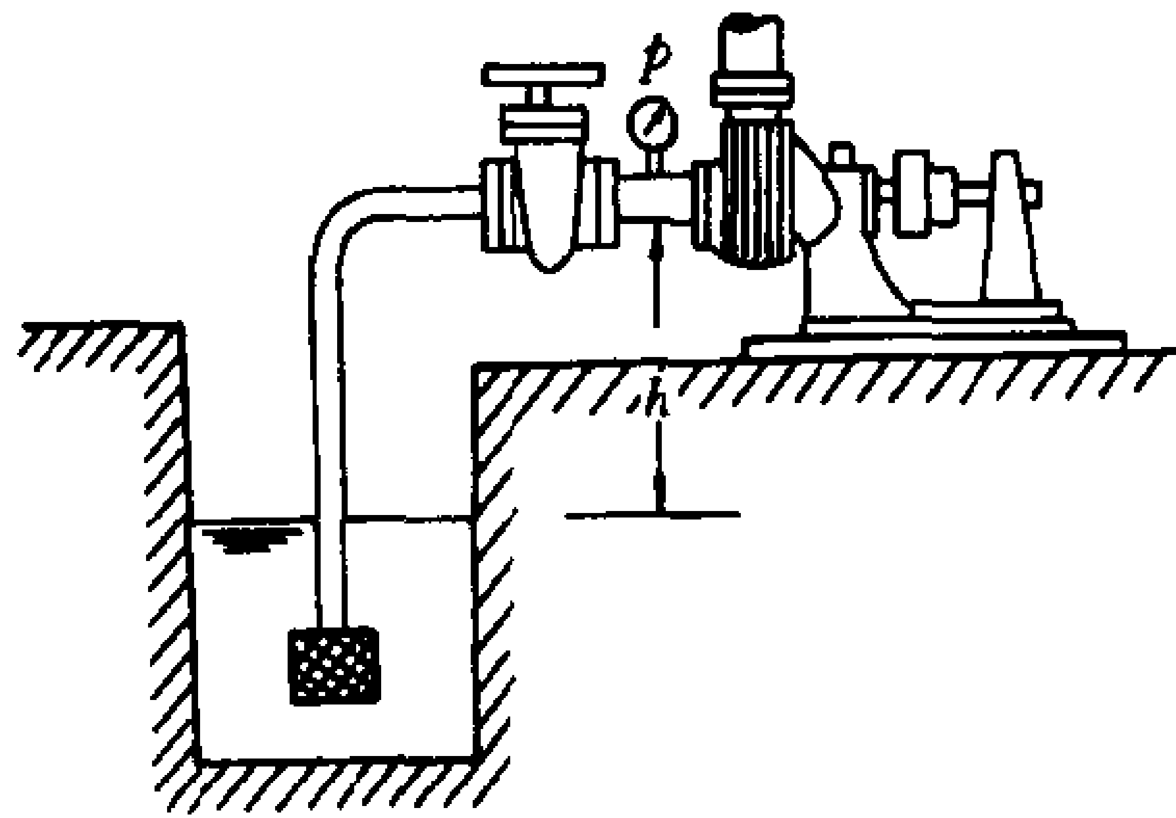


图 6－15　泵的吸水管

从(6－31)式看，防止泵前气穴可有三种办法，一是降低吸水高度。水泵有时降低安装高度以求接近水面，油泵有时用压力油箱，使油箱液面在油泵之上。二是尽量减小吸水管或吸油管上的局部和沿程阻力。三是降低吸水管或吸油管中的速度，加大吸入管的直径。

*§ 6－4　变水头作用下的孔口出流

在向容器充灌液体，或从容器向外排放液体的过程中必然出现变水头作用下的孔口出流问题。在飞机起落架、火炮驻退机、机车缓冲器以及许多阻尼减振装置中都遇到变压强作用下的孔口出流问题。这种问题是属于非定常流动的范围，但是当孔口面积与容器横断面面积相比甚小时惯性力可以忽略。水位或压强虽然随时间变化，但可以列出某一瞬时的孔口出流公式，然后再根据水头

或压强的变化规律进行积分运算,这样即可求得所需要的物理量。

如图 6－16 所示,假如容器底部有一个面积为 a、流量系数为 C_q 的孔口或管嘴。常常遇到的问题是怎样计算容器中水位从 H_1 变化到 H_2 所需要的时间。

如果容器是任意形状,如图 6－16 上的左图,则其横断面面积 A 是 h 的函数,$A=A(h)$。在某瞬时,水位为 h,其瞬时流量为 $C_q a\sqrt{2gh}$,因而在 $\mathrm{d}t$ 时间内流出的微小体积为

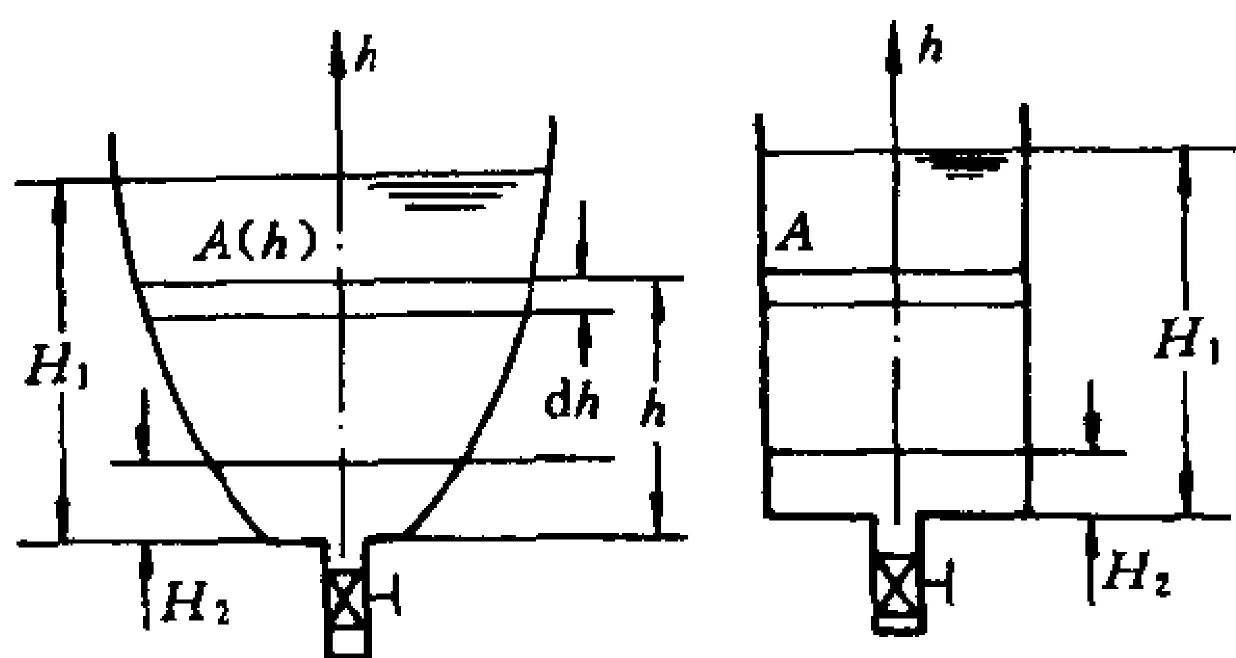


图 6－16 变水头出流

$$\mathrm{d}V=C_q a\sqrt{2gh}\,\mathrm{d}t=-A(h)\mathrm{d}h \qquad (6-32)$$

“－”号保证等式左端为正。由此得

$$\mathrm{d}t=\frac{-A(h)\mathrm{d}h}{C_q a\sqrt{2gh}}$$

从 $h=H_1$ 积分到 $h=H_2$,则得流出时间为

$$T=\int_0^T \mathrm{d}t=\int_{H_1}^{H_2}\frac{-A(h)\mathrm{d}h}{C_q a\sqrt{2gh}}$$

一般认为 C_q 在阻力平方区中是恒定值,改换积分上下限,则

$$T=\frac{1}{C_q a\sqrt{2g}}\int_{H_2}^{H_1}\frac{A(h)\mathrm{d}h}{\sqrt{h}} \qquad (6-33)$$

只要知道容器的几何形状,写出 $A=A(h)$的函数式,则右端即可积分。(6－33)式是适合于任何形状容器的普遍公式。如果讨论如图 6－16 上右图所示的简单柱形容器,则 A 与 h 无关,于是

$$T=\frac{2A}{C_q a\sqrt{2g}}\left(\sqrt{H_1}-\sqrt{H_2}\right) \tag{6-34}$$

如果 $H_1=H, H_2=0$，则可求出盛液高度为 H 的柱形容器的排空时间为

$$T=\frac{2A\sqrt{H}}{C_q a\sqrt{2g}}=\frac{2AH}{C_q a\sqrt{2gH}} \tag{6-35}$$

这说明变水头孔口出流的排空时间，对于柱形容器来说，正是定水头 H 作用下流出同样体积 $V=AH$ 所需时间的二倍。

[**例题 6-5**] 如图 6-17 所示，两容器的水位差 $H=4$ m，中间用流量系数 $C_q=0.6$ 的短管相连。已知容器与短管断面面积的关系是 $A_1=2A_2=20a$。试求从阀门开启到两容器水面一致所需要的时间。

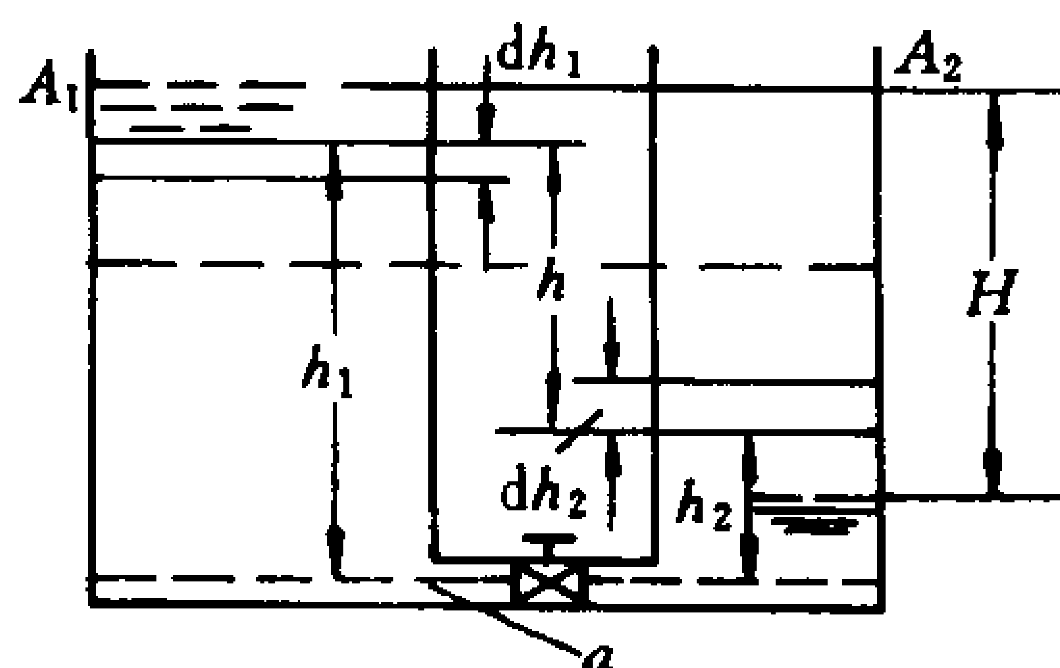


图 6-17 两容器间的流动

[**解**] 设某瞬时两容器中的液面分别在 h_1 与 h_2 处，两容器的水位差为

$$h=h_1-h_2 \tag{6-36}$$

在 dt 时间段内流过短管的微小体积为

$$dV=C_q a\sqrt{2gh}\,dt=-A_1 dh_1 \tag{6-37}$$

由(6-36)式得 $dh=dh_1-dh_2=dh_1-\left(-\frac{A_1}{A_2}dh_1\right)=dh_1\left(1+\frac{A_1}{A_2}\right)$，即

$$dh_1=\frac{dh}{1+\frac{A_1}{A_2}}$$

代回(6-37)式得

$$dt = \frac{-A_1 dh}{C_q a\sqrt{2gh}\left(1+\frac{A_1}{A_2}\right)} = -\frac{A_1 A_2}{C_q a(A_1+A_2)\sqrt{2g}}\frac{dh}{\sqrt{h}}$$

从 $h=H$ 到 $h=0$ 积分，则

$$t = \int_0^t dt = \int_H^0 -\frac{A_1 A_2}{C_q a(A_1+A_2)\sqrt{2g}}\frac{dh}{\sqrt{h}}$$

$$= \frac{A_1 A_2}{A_1+A_2}\frac{1}{C_q a\sqrt{2g}}\int_0^H \frac{dh}{\sqrt{h}}$$

$$= \frac{A_1 A_2}{A_1+A_2}\frac{2}{C_q a\sqrt{2g}}\sqrt{H}$$

将 $A_1=20a, A_2=10a, C_q=0.6, H=4$ m 代入得

$$t = \frac{2\times 20\times 10a^2}{(20+10)a^2\times 0.6}\frac{2}{\sqrt{2\times 9.81}} = 10 \text{ s}$$

[**例题 6－6**]　为了防止机车在支线尽头出轨，在轨道终点装有双缸水力缓冲器（如图 6－18 所示），机车撞击到活塞杆后，将活塞缸右端的水通过变面积的矩形孔口挤入左端，孔口面积的改变是用矩形断面的楔条来实现的。活塞缸右腔压强 p 随负载变化，左腔经常保持在 $p_0=300$ kPa 的恒定数值上。

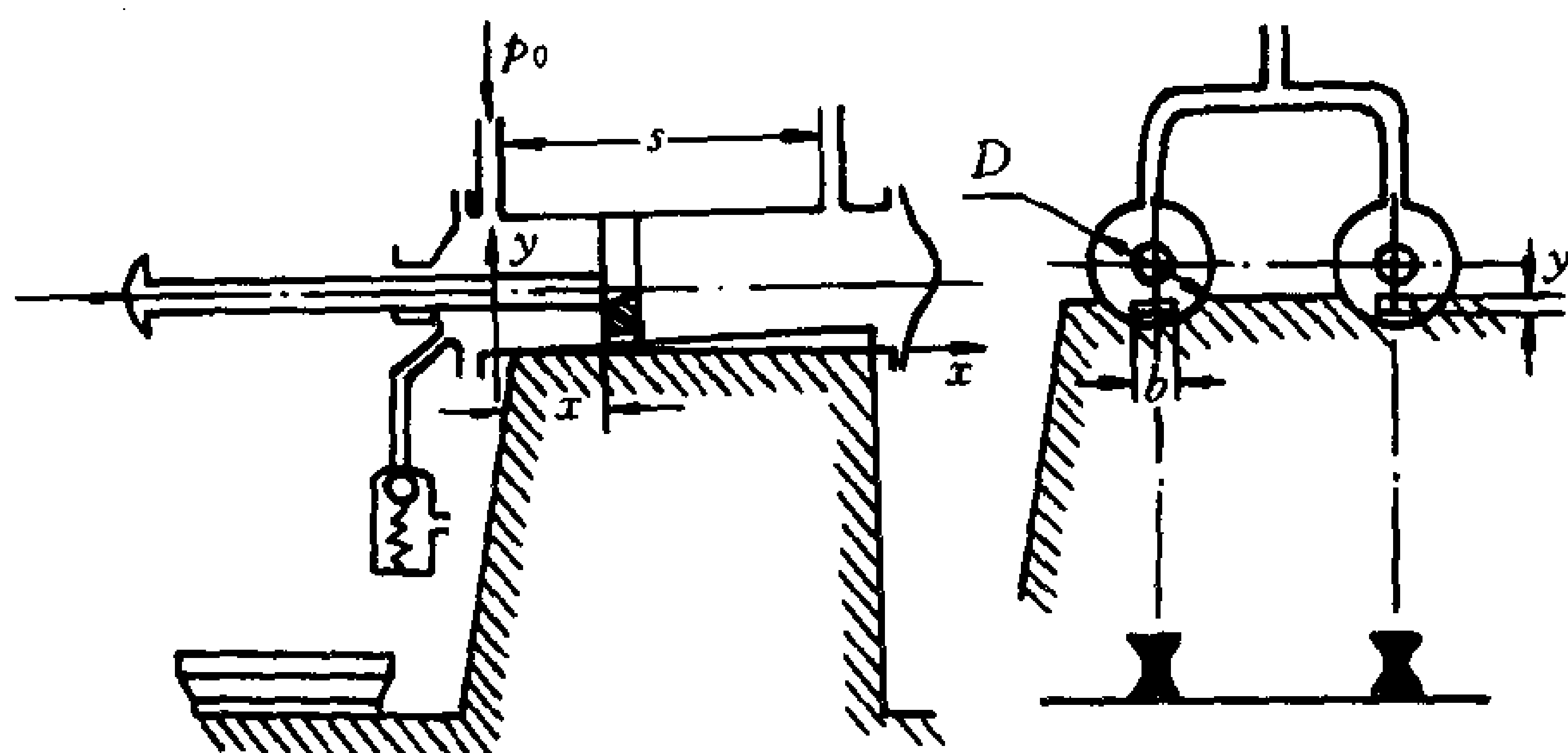


图 6－18　双缸水力缓冲器

已知机车质量 $m=500$ t，制动前的速度 $v_0=7.2$ km/h，制动距离 $s=0.8$ m，活塞缸直径 $D=300$ mm，孔口宽度 $b=52$ mm，孔口流量系数 $C_q=0.6$。

要求机车制动过程为匀减速运动，试确定孔口高度的方程式 $y=f(x)$。

［解］ 根据匀减速方程 $v_0^2-v^2=2ax$，当机车和活塞的末速度 $v=0$ 时，应当完成整个行程，$x=s$，因而活塞的匀减速度为 $a=\dfrac{v_0^2}{2s}$。

在任意位置 x 时，活塞的运动速度为 $v=\sqrt{v_0^2-2ax}$，因而在任意位置 x 时，每缸的活塞排量为 $q_V=v\dfrac{\pi}{4}D^2$，这个排量就应该是此时经孔口流出的瞬时流量。

所以
$$\sqrt{v_0^2-2ax}\,\frac{\pi}{4}D^2=C_q by\sqrt{\frac{2}{\rho}(p-p_0)} \tag{1}$$

为了解出 $y=f(x)$ 的函数式，需要先求出右缸中的压强 p，为此引用动量变化定理

$$m\mathrm{d}v=2p\frac{\pi}{4}D^2\mathrm{d}t \quad \text{（双缸，故右端乘以 2）}$$

于是可得
$$p=\frac{2m\mathrm{d}v}{\pi D^2\mathrm{d}t}=\frac{2m}{\pi D^2}a=\frac{mv_0^2}{\pi D^2 s} \tag{2}$$

将(2)式及 $v_0=2as$ 代入(1)式中，得
$$\frac{\sqrt{2a}\,\pi D^2}{4}\sqrt{s-x}=C_q by\sqrt{\frac{2}{\rho}\left(\frac{mv_0^2}{\pi D^2 s}-p_0\right)}$$

所以
$$y=\frac{\sqrt{2a}\,\pi D^2}{4C_q b\sqrt{\dfrac{2}{\rho}\left(\dfrac{mv_0^2}{\pi D^2 s}-p_0\right)}}\sqrt{s-x} \tag{3}$$

以
$$D=0.3\ \mathrm{m},C_q=0.6,m=500\times 1\,000=5\times 10^5\ \mathrm{kg}$$
$$b=0.052\ \mathrm{m},\rho=1\,000\ \mathrm{kg/m^3},s=0.8\ \mathrm{m}$$
$$v_0=\frac{7\,200}{3\,600}=2\ \mathrm{m/s},\quad a=\frac{v_0^2}{2s}=\frac{4}{2\times 0.8}=2.5\ \mathrm{m/s^2}$$
$$p_0=300\ \mathrm{kPa}=3\times 10^5\ \mathrm{Pa}$$

代入(3)式，得
$$y=0.038\sqrt{0.8-x}\ \mathrm{m}$$

据此不难设计楔条形状。从解题过程中可以看出，变化孔口面积，可以使变压强孔口出流问题转化为定压强孔口出流问题，这是缓冲器、减震器、阻尼器中常用的一种孔口设计方法。摩托车、汽车、坦克上的减震器、火炮驻退机中

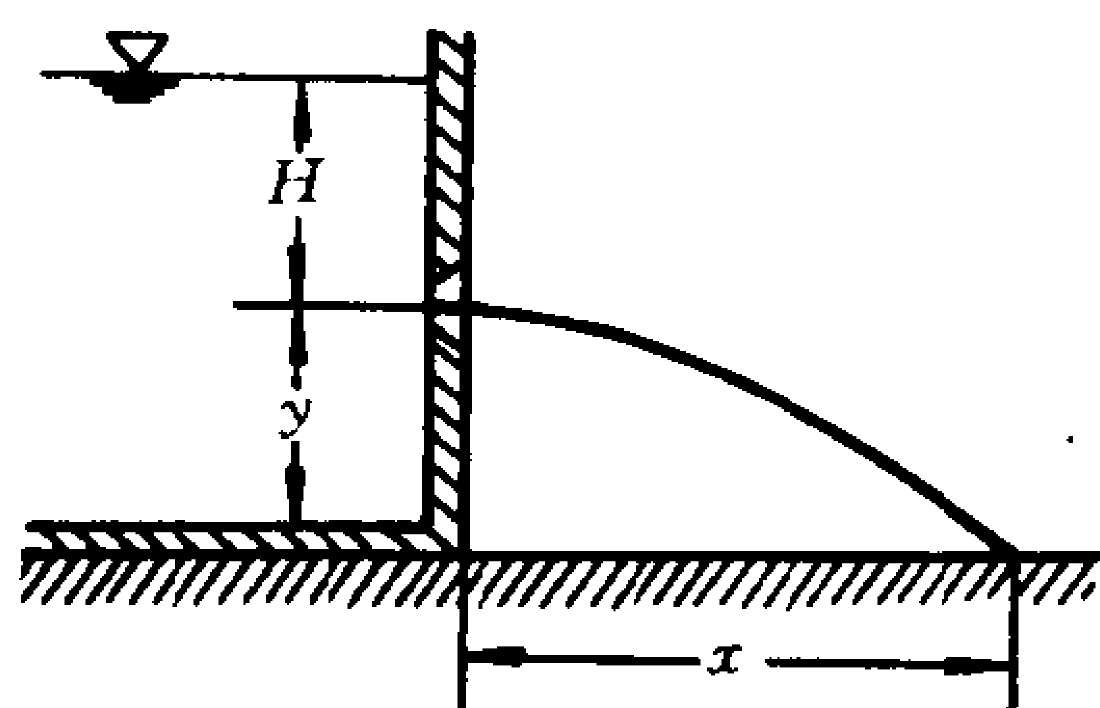
的变孔口阻尼器等等都是根据这一方法设计的。

习　题

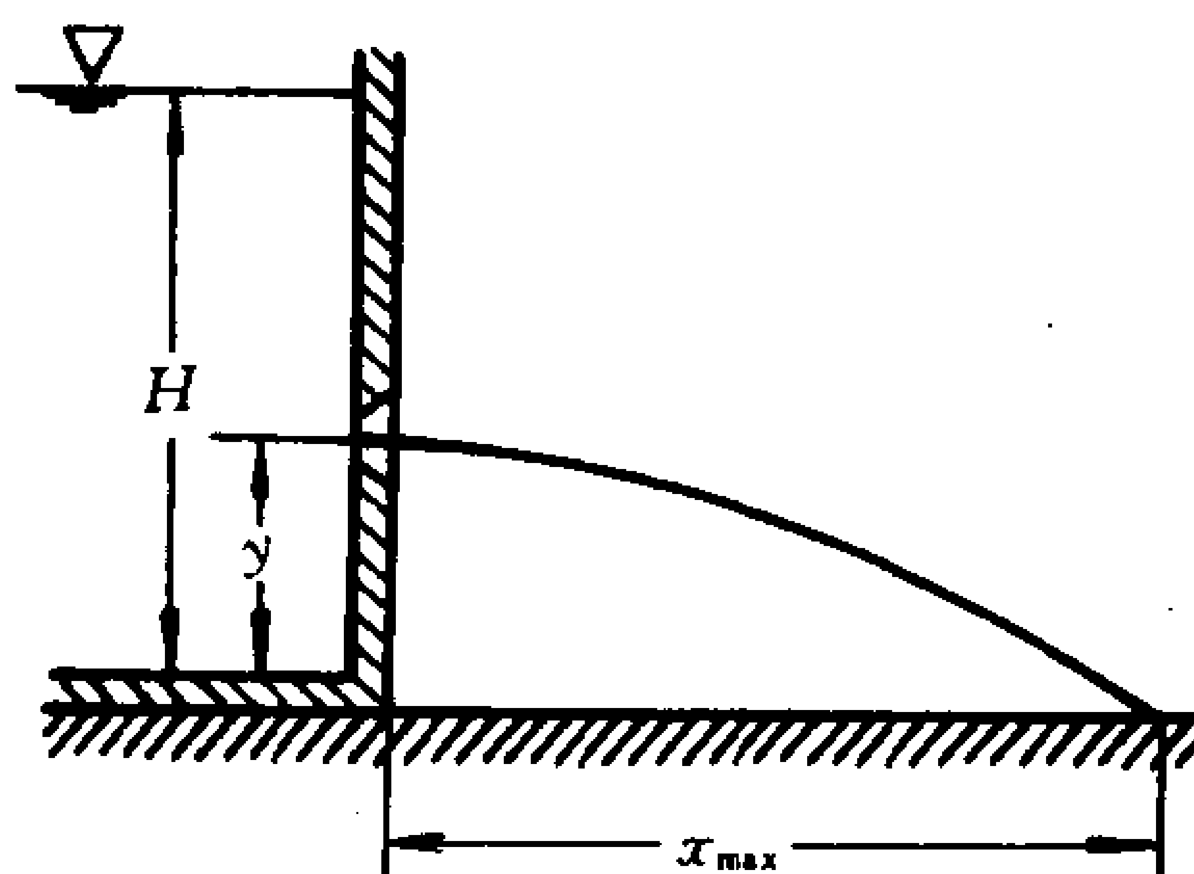
6-1. 水从薄壁孔口射出,已知 $H=1.2$ m, $x=1.25$ m, $y=0.35$ m,孔口直径 $d=0.75$ cm,5min 内流出的质量为 40 kg,试求孔口的出流系数。

[答: $C_q=0.621$, $C_v=0.964$, $C_c=0.645$, $\zeta=0.076$]

6-2. 水箱水面距地面为 H,在侧壁何处开口,可使射流的水平射程为最大? x_{max}是多少?



题 6-1 图



题 6-2 图

$\left[\text{答}: y=\dfrac{H}{2}\text{时射程最大}, x_{max}=C_v H\right]$

6-3. 密度为 900 kg/m^3 的油从直径 2 cm 的孔口射出,孔口前的计示压强为 45 000 Pa,射流对挡板的冲击力为 20 N,出流流量为 2.29 l/s,试求孔口的出流系数。

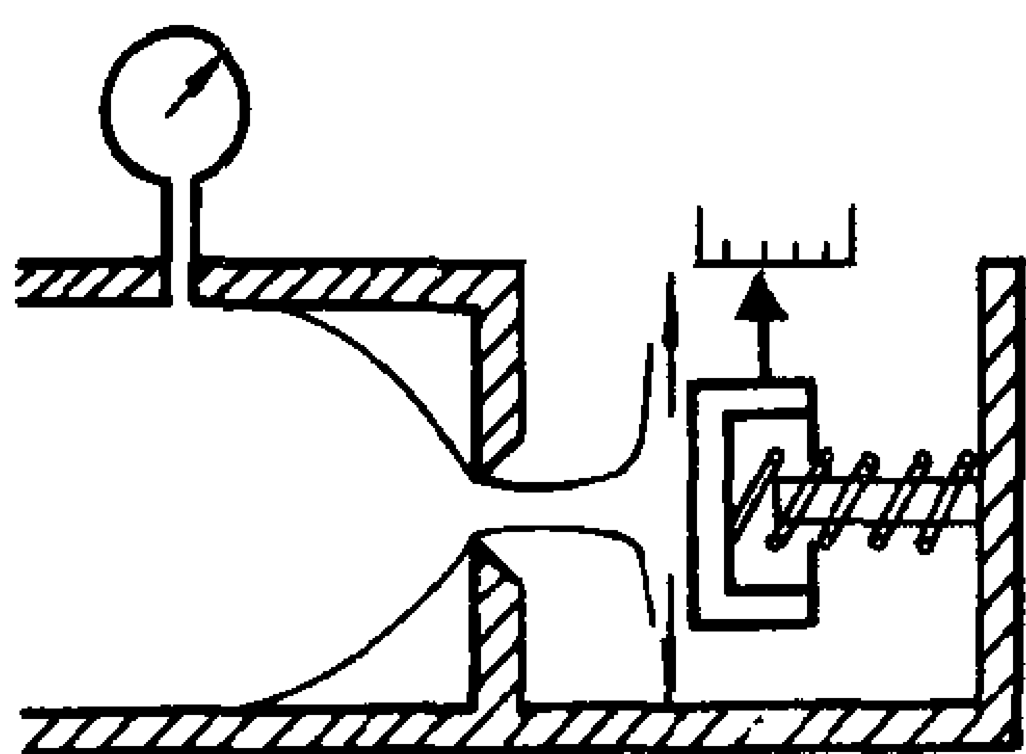
[答: $C_v=0.970$, $C_q=0.729$, $C_c=0.752$]

6-4. 在与水平成 α 角的斜面上有一个流速系数为 C_v 的孔口,它在液面下的深度为 H,从孔口射出的射流成为物理上的斜抛运动。

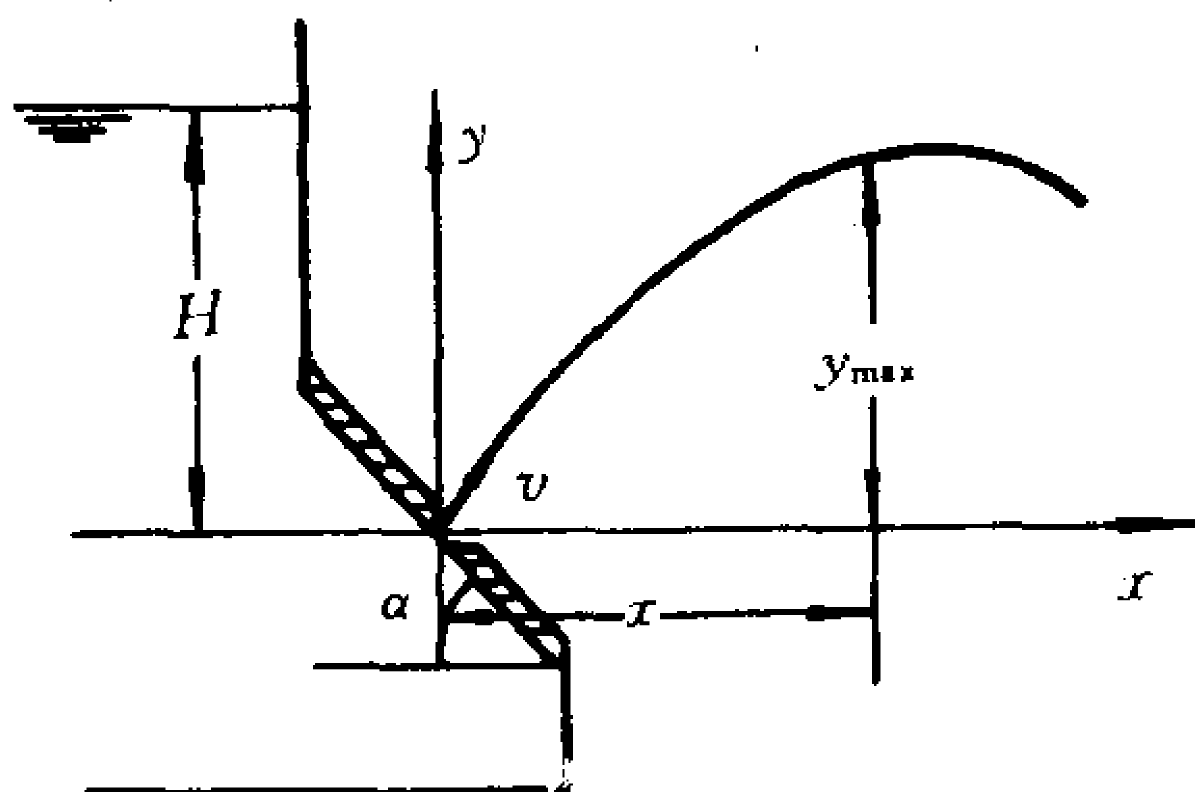
(1) 试求 x 为何值可对应于 y 的极大值? y_{max}是多少?

(2) 如果 $y_{max}=0.48H$, $\alpha=45°$,试求孔口的流速系数 C_v。

[答: $x=C_v^2 H\sin 2\alpha$, $y_{max}=C_v^2 H\sin^2\alpha$, $C_v=0.979\,8$]



题 6-3 图



题 6-4 图

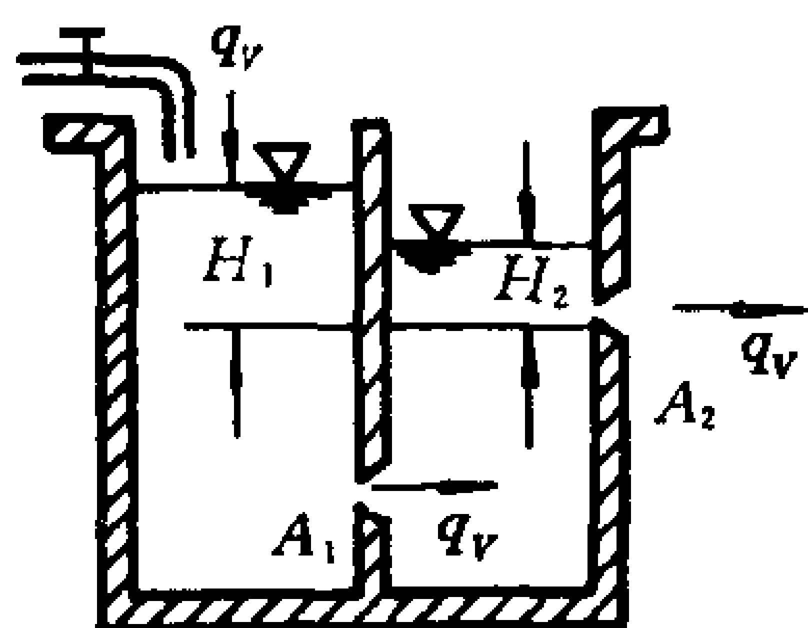
6-5. 从水管向左箱供水，然后经面积为 A_1、流量系数为 C_1 的孔口流向右箱，再从右箱经面积为 A_2、流量系数为 C_2 的孔口流出，恒定流量为 q_V。

试求图示的两个水位高度 H_1 和 H_2。

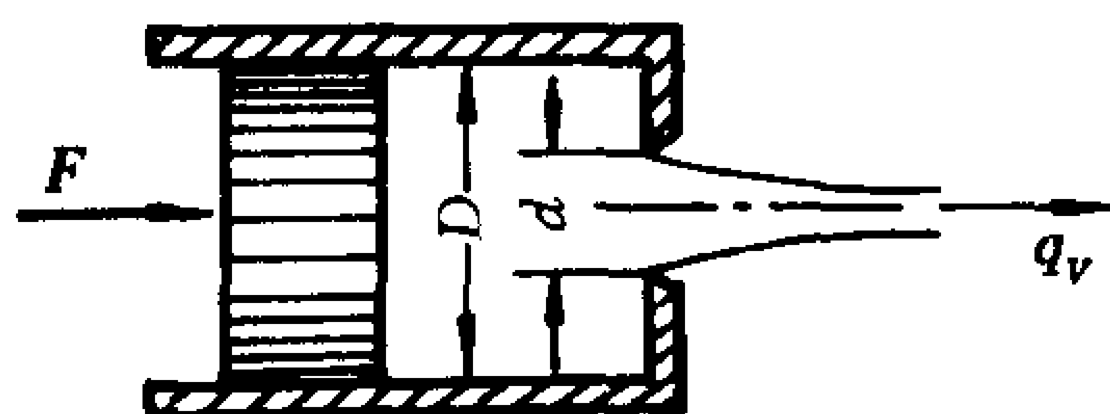
$$\left[\text{答}: H_2=\frac{q_V^2}{2gC_2^2A_2^2}, H_1=\frac{q_V^2}{2g}\left(\frac{1}{C_1^2A_1^2}+\frac{1}{C_2^2A_2^2}\right)\right]$$

6-6. 直径 $D=60$ mm 的活塞受力 $F=3\ 000$ N 后，将密度 $\rho=917$ kg/m^3 的油从 $d=20$ mm 的薄壁孔口挤出，孔口流速系数 $C_v=0.97$，流量系数 $C_q=0.63$，试求孔口流量及作用在油缸上的力。

[答：$q_V=9.26$ l/s，$F=2\ 631$ N，方向向右]



题 6-5 图



题 6-6 图

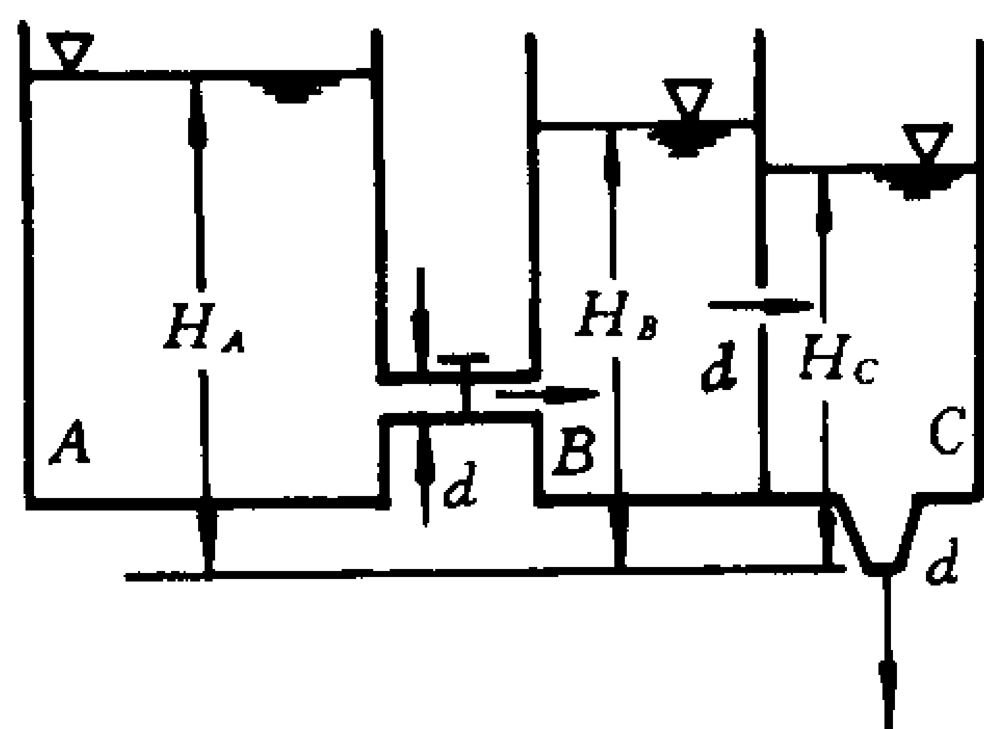
6-7. A、B 两水箱之间用有阀门的短管相连，阀门阻力系数 $\zeta=3$，进、出口阻力系数各为 0.5 和 1。B、C 两水箱之间有一个流量系数 $C_q=0.6$ 的孔板，C 水箱底部有一个流量系数 $C_q=0.96$ 的收缩管嘴。短管、孔板、收缩管嘴出口的直径均为 $d=60$ mm。

水箱 A 的水位为 $H_A=12$ m，水从 A 流入 B、C 再流入大气。试求 H_B、H_C 及流量 q_V。

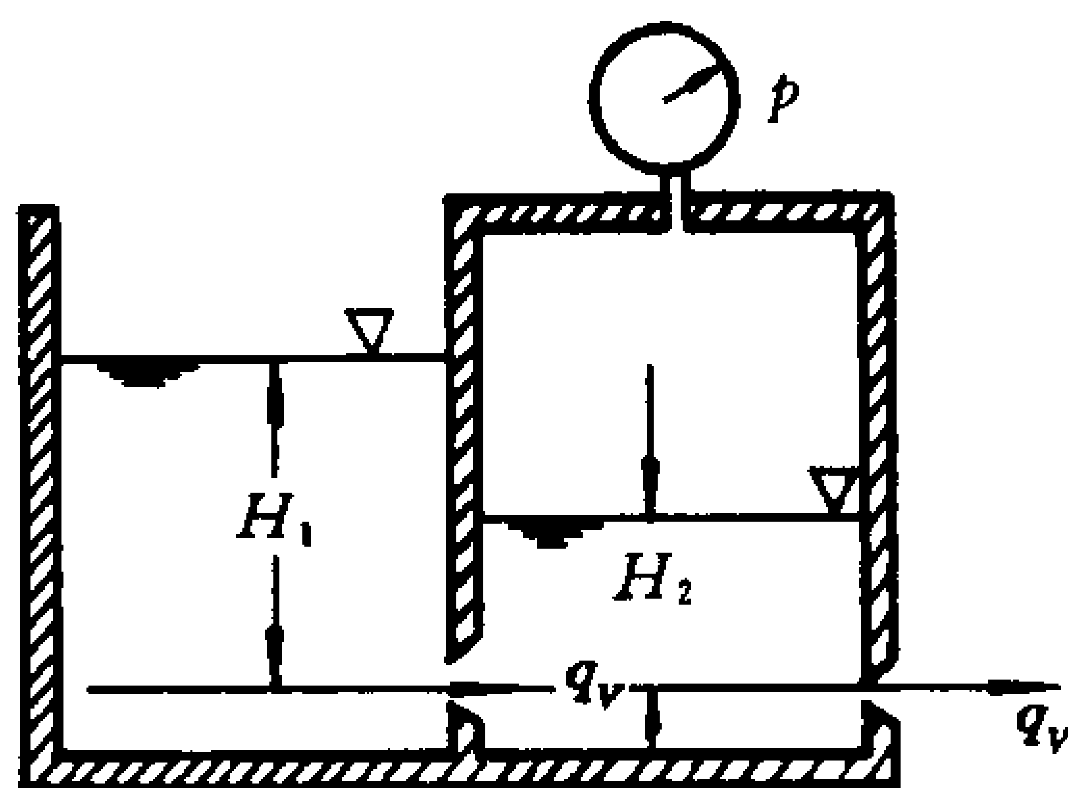
[答：$H_B=5.55$ m，$H_C=1.56$ m，$q_V=14.9$ l/s]

6-8. 水箱上有两个完全相同的孔口，$H_1=6\ \text{m}$，$H_2=2\ \text{m}$，试求密封容器上的计示压强 p。

[答：$p=9\ 810\ \text{Pa}$]



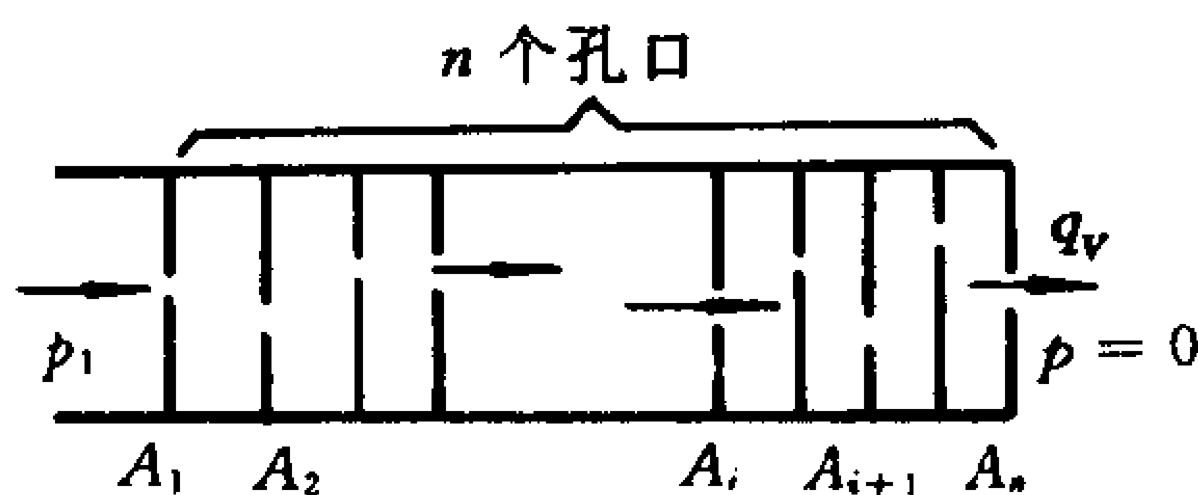
题 6-7 图



题 6-8 图

6-9. 气体消音器由 n 层孔板组成，每层上的孔口面积各自不等，分别为 $A_1\cdots A_i\cdots A_n$，但这 n 个孔口的流量系数均等于 C_q，起始压强为 p_1，末尾压强 $p_{n+1}=0$，气体密度为 ρ，试求其流量公式。

$$\left[\text{答：}q_V=C_q\frac{\sqrt{\dfrac{2p_1}{\rho}}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{A_i^2}}}\right]$$

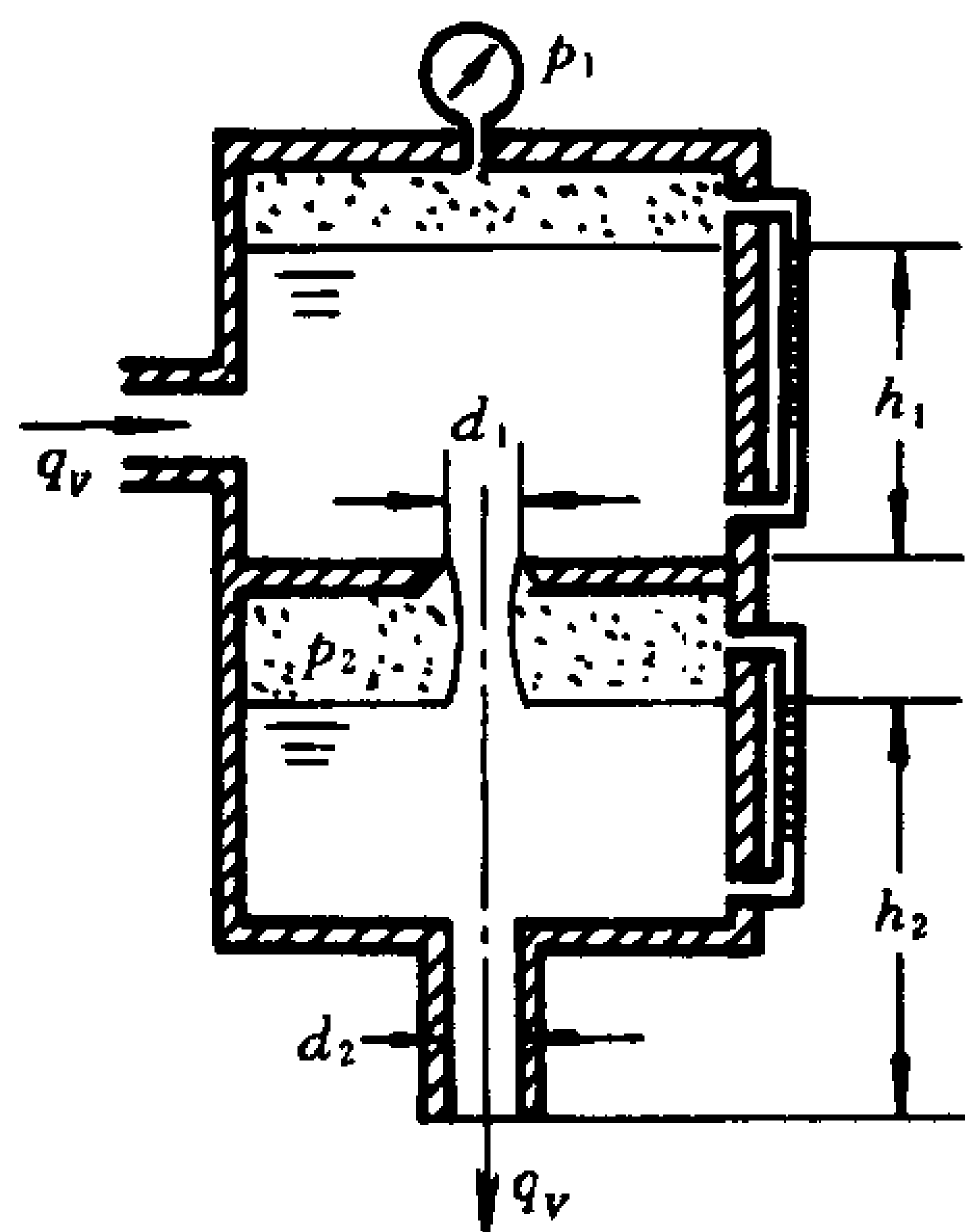


题 6-9 图

6-10. 水从密封水箱上部经直径 $d_1=30\ \text{mm}$ 的薄壁孔口流入下部，再经 $d_2=20\ \text{mm}$ 的厚壁孔口流入大气。

在定常流动状态下，压强表的读数为 $p_1=0.5\times10^5\ \text{Pa}$。玻璃管中的水位为 $h_1=2\ \text{m}$，$h_2=3\ \text{m}$，试求流量 q_V 及水箱下部水面上的计示压强 p_2。

[答：$q_V=3.13\ \text{l/s}$，$p_2=0.443\times10^5\ \text{Pa}$]



题 6-10 图

6-11. 二联水箱上装有三个处于同一高度且面积同为 $3\ \text{cm}^2$、流量系数同为

0.6 的孔口，进水流量为 $q_V=3$ l/s。在定常流动情况下，试求：q_{V1}、q_{V2}、q_{V3}、H_1、H_2 各为若干。

[答：$q_{V1}=1.76$ l/s，$q_{V2}=q_{V3}=1.24$ l/s，$H_1=4.858$ m，$H_2\doteq 2.429$ m]

6-12. 在水箱水面下 $H=3$ m 处装一个收缩－扩张的文丘里管嘴，其喉部直径 $d_1=4$ cm，喉部绝对压强 $p_1=24.5$ kPa，大气压强 $p_0=101.3$ kPa。

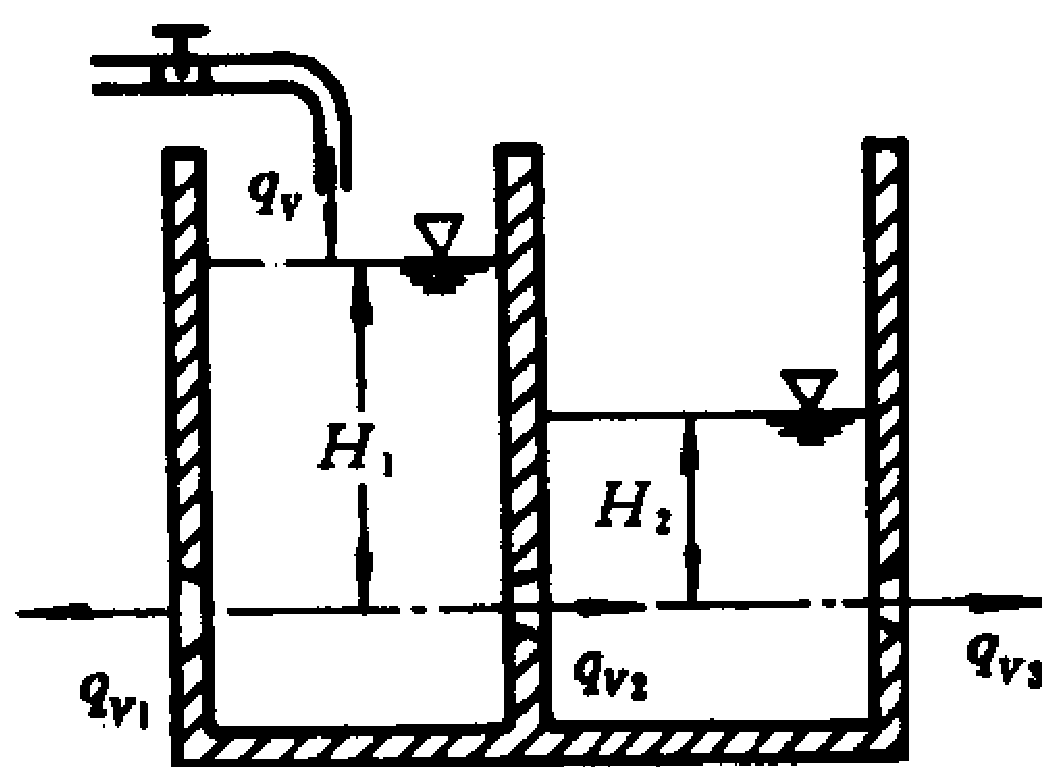
收缩部分的阻力可以忽略不计，扩张部分的损失假定是从 d_1 突然扩大到 d_2 所产生损失的 20%，试求：

(1) 喉部的流速 v_1，

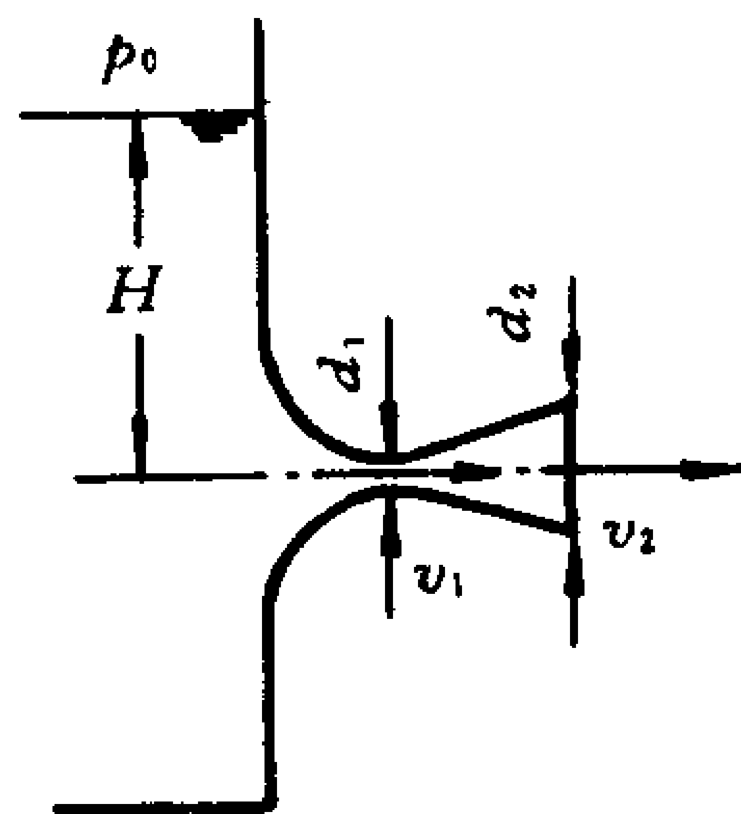
(2) 流量 q_V，

(3) 出口的流速 v_2 和出口断面的直径 d_2。

[答：$v_1=14.58$ m/s，$q_V=0.018\ 3$ m^3/s，$v_2=6.84$ m/s，$d_2=5.84$ cm]



题 6－11 图



题 6－12 图

6-13. p_1 经过换向阀的上部环形孔口降低为 p_x，p_x 为驱动执行机构的压强，p_x 再经过换向阀的下部环形孔口降低为 p_2。

已知换向阀的最大开口量 $s=4$ mm，随着开口量 x 的不同，p_x 值亦不同。当 $p_1=10^3$ kPa，$p_2=0$ 时，试根据两个孔口的压强差和流量关系式：

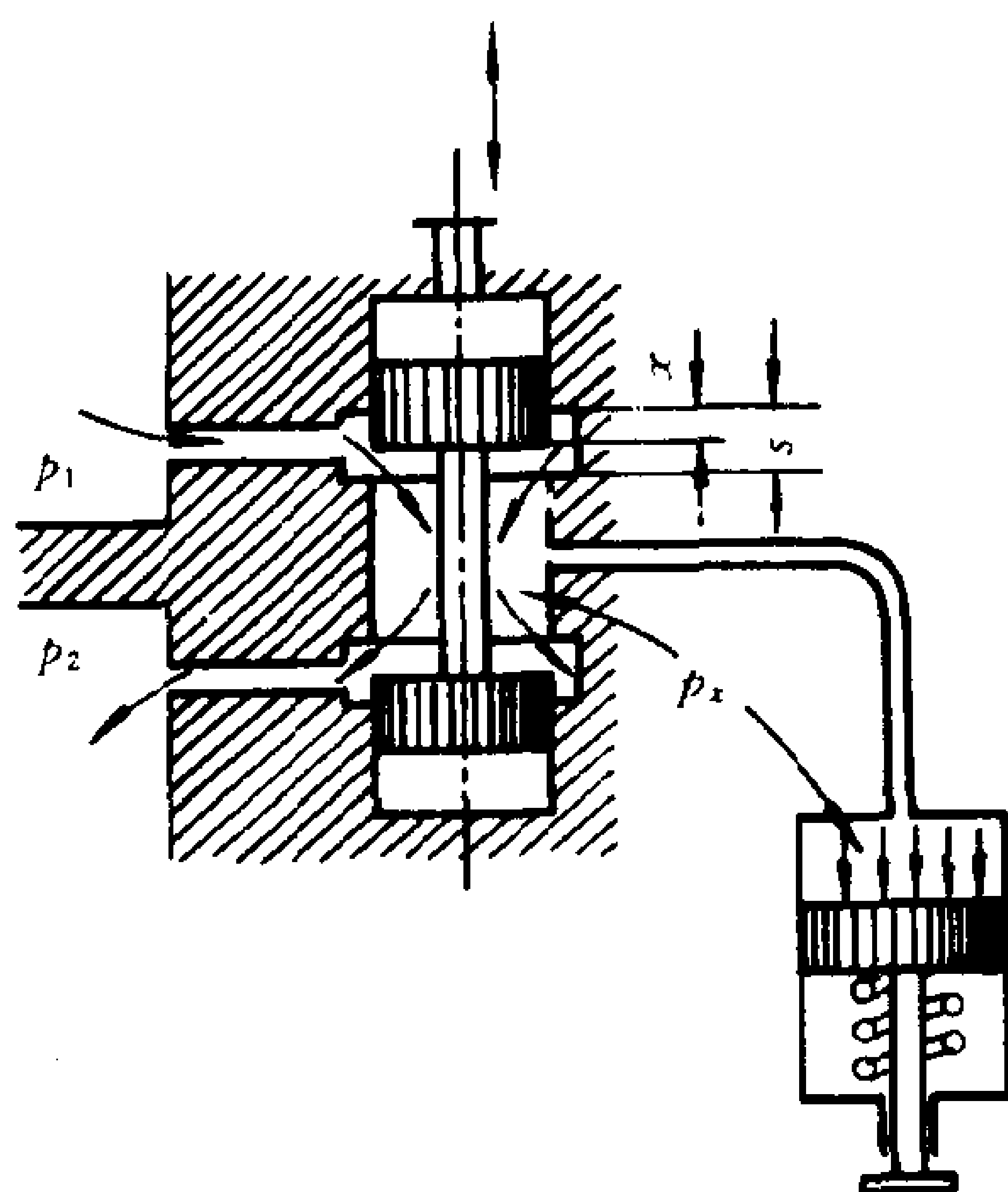
$$\left.\begin{aligned}\frac{p_1-p_x}{\rho g}&=k\left(\frac{q_V}{s-x}\right)^2\\ \frac{p_x-p_2}{\rho g}&=k\left(\frac{q_V}{x}\right)^2\end{aligned}\right\}\quad(\text{式中 } k \text{ 为结构常数})$$

求出 x 分别等于 0、1、2、3、4 mm 时的 p_x 之值。

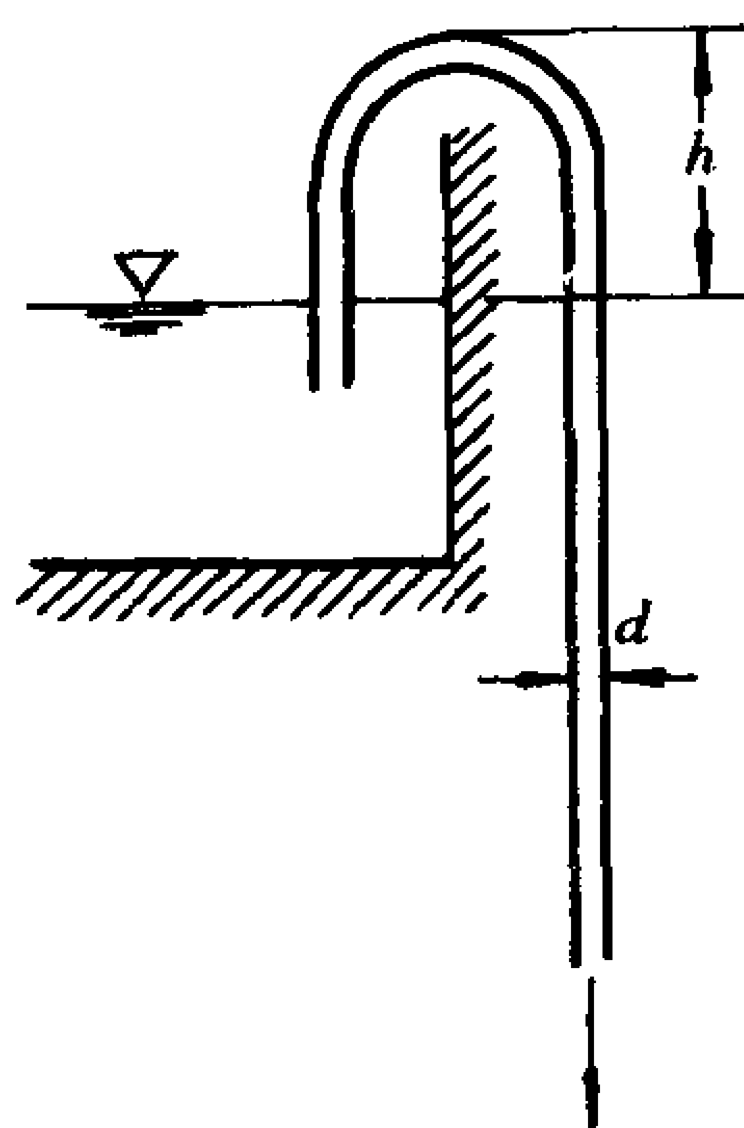
[答：p_x 分别等于 1 000、900、500、100、0 kPa]

6-14. 用直径 $d=6$ cm 的光滑虹吸管从水箱中引水，虹吸管最高点距水面 $h=1$ m，水温为 20 ℃，不计管道损失，试求不产生气穴的最大流量是多

少？



题 6－13 图



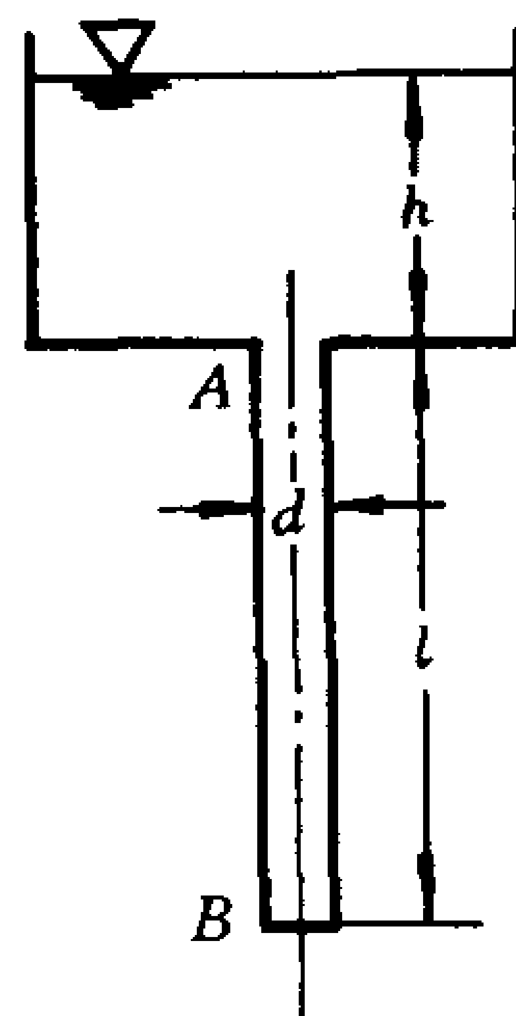
题 6－14

[答：$q_{V\max}=0.037\ 8\ \mathrm{m^3/s}$]

6－15. 水箱中恒定水深为 $h=5$ m，铅直管 AB 的直径为 $d=20$ cm，为了不使管道入口 A 处发生气穴现象，试求(1)水温 $t=20$ ℃与(2)水温 $t=60$ ℃时的最大允许管长 l 是多少？最大理论流量是多少？

忽略损失，20 ℃与 60 ℃时水的汽化压强可查表 1－7，相对密度可查表 1－2。大气压强为 $p_B=$ 101 300 Pa。

[答：20 ℃时 $l_{\max}=10.11$ m，$q_{V\max}=0.541\ \mathrm{m^3/s}$；60 ℃时 $l_{\max}=8.43$ m，$q_{V\max}=0.510\ \mathrm{m^3/s}$]

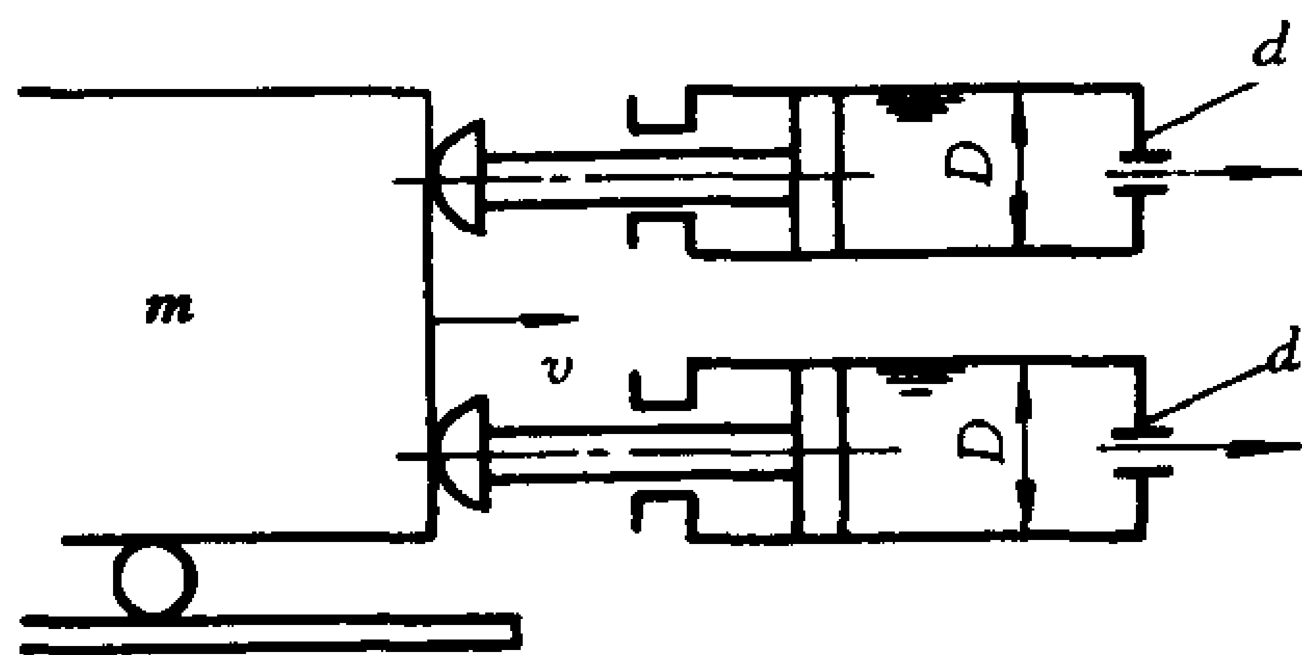


题 6－15 图

6－16. 用双缸制动器阻止铁路支线上的机车出轨，已知制动器活塞直径 $D=200$ mm，机车质量 $m=$ 25 t，孔口流量系数 $C_q=0.65$，制动缸中的液体用水，其密度为 1 000 kg/m³，孔口直径 $d=40$ mm。

试求使机车速度从 $v_1=32$ km/h 降为 $v_2=8$ km/h 所需的制动距离和制动时间。

[答：$s=0.746$ m，$t=0.18$ s]

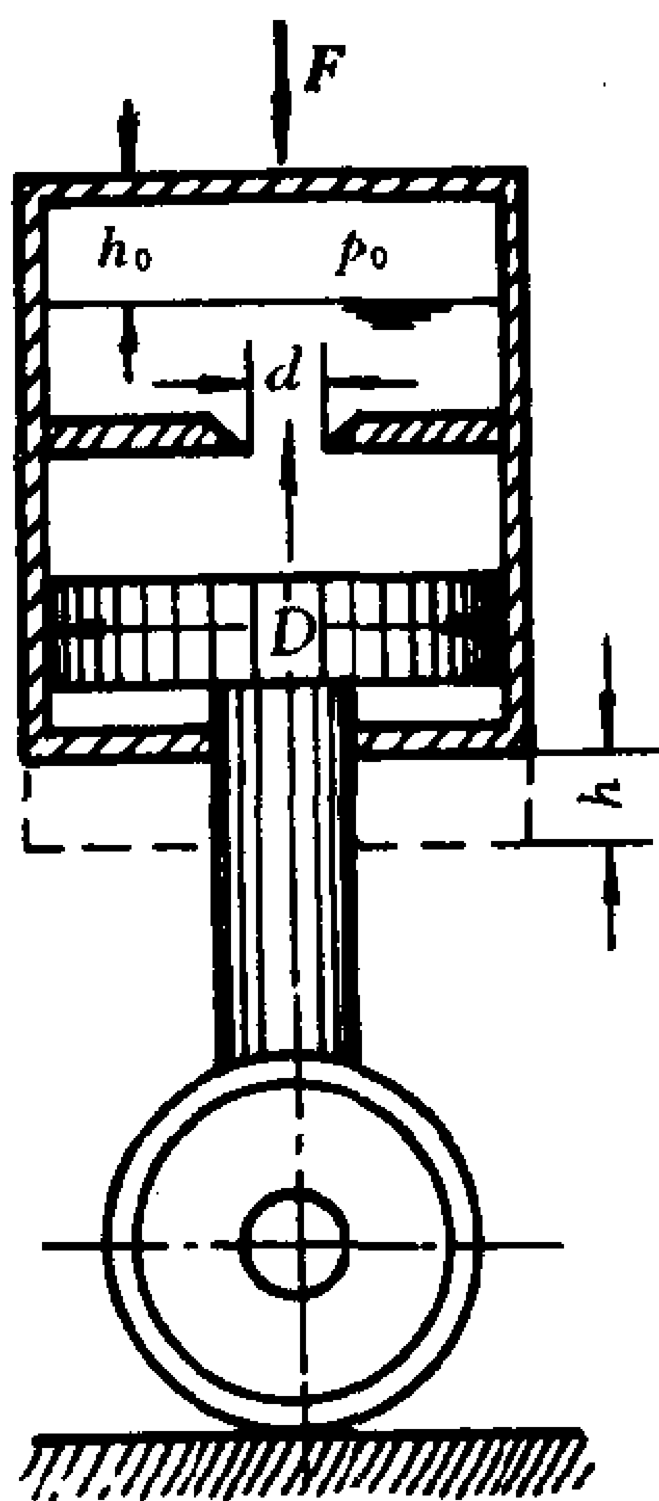


题 6－16 图

6－17. 飞机起落架着地时，减震器油缸上受到的载荷为 $F=5\times10^4$ N。试求油缸下降距离 h 与下降时间 t。

已知活塞直径 $D=120$ mm，孔口直径 $d=3$ mm，孔口流量系数 $C_q=0.78$，油缸上部空气的初始计示压强 $p_0=32\times10^5$ Pa，初始高度 $h_0=150$ mm，空气的体积模量 $K=10^7$ Pa，油液密度 $\rho=900$ kg/m³。

[答：$h=18.3$ mm，$t=0.72$ s]



题 6－17 图

第七章 缝隙流动

在机械中存在着充满油液的各种形式的配合间隙，如活塞与缸筒间的环形间隙、轴与轴承间的环形间隙、工作台与导轨间的平面间隙、圆柱与支承面间的端面间隙等等。这些尺寸不大的间隙或缝隙为液体流通提供了几何条件，只要缝隙两端形成压强差，或者这些配合机件发生相对运动，液体在缝隙中就会产生流动。这种所谓的缝隙流动对机械性能有许多影响。

滑动轴承、静压支承是依靠缝隙流动的支承力得以工作的，相对运动机件间的摩擦力是靠缝隙流动得以减轻的。但是缝隙流动的流量有时就是液体机械中的液体泄漏，这导致容积效率的降低。凡此种种都说明要研究和改善机械性能，必须了解缝隙流动的特性。

缝隙流动对液压传动的影响尤其显著。液压泵、液动机、换向阀等液压元件处处存在着缝隙流动问题。缝隙过小则增大了摩擦，缝隙过大又增加了泄漏，如何选择所谓最佳间隙是设计液压元件的一个重要问题。

本章重点是平行平面缝隙、环形缝隙和平行圆盘缝隙。最后一节，对倾斜平面缝隙只作概略介绍。缝隙尺寸很小，油液粘度又较大，因此缝隙流动一般均可看作是层流，缝隙流动的解法与圆管层流的解法是十分类似的。

§7-1 平行平面缝隙与同心环形缝隙

研究如图 7-1 所示的平行平板间的液体流动，一方面是因为

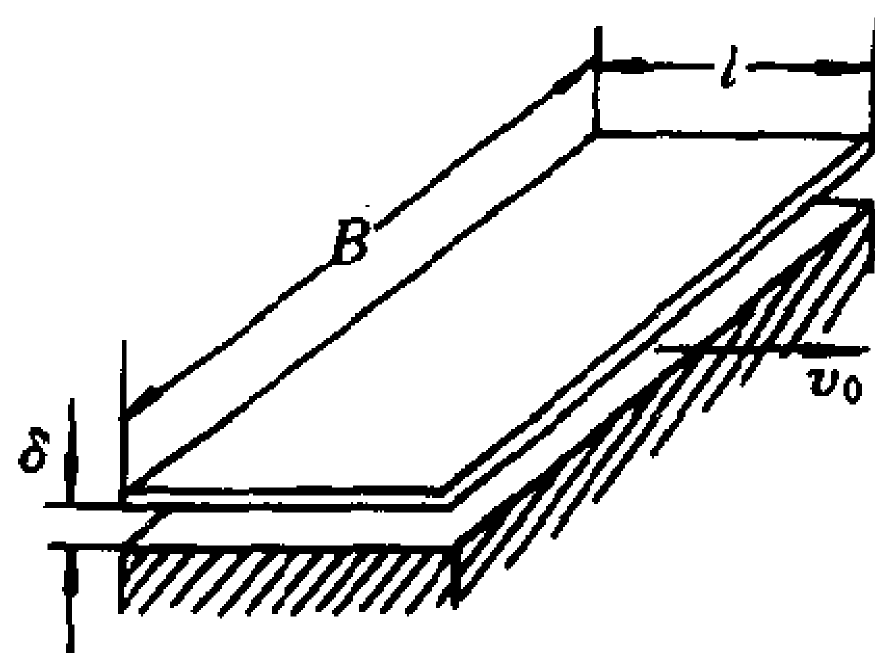


图 7-1 平面缝隙

工程上本来就有平面缝隙问题，另一方面如图 7-2 所示的活塞与缸筒之间的同心环形缝隙在平面上展开以后也是平行平板间的流动问题，因此如图 7-3 所示的剖面图实质上代表这两种情况，这种流动是其他各种缝隙流动的基础。

设平板长为 l，宽为 B，缝隙高度为 δ，取如图 7-3 所示的坐标轴。我们来讨论缝隙两端具有压强差 $\Delta p = p_1 - p_2$、且上面平板（活塞）以匀速度 v_0 运动情况下，平板间液体的流动问题。

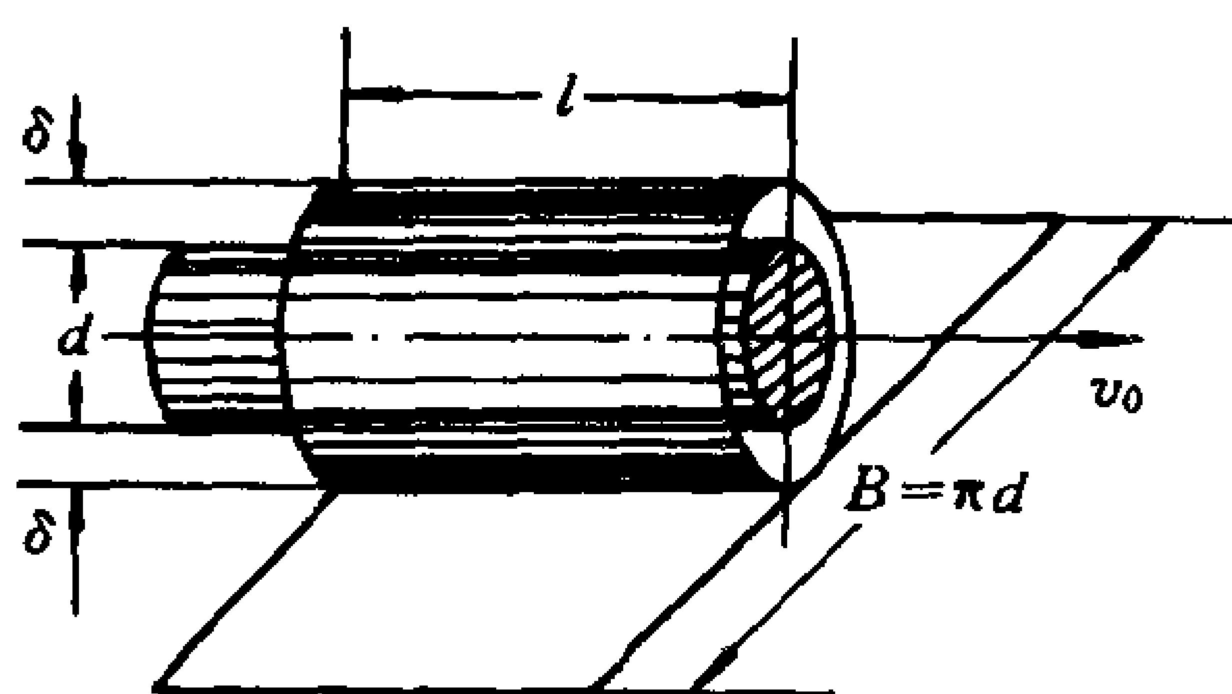


图 7-2 同心环形缝隙

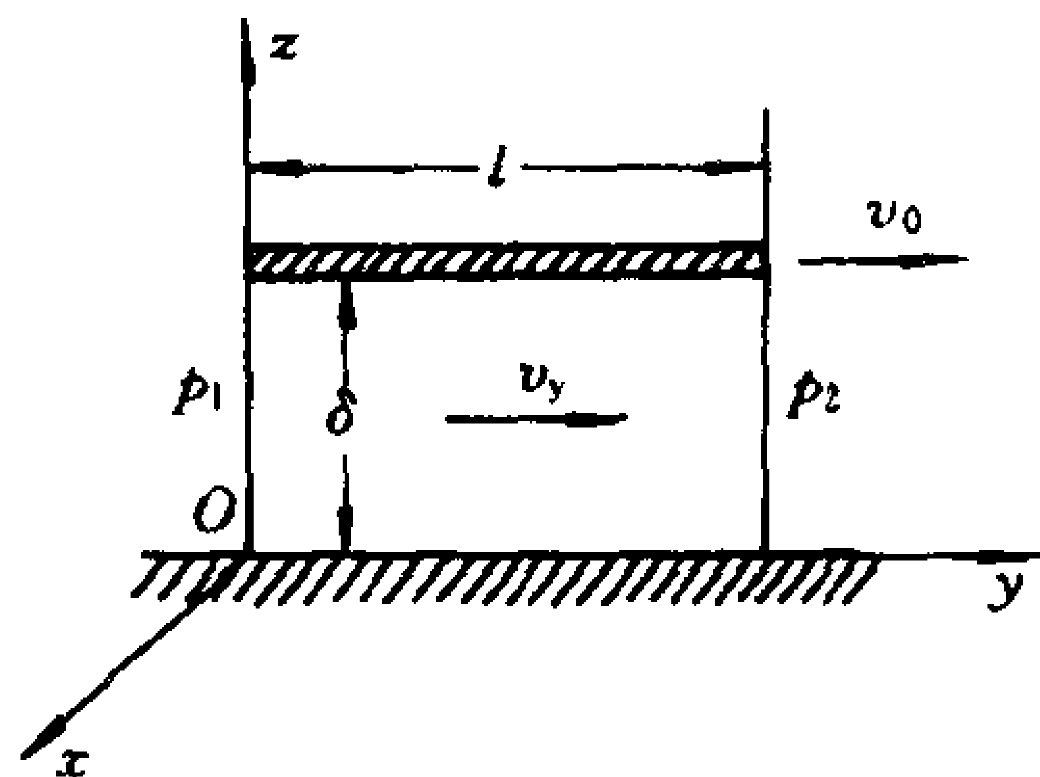


图 7-3 平行平板间的流动

一、速度分布规律

层流时流体运动速度 $v_y = v_y(z)$，$v_x = v_z = 0$，再考虑到定常、连续、不可压缩、忽略质量力，则 N-S 方程可以简化为

$$
\left.\begin{aligned}
-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}=0\\
-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0\\
-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=0
\end{aligned}\right\} \tag{7-1}
$$

后两个公式说明，压强 p 只是沿 y 方向变化。又因为平板缝隙大小沿 y 方向是不变的，因而 p 在 y 方向的变化率应该是均匀下降的，于是

$$
\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=-\frac{\Delta p}{l} \tag{7-2}
$$

速度 v_y 只是 z 的函数，因而 $\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}$ 可以写成 $\frac{\mathrm{d}^2 v_y}{\mathrm{d}z^2}$，于是(7－1)式变成

$$
\frac{\mathrm{d}^2 v_y}{\mathrm{d}z^2}=\frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=-\frac{\Delta p}{\mu l} \tag{7-3}
$$

这就是平板缝隙中层流运动的常微分方程式，对 z 积分两次得

$$
v_y=-\frac{\Delta p}{2\mu l}z^2+C_1 z+C_2 \tag{7-4}
$$

用边界条件：

$$
\left.\begin{aligned}
z=\delta,\ v_y=v_0\\
z=0,\ v_y=0
\end{aligned}\right\} \tag{7-5}
$$

可以确定出积分常数

$$
C_1=\frac{\Delta p}{2\mu l}\delta+\frac{v_0}{\delta},\ C_2=0
$$

于是(7－4)式变成

$$v_y = \frac{\Delta p}{2\mu l}(\delta z - z^2) + \frac{v_0 z}{\delta} \tag{7-6}$$

这就是平行平板间的速度分布规律，公式右端包括两项：第一项是由压强差造成的流动，v_y 与 z 的关系是二次抛物线规律，如图 7－4(1)，这种流动称为压差流，也称为哈根－伯肃叶流；第二项是由上平板运动造成的流动，v_y 与 z 是一次直线规律，如图 7－4(2)所示，这种流动称为剪切流，也称为库埃特(Couette)流。

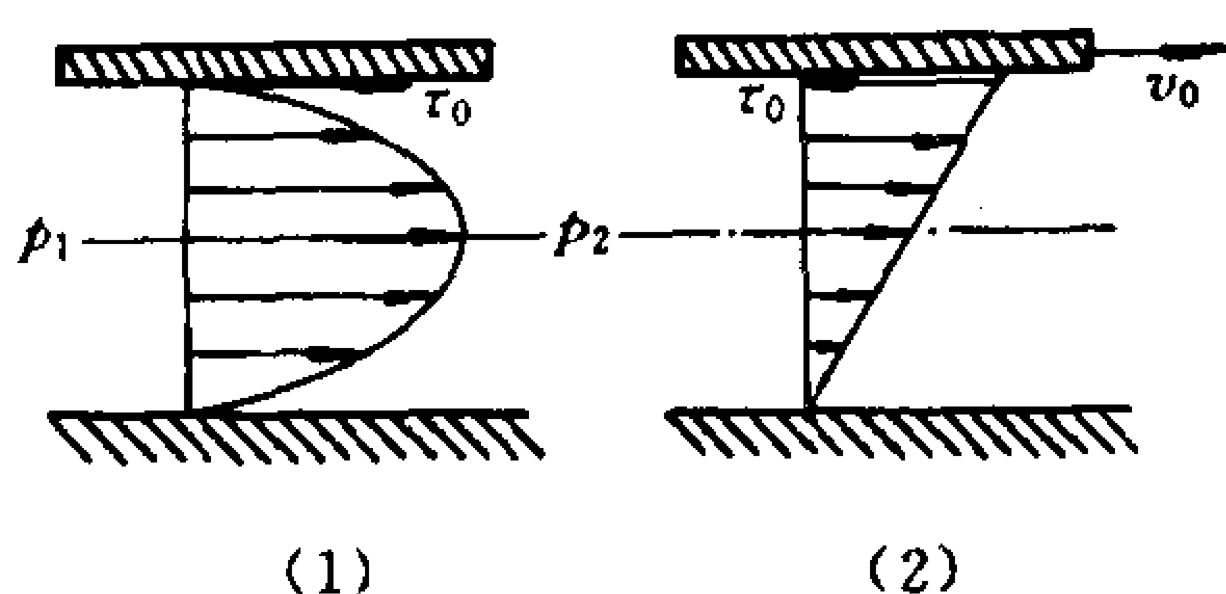


图 7－4　压差流与剪切流

(7－6)式是由这两种简单流动合成的结果，但实际情况下 Δp 有正有负，v_0 亦有正有负，故(7－6)式的速度分布图形可能有如图 7－5 所示的四种形式。(4)、(3)两种与(1)、(2)互成对称，所

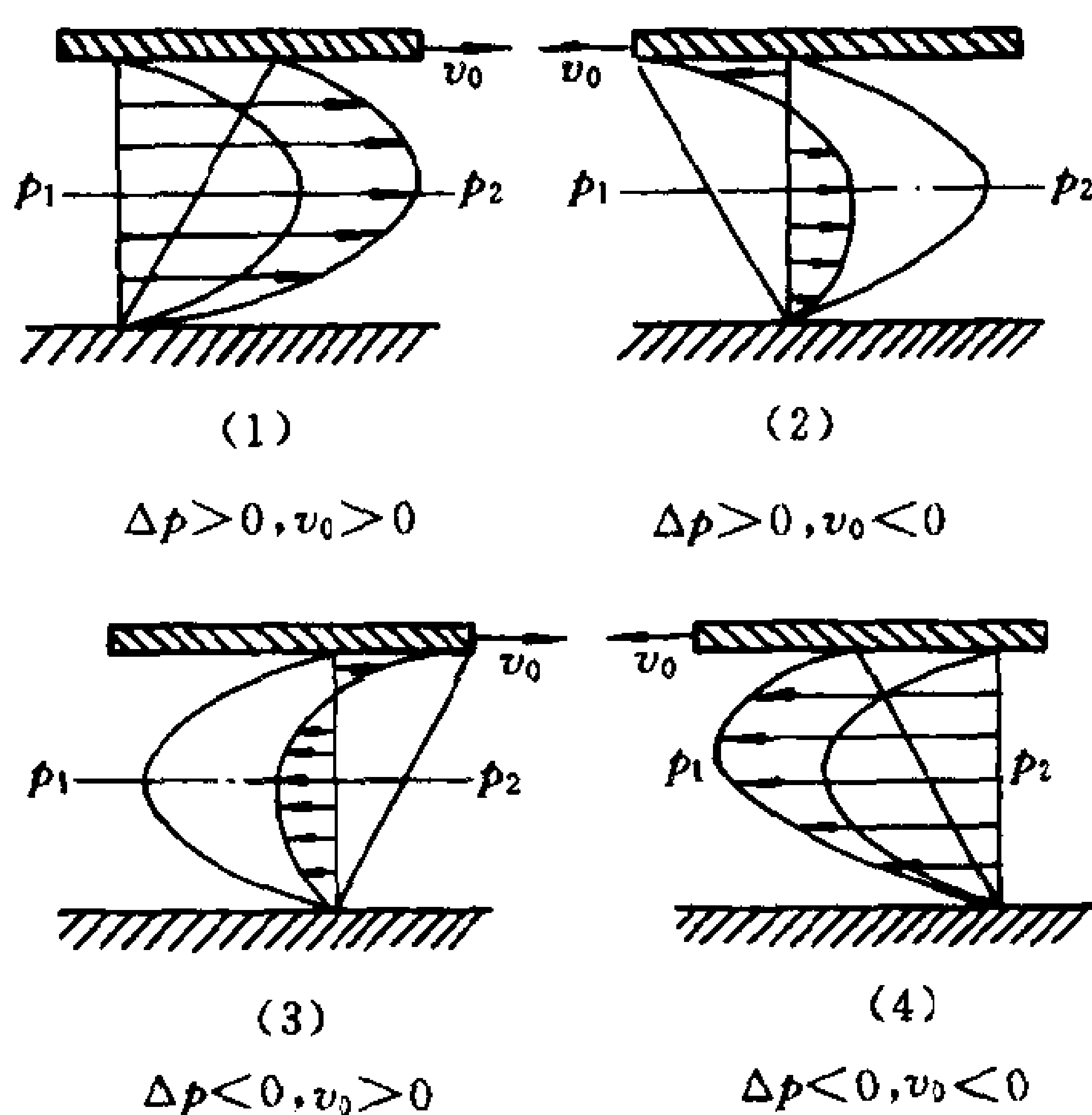


图 7－5　平行平板间的速度分布

以完全不同的分布图形只有(1)、(2)两种。(1)是压强差方向与平板运动方向一致的情况,(2)是压强差方向与平板运动方向相反的情况。

二、切应力与摩擦力

将(7-6)式代入牛顿内摩擦定律中,即可得切应力 $\tau=\tau(z)$ 的分布规律

$$\tau=\mu\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}z}=\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{\Delta p}{2\mu l}(\delta z-z^2)+\frac{v_0 z}{\delta}\right]$$

$$=\frac{\Delta p}{2l}(\delta-2z)+\frac{\mu v_0}{\delta} \tag{7-7}$$

当 $z=\delta$ 时,可得上平板边界处流体中的切应力为

$$\tau=-\frac{\Delta p\delta}{2l}+\frac{\mu v_0}{\delta} \tag{7-8}$$

τ 乘以平板面积 Bl,即得作用在边界流体上的摩擦力为

$$F=\left(-\frac{\Delta p\delta}{2l}+\frac{\mu v_0}{\delta}\right)Bl=\left(-\frac{\Delta p\delta}{2}+\frac{\mu v_0 l}{\delta}\right)B \tag{7-9}$$

将(7-8)、(7-9)式改变符号,即为流体作用于运动平板上的切应力和摩擦力

$$\tau_0=\frac{\Delta p\delta}{2l}-\frac{\mu v_0}{\delta} \tag{7-10}$$

$$F_0=\left(\frac{\Delta p\delta}{2}-\frac{\mu v_0 l}{\delta}\right)B \tag{7-11}$$

可以看到,对运动平板的摩擦力也是由两种运动造成的。压差流所产生的摩擦力与压差 Δp 的方向相同,而剪切流所产生的摩擦力则与 v_0 的方向相反。这就是图 7-4 上所标出的切应力 τ_0 的方向。由此可见当 Δp 与 v_0 反号时,如图 7-5 中的(2)、(3),这两种摩擦力的作用方向相同。当 Δp 与 v_0 同号时,如图 7-5 中的(1)、(4),这两种摩擦力的作用方向相反。

三、流量与无泄漏缝隙

在机械中设计缝隙只是为了实现机件间的相对运动。经过缝隙的流量往往并不是工作上的需要，而是无法避免的液体泄漏。这里讨论流量问题与管路输送的目的不同，计算流量只是为了找出减少泄漏的依据。

在图 7－3 上取微元面积 $B\mathrm{d}z$，乘以 v_y 则 $v_yB\mathrm{d}z$ 为微元流量，从 $z=0$ 到 δ 积分，则得

$$q_V = \int_0^\delta v_y B\mathrm{d}z = B\int_0^\delta \left[\frac{\Delta p}{2\mu l}(\delta z - z^2) + \frac{v_0 z}{\delta}\right]\mathrm{d}z$$

$$= B\left(\frac{\Delta p\delta^3}{12\mu l} + \frac{v_0\delta}{2}\right) = \frac{B\delta}{2}\left(\frac{\Delta p\delta^2}{6\mu l} + v_0\right) \qquad (7-12)$$

q_V 除以过流断面面积 $B\delta$，可得平板中的平均速度为

$$v = \frac{q_V}{B\delta} = \frac{\Delta p\delta^2}{12\mu l} + \frac{v_0}{2} \qquad (7-13)$$

泄漏流量显然也是由两种运动造成的：当 Δp 与 v_0 符号相同时，如图 7－5 中的(1)、(4)，压差流的流量与剪切流的流量同号相加。当 Δp 与 v_0 的符号相反时，如图 7－5 中的(2)、(3)，压差流的流量应与剪切流的流量异号相加。例如在(7－12)式中，改变 v_0 的符号，可得到 $\Delta p>0, v_0<0$ 时的流量为

$$q_V = \frac{B\delta}{2}\left(\frac{\Delta p\delta^2}{6\mu l} - v_0\right) \qquad (7-14)$$

如果令 $q_V=0$，可解出

$$\delta = \delta_0 = \sqrt{\frac{6\mu v_0 l}{\Delta p}} \qquad (7-15)$$

这种缝隙 δ_0 称为无泄漏缝隙。

无泄漏缝隙的几何原因从图 7－5(2)、(3)中可以看出。在确定的 Δp、v_0、μ、l 条件下，压差流的抛物线图形与剪切流的三角形图形面积刚好相等时，自然总泄漏流量为零。但是我们从图上也可看出，此时靠近运动平板处的速度梯度很大，因而作用在运动平板上的摩擦力也必然很大。

无泄漏缝隙对于直线往复运动的机构来说，只在 v_0 与 Δp 的方向相反的行程上是有效的，当 v_0 与 Δp 的方向相同时，仍然是有泄漏的。

无泄漏缝隙用在单程加载的油压机、水压机等机械上是有利的，在连续往复运动的油泵或液压马达上有时并不选用无泄漏缝隙而是选用下面叙述的、使功率损失最小的所谓最佳缝隙。

从(7－14)式看，如果缝隙 δ 一定，而 Δp 或 v_0 可以调整，也可以令 $q_V=0$。从而也解出无泄漏的压强差 Δp，或无泄漏的直线速度 v_0。

四、功率损失与最佳缝隙

平行平板缝隙流动的功率损失也由两部分组成。一部分是压差流的泄漏损失功率 $P_q=\Delta p q_V$，一部分是剪切流的摩擦损失功率 $P_F=Fv_0$。根据(7－9)与(7－12)式可得总的功率损失为

$$
\begin{aligned}
P &= P_q + P_F = \Delta p q_V + F v_0 \\
&= \left(\frac{\Delta p B\delta^3}{12\mu l} + \frac{F v_0 \delta}{2}\right)\Delta p + \left(-\frac{\Delta p B\delta}{2} + \frac{\mu B v_0 l}{\delta}\right) v_0 \\
&= \frac{\Delta p^2 B\delta^3}{12\mu l} + \frac{\mu B v_0^2 l}{\delta} \qquad (7-16)
\end{aligned}
$$

其中包含 $\Delta p v_0$ 的两项互相消掉了。(7－16)式中右端的第一项是纯由压差决定的泄漏功率损失，它与缝隙 δ 的三次方成正比，如图 7－6 中的 P_q 曲线所示。第二项是纯由剪切流决定的摩擦功率损失，它与缝隙 δ 成反比，如图中的 P_F 曲线所示。总的功率

损失曲线是这两条曲线的叠加，如图 7－6 中的 P 曲线。

由此可以看到 δ 过小则摩擦损失增大，δ 过大则泄漏损失增大，总的功率损失有一个由缝隙 δ_b 所决定的最小值 P_{min}。

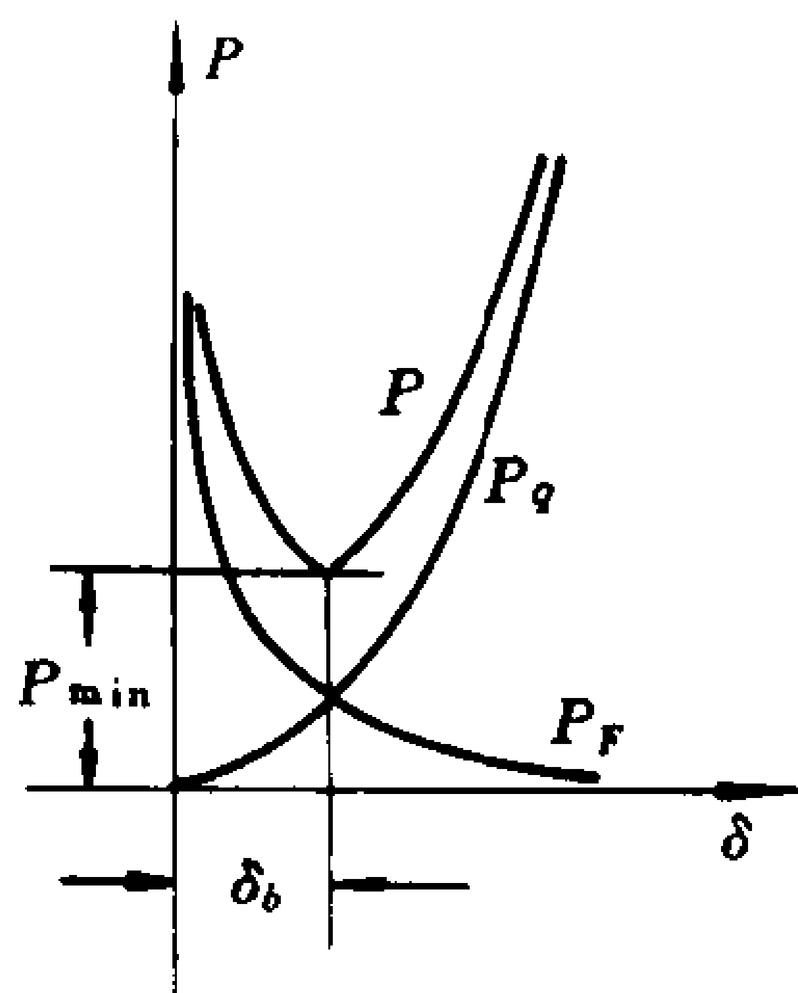


图 7－6　最佳缝隙

令 $\frac{dP}{d\delta}=0$，则

$$\frac{dP}{d\delta}=\left(\frac{-\mu v_0^2 l}{\delta^2}+\frac{\Delta p^2\delta^2}{4\mu l}\right)B=0$$

所以

$$\delta=\delta_b=\sqrt{\frac{2\mu v_0 l}{\Delta p}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\delta_0=0.577\delta_0 \qquad (7-17)$$

这种使功率损失最小的缝隙 δ_b 称为最佳缝隙，这是液压设计中所应该优先选择的缝隙，它比无泄漏缝隙 δ_0 更小。

五、压差流与剪切流

在液压泵和液压马达等处，压差流与剪切流是同时存在的，但在许多其他工程问题上，这两种流动有时却是单独存在的，例如高速轻载荷的同心滑动轴承是纯剪切流动，固定柱塞缝隙与静压支承是纯压差流动，等等。

压差流与剪切流单独存在的问题已无需再从头讨论，下面列出表 7－1，将以上公式汇总，并分别将压差流与剪切流的相应公

式分离出来，用时查表即可。

表 7－1　平行平板间的流动公式表

	压差－剪切联合流动	纯压差流	纯剪压流
流动形式	(1) (2) (1)从“±”号中取“+”号 (2)从“±”号中取“－”号		
速度分布	$v_y=\dfrac{\Delta p}{2\mu l}(\delta z-z^2)\pm\dfrac{v_0 z}{\delta}$	$v_y=\dfrac{\Delta p}{2\mu l}(\delta z-z^2)$	$v_y=v_0\dfrac{z}{\delta}$
边界流体上的切应力	$\tau=-\dfrac{\Delta p\delta}{2l}\pm\dfrac{\mu v_0}{\delta}$	$\tau=-\dfrac{\Delta p\delta}{2l}$	$\tau=\mu\dfrac{v_0}{\delta}$
流　　量	$q_V=\dfrac{\Delta pB\delta^3}{12\mu l}\pm\dfrac{v_0B\delta}{2}$	$q_V=\dfrac{\Delta pB\delta^3}{12\mu l}$	$q_V=\dfrac{v_0B\delta}{2}$
平均速度	$v=\dfrac{\Delta p\delta^2}{12\mu l}\pm\dfrac{v_0}{2}$	$v=\dfrac{\Delta p\delta^2}{12\mu l}$	$v=\dfrac{v_0}{2}$
功率损失	$P=\dfrac{\Delta p^2B\delta^3}{12\mu l}+\dfrac{\mu v_0^2Bl}{\delta}$	$P=\dfrac{\Delta p^2B\delta^3}{12\mu l}$	$P=\dfrac{\mu v_0^2Bl}{\delta}$

［**例题 7－1**］　如图 7－7 所示，已知同心轴承的长度 l，缝隙 δ，轴颈 d，每分转数 n，流体粘度 μ，试求作用在轴颈上的力矩和功率。

［**解**］　这是同心环形缝隙中的圆周运动问题，展开成平行平板后即成为一个纯剪切流动。

$$v_0=\omega\frac{d}{2}=\frac{2\pi n}{60}\cdot\frac{d}{2}=\frac{\pi nd}{60}$$

$$\tau=\mu\frac{v_0}{\delta}=\frac{\mu\pi nd}{60\delta}$$

$$F=\tau\cdot\pi dl=\frac{\mu\pi^2 nd^2 l}{60\delta}$$

$$M=F\frac{d}{2}=\frac{\mu\pi^2 nd^3 l}{120\delta}$$

$$P=M\cdot\omega=\frac{\mu\pi^2 nd^3 l}{120\delta}\cdot\frac{2\pi n}{60}=\frac{\mu\pi^3 n^2 d^3 l}{3\ 600\delta}$$

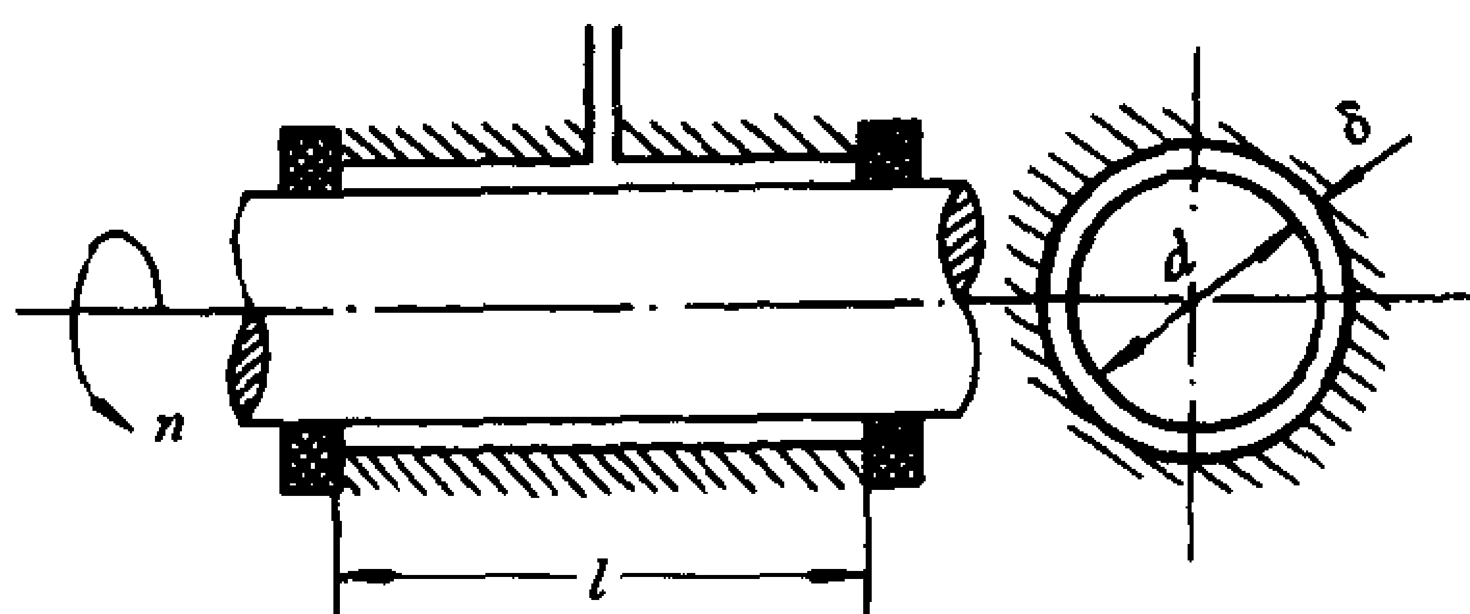


图 7－7　同心轴承

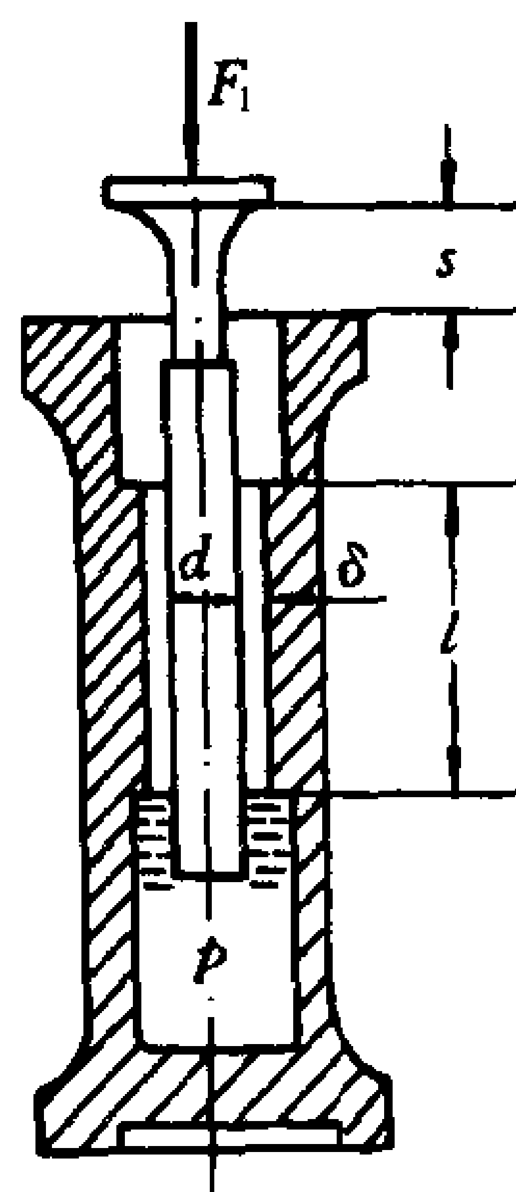


图 7－8　油压机

［**例题 7－2**］　如图 7－8 所示，油压机柱塞上受负载 $F_1=40$ N 作用后匀速下降，已知柱塞直径 $d=20$ mm，同心缝隙 $\delta=0.1$ mm，缝隙长度 $l=70$ mm，油的动力粘度 $\mu=0.08$ Pa·s，试求柱塞下降 $s=0.1$ m 所需的时间。

［**解**］　这是一个压差－剪切联合作用下的缝隙流动问题，柱塞速度 $v_0=\frac{s}{t}$ 方向向下，而压强差 $\Delta p=p$ 方向向上。

首先列出活塞上的力平衡方程

$$F=F_1+p\frac{\pi d^2}{4} \tag{1}$$

据 $F_1=\tau\pi dl$ 及表 7－1 中 τ 的公式，可得

$$F=\left(\frac{p\delta}{2l}+\frac{\mu s}{\delta t}\right)\pi dl+p\frac{\pi d^2}{4}=\frac{\mu\pi dl}{\delta}\frac{s}{t}+p\frac{\pi d(d+2\delta)}{4} \tag{2}$$

式中压强 p 尚未知,再列出流量关系式

$$v_0\frac{\pi d^2}{4}=q_V=\frac{p\pi d\delta^3}{12\mu l}-\frac{v_0\pi d\delta}{2}$$

由此解出

$$p=\frac{12\mu l}{\pi d\delta^3}\left[\frac{s}{t}\left(\frac{\pi d^2}{4}+\frac{\pi d\delta}{2}\right)\right]=\frac{3\mu l(d+2\delta)}{\delta^3}\frac{s}{t} \tag{3}$$

以(3)式代入(2)中,得

$$\begin{aligned}F&=\frac{s}{t}\left[\frac{\mu\pi dl}{\delta}+\frac{3\mu l(d+2\delta)}{\delta^3}\cdot\frac{\pi d(d+2\delta)}{4}\right]\\&=\frac{s}{t}\mu\pi l\left[4\left(\frac{d}{\delta}\right)+3\left(\frac{d}{\delta}\right)^2+\frac{3}{4}\left(\frac{d}{\delta}\right)^3\right]\end{aligned}$$

所以

$$t=\frac{s\mu\pi l}{F}\left[4\left(\frac{d}{\delta}\right)+3\left(\frac{d}{\delta}\right)^2+\frac{3}{4}\left(\frac{d}{\delta}\right)^3\right]$$

代入数值

$$\begin{aligned}t&=\frac{0.1\times0.08\times\pi\times0.07}{40}\left[4\times200+3\times200^2+\frac{3}{4}\times200^3\right]\\&=357\ \text{s}=5\ \text{min}\ 57\ \text{s}\end{aligned}$$

[**例题 7-3**] 图 7-9 的柱塞式油泵的排油压强为 $p_1=10^6$ Pa,吸油压强 $p_2=-5\times10^4$ Pa,动力粘度 $\mu=0.01$ Pa·s。曲柄 $R=2$ cm,曲柄转数 $n=600$ r/min,油缸的同心环形缝隙 $\delta=0.1$ mm,柱塞长度 $l=20$ cm,柱塞直径 $d=2$ cm。

试求曲柄每转一圈时,油泵的平均泄漏流量及平均摩擦功率。

[**解**] 曲柄转角 $\theta=\omega t$

在 $\theta=0\sim\pi$ 的半圈内,油泵排油。压强差 $\Delta p=p_1>0$,造成泄漏。而柱塞运动又使泄漏量减少。但是柱塞运动速度是变化的,因而每瞬时的泄漏量均不相同。

在 $\theta=\pi\sim2\pi$ 的半圈内,油泵吸油。压强差 $\Delta p=p_2<0$,减少泄漏。但

柱塞运动造成泄漏。泄漏量也是瞬时变化的。

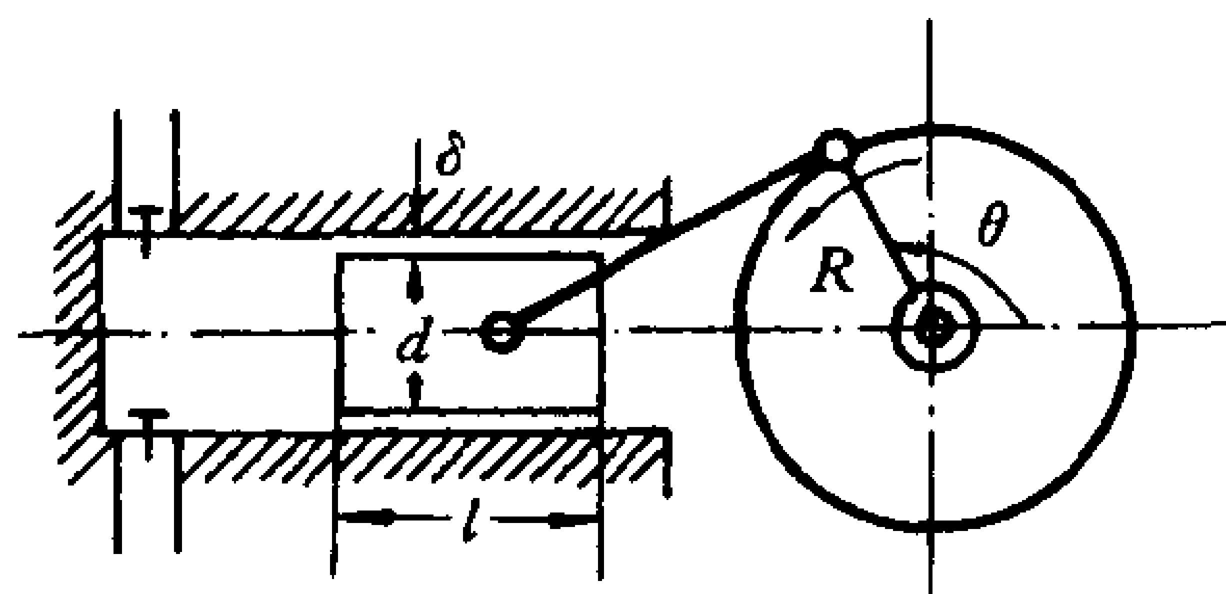


图 7-9　柱塞式油泵

首先需求出柱塞速度的表达式，因为

曲柄角速度　　$\omega=\frac{2\pi n}{60}=20\pi\ \mathrm{s}^{-1}$

连杆的切线速度　$v=\omega R=20\pi R$

由于 $R \ll l$，所以柱塞的直线运动速度近似为 $v_0=v\sin\theta=\omega R\sin\theta$

其次再写出瞬时流量的表达式，因为 $B=\pi d$，而且无论吸油或排油，柱塞运动方向与压强差的方向总是相反，故由表 7-1 可得，瞬时泄漏流量为

$$q_{V_i}=\frac{\Delta p\pi d\delta^3}{12\mu l}-\frac{\pi d\delta}{2}\omega R\sin\theta$$

每圈的平均泄漏流量为

$$\begin{aligned}
q_V&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}q_{V_i}\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\Delta p\pi d\delta^3}{12\mu l}-\frac{\pi d\delta}{2}\omega R\sin\theta\right]\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi}\frac{p_1\pi d\delta^3}{12\mu l}d\theta+\int_\pi^{2\pi}\frac{p_2\pi d\delta^3}{12\mu l}\mathrm{d}\theta-\right.\\
&\quad\left.\int_0^{2\pi}\frac{\pi d\delta\omega R}{2}\sin\theta\mathrm{d}\theta\right]\\
&=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{p_1\pi^2 d\delta^3}{12\mu l}+\frac{p_2\pi^2 d\delta^3}{12\mu l}+0\right]\\
&=\frac{\pi d\delta^3}{24\mu l}(p_1+p_2)\\
&=\frac{\pi\times0.02\times0.000\,1^3}{24\times0.01\times0.2}\times(10-0.5)\times10^5\\
&=1.24\times10^{-6}\ \mathrm{m^3/s}=1.24\ \mathrm{cm^3/s}
\end{aligned}$$

从积分中可以看到，柱塞运动中由剪切流造成的泄漏在曲柄回转一圈时的总

和是零，前半圈它减少泄漏，后半圈它增加泄漏，总的结果是互相抵消的。

最后再求摩擦损失功率，因为 v_0 的方向与 Δp 的方向相反，故切应力是同号相加。

所以
$$\tau=\frac{\Delta p\delta}{2l}+\frac{\mu}{\delta}\omega R\sin\theta$$

瞬时摩擦功率为

$$\begin{aligned}P_i&=Fv_0=\tau\pi dl\omega R\sin\theta\\&=\frac{\Delta p\pi\delta d\omega R}{2}\sin\theta+\frac{\mu\omega^2R^2\pi dl}{\delta}\sin^2\theta\end{aligned}$$

每圈的平均摩擦功率为

$$P=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_i\mathrm{d}\theta$$

于是

$$\begin{aligned}P&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\Delta p\pi\delta d\omega R}{2}\sin\theta+\frac{\mu\omega^2R^2\pi dl}{\delta}\sin^2\theta\right]\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi}\frac{p_1\pi\delta d\omega R}{2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{p_2\pi\delta d\omega R}{2}\sin\theta\mathrm{d}\theta+\right.\\&\quad\left.\int_0^{2\pi}\frac{\mu\omega^2R^2\pi dl}{\delta}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\right]\\&=\frac{1}{2\pi}\left[\pi\delta d\omega R(p_1-p_2)+\frac{\mu\omega^2R^2\pi^2dl}{\delta}\right]\end{aligned}$$

代入数值，并注意到 $p_2=-5\times10^4$ Pa，则得

$$P=2.31\ \mathrm{Nm/s}=2.31\ \mathrm{W}$$

以上积分中用到

$$\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta=2,\ \int_{\pi}^{2\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta=-2,\ \int_0^{2\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta=\pi$$

从积分中可以发现，柱塞运动所造成的摩擦功率损失，在一圈之内是不能互相抵消的，这与流量在一圈之内互相抵消是不一样的。

§7-2 偏心环形缝隙

由于制造安装等许多原因，往往在柱塞与套筒的环形缝隙中产生油压的不均衡现象，因而在实际工作条件下，出现偏心环形缝

隙的机会往往比出现同心环形缝隙的机会更多。

如图 7－10,设柱塞半径为 r,套筒半径为 R,$R-r=\delta$ 为同心时的缝隙。如果偏心距为 $OO'=e$,则 $\varepsilon=\frac{e}{\delta}$ 称为相对偏心距。我们下面分析一下偏心环形缝隙中的泄漏流量问题。

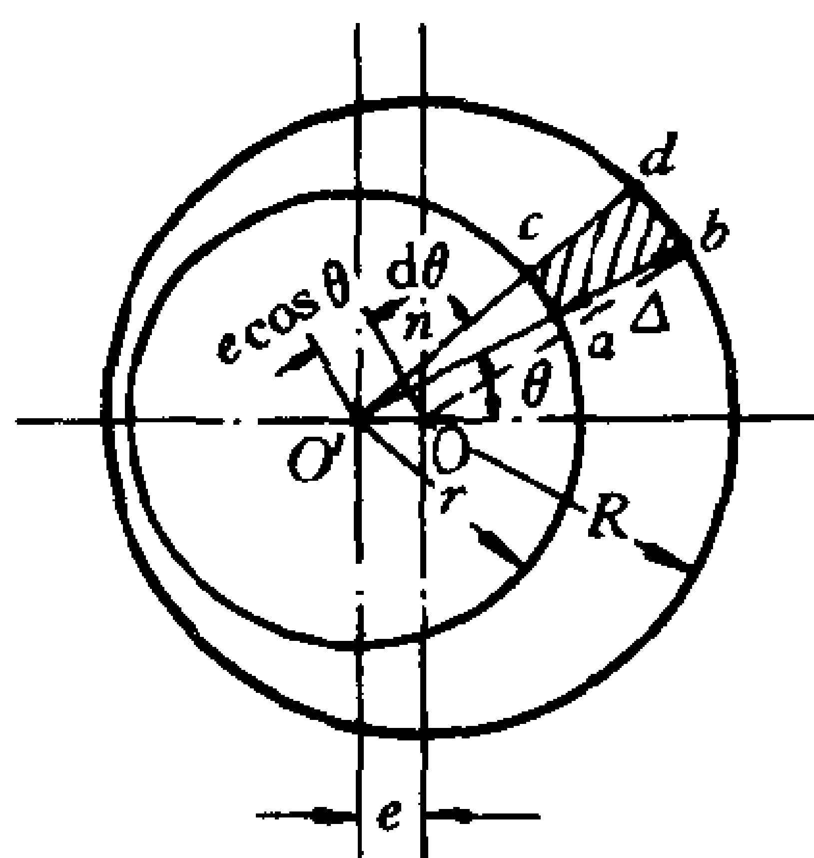


图 7－10 偏心环形缝隙

从 O' 点作任意射线 $O'ab$,令 $\angle bO'O=\theta$,$ab=\Delta$。为了找出偏心缝隙 Δ 与 θ 的关系式,再联 Ob 线,并作 $O'cd /\!/ Ob$,作 $On \perp O'b$,因 $R>r\gg e$,故

$$\angle ObO'=\angle bO'd=\mathrm{d}\theta\approx 0$$

由图可见 $$ab=O'n+nb-O'a$$

即 $$\Delta=e\cos\theta+R\cos\mathrm{d}\theta-r$$

因为 $\cos\mathrm{d}\theta\approx 1$,故可得近似等式

$$\Delta=R-r+e\cos\theta=\delta+e\cos\theta=\delta(1+\varepsilon\cos\theta) \tag{7-18}$$

偏心缝隙展开以后本来不是平行平板,但是在相对偏心距较小的情况下,由微元角度 $\mathrm{d}\theta$ 所夹的两个微元弧段可以近似地看作是平行平板,它的微元宽度是 $\mathrm{d}B=r\mathrm{d}\theta$。

当柱塞具有直线速度 v_0,且在 l 长柱塞两端存在压强差 Δp 时,经过这一微元面积 $\Delta\mathrm{d}B$ 的泄漏流量 $\mathrm{d}q_V$ 可据公式(7－12)写成

$$\mathrm{d}q_V=\left(\frac{\Delta p\Delta^3}{12\mu l}+\frac{v_0\Delta}{2}\right)r\mathrm{d}\theta$$

将(7－18)式代入,则

$$\mathrm{d}q_V=\frac{\Delta p\delta^3}{12\mu l}(1+\varepsilon\cos\theta)^3 r\mathrm{d}\theta+\frac{v_0\delta}{2}(1+\varepsilon\cos\theta)r\mathrm{d}\theta$$

从 $\theta=0$ 到 $\theta=2\pi$ 积分,即可得经过整个偏心缝隙的流量

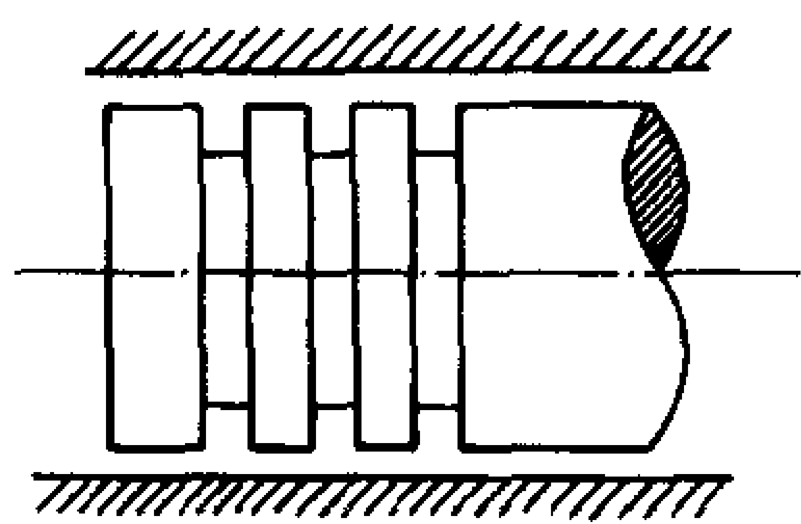
$$q_V = \frac{\Delta p\delta^3}{12\mu l}\int_0^{2\pi}(1+\varepsilon\cos\theta)^3 r\mathrm{d}\theta + \frac{v_0\delta}{2}\int_0^{2\pi}(1+\varepsilon\cos\theta)r\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{\Delta p\delta^3 r}{12\mu l}\int_0^{2\pi}(1+3\varepsilon\cos\theta+3\varepsilon^2\cos^2\theta+\varepsilon^3\cos^3\theta)\mathrm{d}\theta + \frac{v_0\delta r}{2}\int_0^{2\pi}(1+\varepsilon\cos\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{\Delta p\delta^3 r}{12\mu l}\left[2\pi\left(1+\frac{3}{2}\varepsilon^2\right)\right] + \frac{v_0\delta r}{2}[2\pi]$$

$$= \left[\frac{\Delta p\delta^3}{12\mu l}\left(1+\frac{3}{2}\varepsilon^2\right) + \frac{v_0\delta}{2}\right]\pi d \tag{7-19}$$

与(7－12)式的同心缝隙泄漏流量相比,可见这二者的剪切流流量相等,而压差流的流量不同。偏心比同心的压差流流量大$\left(1+\frac{3}{2}\varepsilon^2\right)$倍,相对偏心距 ε 越大,则偏心泄漏量越大,在极限情况下相对偏心距 $\varepsilon=1$,即 $e=\delta$ 时,由压差流引起的偏心泄漏量等于同心泄漏量的 2.5 倍。由此可见防止偏心也是减小泄漏的有力措施。如图 7－11 所示,在柱塞上开平衡槽既可均衡缝隙中的压强,防止偏心又可造成多级的局部阻力,使高压腔的压强逐级降低。这种简易方法对防止柱塞油泵、马达及换向阀的泄漏是非常有效的。平衡槽的结构不但用于液压元件,也用于内燃机,空气压缩机及普通轴颈上。平衡槽是减少轴向泄漏的一种有效措施。


图 7－11　平衡槽

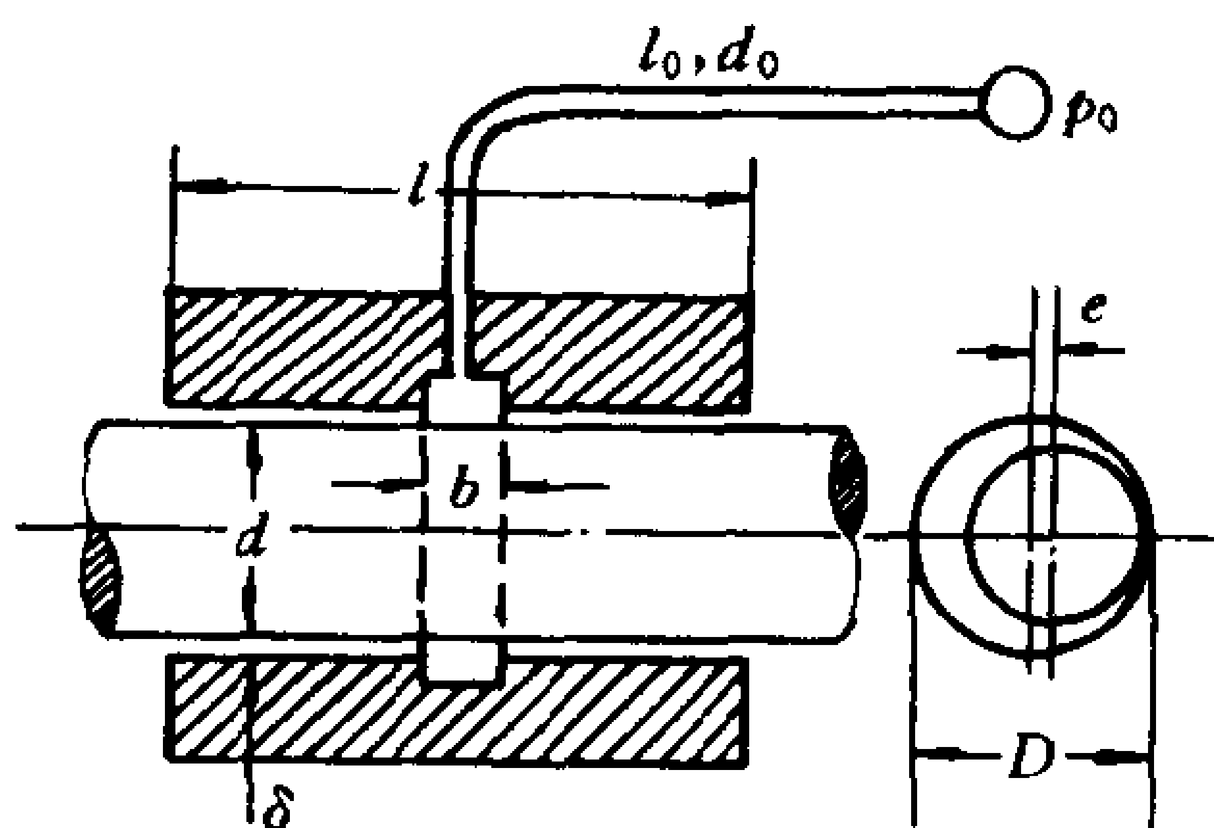


图 7－12　滑动轴承

[**例题 7－4**]　图 7－12 为滑动轴承示意图,动力粘度为 $\mu=0.14$ Pa·s

的润滑油，从计示压强 $p_0=160\ \text{kPa}$ 的干管经 $l_0=0.8\ \text{m}$、$d_0=6\ \text{mm}$ 的输油管流向轴承中部的环形油槽，油槽宽度 $b=10\ \text{mm}$，轴承长度 $l=120\ \text{mm}$，轴径 $d=90\ \text{mm}$，轴承内径 $D=90.2\ \text{mm}$。

假定输油管及缝隙中均为层流，忽略轴的转动影响，试确定下述两种情况下的泄漏流量：

(1) 轴承与轴颈同心，

(2) 相对偏心距 $\varepsilon=0.5$。

［**解**］ 设油槽处的压强为 p

由圆管层流公式(5－14)可得

$$p=p_0-\frac{128\mu l_0 q_V}{\pi d_0^4} \tag{a}$$

(1) 根据同心环形缝隙公式(表 7－1)可得经轴承一侧的泄漏流量

$$\frac{q_V}{2}=\frac{p\pi d(D-d)^3}{12\mu\left(\dfrac{l-b}{2}\right)\times 2^3}=\frac{p\pi d(D-d)^3}{48\mu(l-b)}$$

由此解出

$$p=\frac{24\mu(l-b)q_V}{\pi d(D-d)^3} \tag{b}$$

从(a)、(b)式消去 p，则

$$q_V=\frac{p_0}{\left[\dfrac{24\mu(l-b)}{\pi d(D-d)^3}+\dfrac{128\mu l_0}{\pi d_0^4}\right]}=0.96\ \text{cm}^3/\text{s}$$

(2) 当 $\varepsilon=0.5$ 时，令 $k=1+\dfrac{3}{2}\varepsilon^2=1.375$。偏心时经轴承一侧的泄漏为

$$\frac{q_V}{2}=\frac{p\pi d(D-d)^3 k}{48\mu(l-b)}$$

由此解出

$$p=\frac{24\mu(l-b)q_V}{\pi d(D-d)^3 k} \tag{c}$$

从(a)、(c)式消去 p，可得

$$q_V=\frac{p_0}{\left[\dfrac{24\mu(l-b)}{\pi d(D-d)^3 k}+\dfrac{128\mu l_0}{\pi d_0^4}\right]}=1.3\ \text{cm}^3/\text{s}$$

§7－3　平行圆盘缝隙

平行圆盘端面缝隙中的径向流动(如图7－13所示)也是工程上常见的一种实际问题,例如端面推力轴承,静压圆盘支承,液压泵和马达中的配流盘、倾斜盘等处都有这种缝隙形式,圆盘缝隙中需要解决的问题常有如下两种:一是已知缝隙和圆盘尺寸,由流量求圆盘内外的压强差,或由压强差求缝隙流量;二是已知缝隙和圆盘尺寸,由流量或压强差求对上下圆盘的液体作用力。

一、圆盘中的压强分布

如图7－13,设圆盘内外半径为 r_1 和 r_2,内外压强为 p_1 和 p_2,(p_2 有时也为零)缝隙高度为 δ,缝隙流量为 q_V。

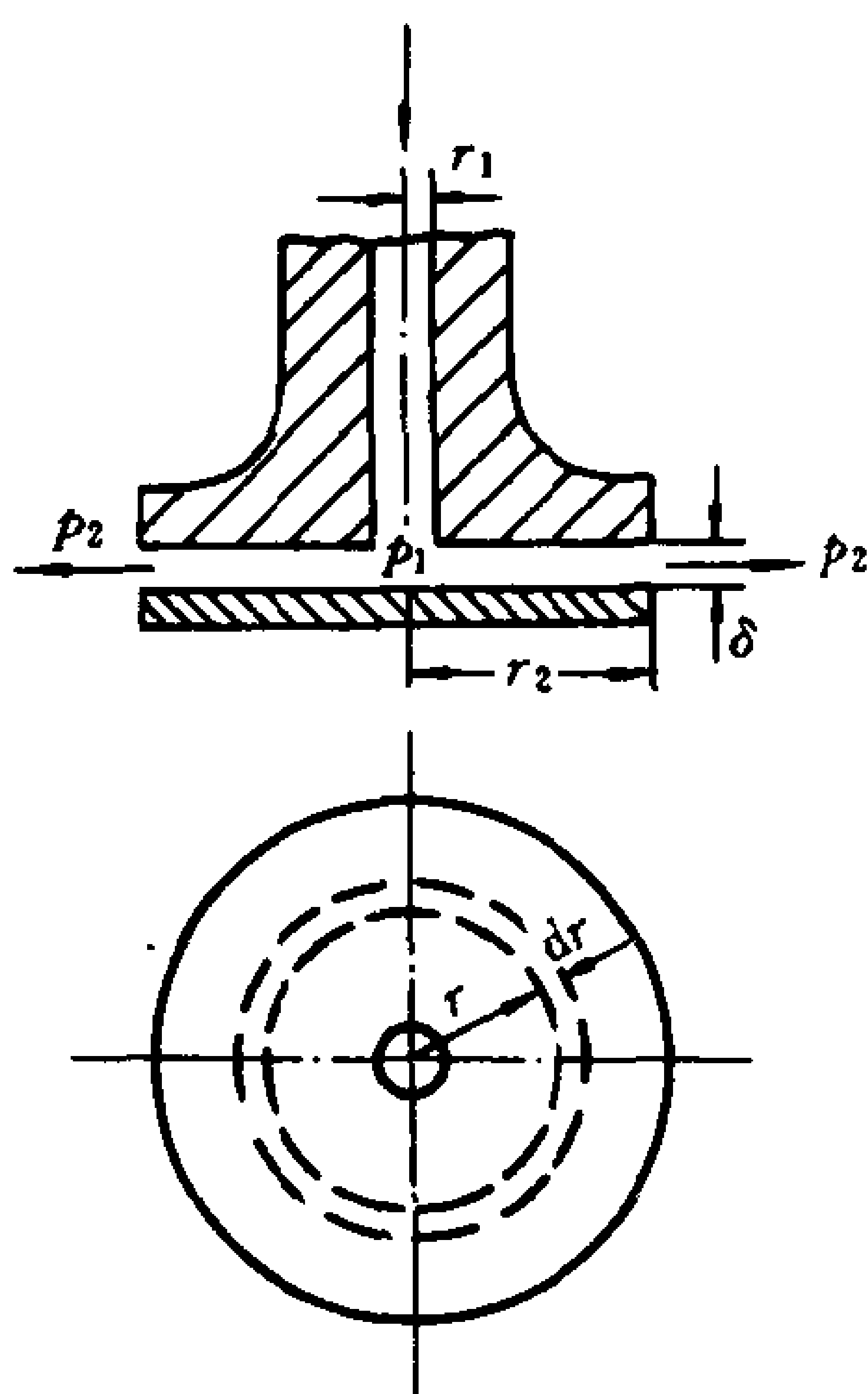


图7－13　平行圆盘缝隙

将任意半径 r 处的一个微元环形缝隙,展开成长度为 $\mathrm{d}r$、宽度为 $2\pi r$、高度为 δ 的平行平板缝隙。于是平行平板压差流公式 $q_V=\dfrac{\Delta p\delta^3 B}{12\mu l}$ 中的压强平均下降率 $\dfrac{\Delta p}{l}$,可改换为 $-\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}$,即可得

$$q_V=-\frac{2\pi r\delta^3}{12\mu}\cdot\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}$$

或

$$\mathrm{d}p=-\frac{6\mu q_V}{\pi\delta^3}\cdot\frac{\mathrm{d}r}{r} \qquad (7-20)$$

积分得

$$p=-\frac{6\mu q_V}{\pi\delta^3}\ln r+C$$

当 $r=r_2$ 时，$p=p_2$，于是定出积分常数 $C=p_2+\frac{6\mu q_V}{\pi\delta^3}\ln r_2$。最后得圆盘中的压强分布的对数规律为

$$p=p_2+\frac{6\mu q_V}{\pi\delta^3}\ln\left(\frac{r_2}{r}\right) \tag{7-21}$$

式中 $r_1<r<r_2$。

当 $r=r_1$ 时液体压强 $p=p_1$。上、下圆盘中的压强分布如图 7-14 所示，(1)是 $p_2\neq0$ 时的情况，(2)是 $p_2=0$ 时的情况。

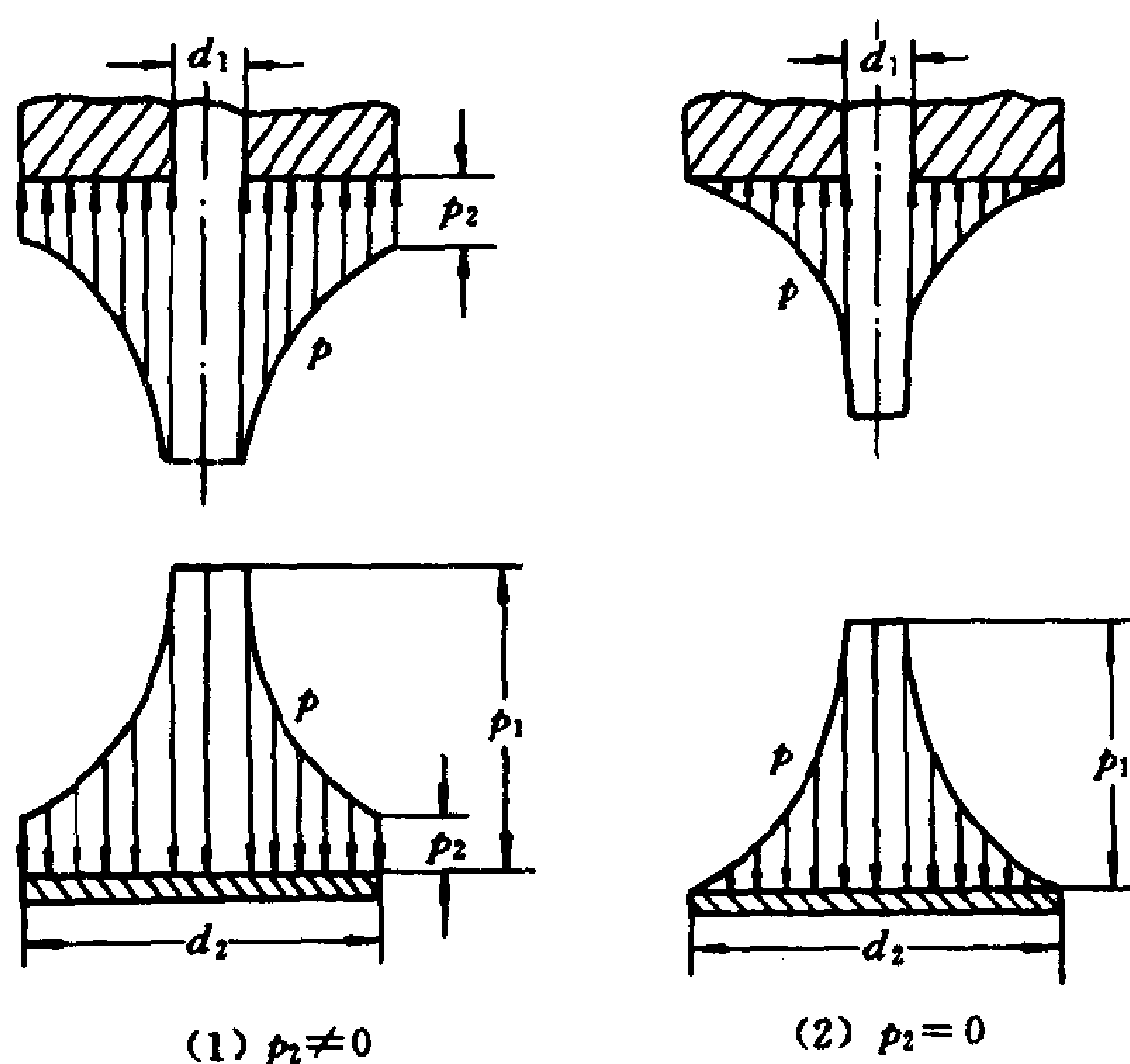


图 7-14　圆盘中的压强分布

在 $r=r_1$ 处，把 $p=p_1$ 代入(7-21)式即可得出圆盘内外的压强差公式

$$p_1-p_2=\frac{6\mu q_V}{\pi\delta^3}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \tag{7-22}$$

由此可解出圆盘缝隙的流量公式

$$q_V=\frac{\pi\delta^3(p_1-p_2)}{6\mu\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \tag{7-23}$$

$p_2 \neq 0$ 与 $p_2 = 0$ 时的上述计算公式均列于表 7－2 中。

表 7－2　圆盘缝隙流动公式表

	圆盘内 r_1 处压强为 p_1 圆盘外 r_2 处压强为 $p_2 \neq 0$	圆盘内 r_1 处压强为 p_1 圆盘外 r_2 处压强为 $p_2 = 0$
圆盘中的压强分布	$p = p_2 + \frac{6\mu q_V}{\pi\delta^3}\ln\left(\frac{r_2}{r}\right)$	$p = \frac{6\mu q_V}{\pi\delta^3}\ln\left(\frac{r_2}{r}\right)$
圆盘内外的压强差	$p_1 - p_2 = \frac{6\mu q_V}{\pi\delta^3}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$	$p_1 = \frac{6\mu q_V}{\pi\delta^3}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$
圆盘的总流量	$q_V = \frac{\pi\delta^3(p_1 - p_2)}{6\mu\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$	$q_V = \frac{\pi\delta^3 p_1}{6\mu\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$
液体对下圆盘(无油管圆盘)的作用力	$F = \pi p_2 r_2^2 + \frac{3\mu q_V}{\delta^3}(r_2^2 - r_1^2)$ $F = \pi p_2 r_2^2 + \frac{\pi(p_1 - p_2)}{2\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}(r_2^2 - r_1^2)$	$F = \frac{3\mu q_V}{\delta^3}(r_2^2 - r_1^2)$ $F = \frac{\pi p_1}{2\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}(r_2^2 - r_1^2)$
液体对上圆盘(有油管圆盘)的作用力	$F = \pi(p_2 r_2^2 - p_1 r_1^2) + \frac{3\mu q_V}{\delta^3}(r_2^2 - r_1^2)$ $F = \pi(p_2 r_2^2 - p_1 r_1^2) + \frac{\pi(p_1 - p_2)}{2\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}(r_2^2 - r_1^2)$	$F = \frac{3\mu q_V}{\delta^3}(r_2^2 - r_1^2) - \pi p_1 r_1^2$ $F = \frac{\pi p_1}{2\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}(r_2^2 - r_1^2) - \pi p_1 r_1^2$

二、液体对圆盘的作用力

根据图 7－14 及(7－21)式，通过微元面积 $2\pi r\mathrm{d}r$ 上的积分，可以求出对下面圆盘的液体总作用力为

$$F = p_1\pi r_1^2 + \int_{r_1}^{r_2}\left[p_2 + \frac{6\mu q_V}{\pi\delta^3}\ln\left(\frac{r_2}{r}\right)\right]2\pi r\mathrm{d}r$$

$$= p_1\pi r_1^2 + p_2\pi(r_2^2 - r_1^2) + \frac{12\mu q_V}{\delta^3}\left[\int_{r_1}^{r_2}\ln r_2 r\mathrm{d}r - \int_{r_1}^{r_2}\ln r \cdot r\mathrm{d}r\right]$$

最后一个积分式用分部积分法作，可得

$$F=(p_1-p_2)\pi r_1^2+p_2\pi r_2^2+\frac{12\mu q_V}{\delta^3}\left[\frac{r_2^2-r_1^2}{4}-\frac{2r_1^2}{4}\ln\frac{r_2}{r_1}\right]$$

$$=p_2\pi r_2^2+\frac{3\mu q_V}{\delta^3}(r_2^2-r_1^2) \qquad (7-24)$$

最后一步是用(7－22)式化简得来的。如果将(7－23)式代入(7－24)式中，亦可得

$$F=p_2\pi r_2^2+\frac{\pi(p_1-p_2)}{2\ln\frac{r_2}{r_1}}(r_2^2-r_1^2) \qquad (7-25)$$

如果圆盘外的压强 $p_2=0$，则(7－24)、(7－25)式分别简化为

$$F=\frac{3\mu q_V}{\delta^3}(r_2^2-r_1^2) \qquad (7-26)$$

$$F=\frac{\pi p_1}{2\ln\frac{r_2}{r_1}}(r_2^2-r_1^2) \qquad (7-27)$$

这就是已知 q_V 或 p_1，求圆盘总作用力的两个公式。

因为图 7－13 的上部圆盘中间有一个进油管或进油槽，于是作用在上圆盘上的力应比作用在下圆盘上的力小 $p_1\pi r_1^2$ 这样一项，从(7－24)～(7－27)式中减去 $p_1\pi r_1^2$，即可得作用在上圆盘(或者说有油管或油槽的圆盘)上的流体作用力，其计算公式列于表 7－2 的最末一行。

表 7－2 中列出圆盘缝隙流动的各种计算公式，有时 $p_2\neq0$，有时 $p_2=0$；有时要计算有油管圆盘上的作用力，有时要计算无油管圆盘上的作用力。这些微细差别在选用公式时应该注意区分。

图 7－15 为测量零件长度用的气动量仪的工作原理图，它的主要部件就是一个带有喷口的圆盘，当它与被测工件成平行时，通过缝隙的流量

$$q_V=\frac{\pi p_1}{6\mu\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}\delta^3$$

与缝隙 δ 成三次方的比例。因为仪器上 H 一定，测量气流流量 q_V 就可确定缝隙 δ，于是也就确定了工件高度 l 的大小。这种气动量仪的流量计算标尺可以按上述公式刻成 l 的读数。

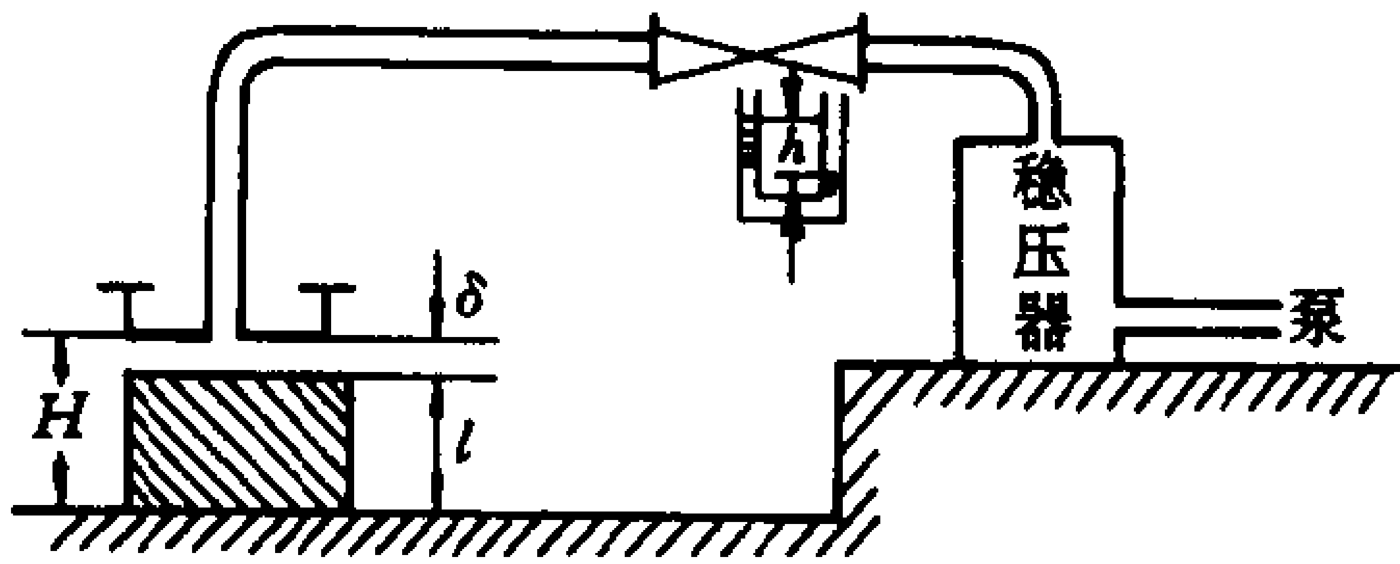


图 7－15　气动量仪

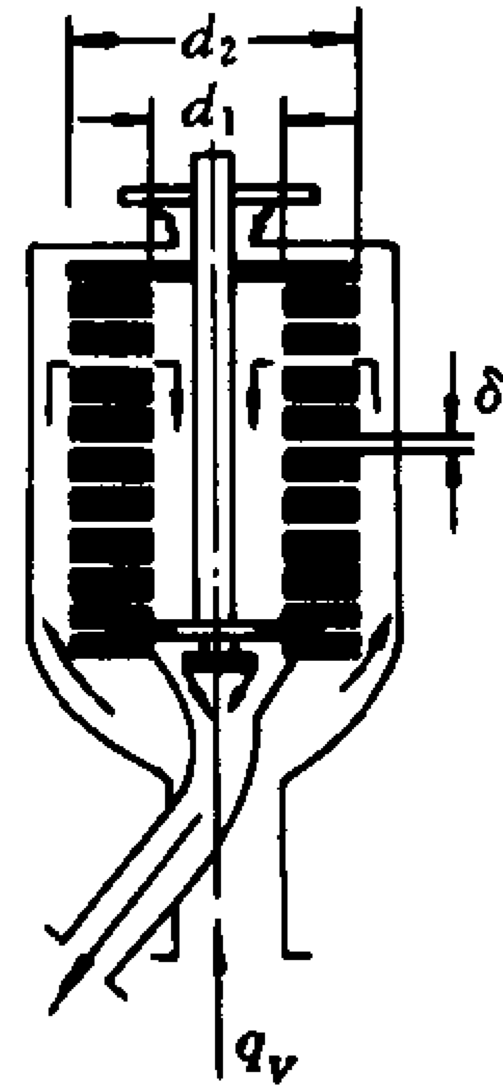


图 7－16　片式滤油器

［**例题 7－5**］　汽车发动机上的片式滤油器(图 7－16)是由一组环形平板所组成的，缝隙数目 $i=21$，缝隙高度 $\delta=0.2$ mm，$d_2=75$ mm，$d_1=30$ mm，$q_V=0.05$ l/s，$\rho=900$ kg/m^3，油的恩氏度 $r=5°$E。试求经过滤油器时的压强损失。

［**解**］　油的运动粘度

$$\nu=0.0731\,r-\frac{0.0631}{r}=0.353\ \text{cm}^2/\text{s}$$

油的动力粘度

$$\mu=\nu\rho=0.032\ \text{Pa}\cdot\text{s}$$

每个缝隙的流量为 $\frac{q_V}{i}$

由公式

$$p_1-p_2=\frac{6\mu q_V}{\pi\delta^3}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

可得

$$\begin{aligned}\Delta p&=\frac{6\times0.032\times0.05\times10^{-3}}{\pi\times(0.2\times10^{-3})^3\times21}\ln\left(\frac{0.0375}{0.015}\right)\\&=16\,700\ \text{Pa}\end{aligned}$$

[**例题 7-6**] 图 7-17 为四缸发动机的润滑系统示意图。

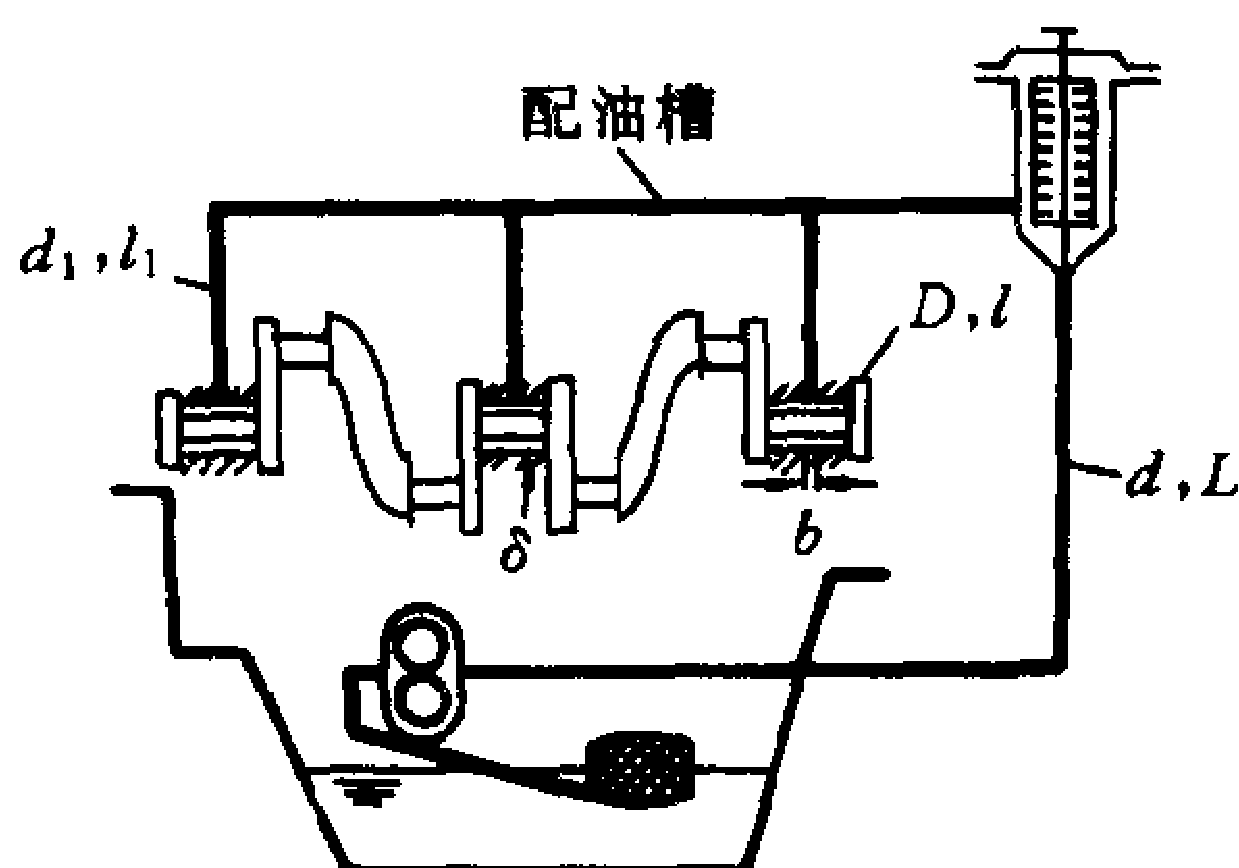


图 7-17 发动机润滑系统

已知 $d=6$ mm, $d_1=4$ mm, $D=40$ mm, $l_1=200$ mm, $l=50$ mm, 同心缝隙 $\delta=0.06$ mm, $b=6$ mm, $L=1\ 000$ mm, $°E=5$, $\rho=900\ kg/m^3$, 滤油器数据同例题 7-5。总供油量 $q_V=50\ cm^3/s$, 假定三个轴承每个的流量为 $\frac{q_V}{3}$, 吸油管、滤油网、配油槽中的阻力忽略不计, 管中及缝隙中均为层流。

试确定油泵应有的压强及功率。

[**解**] 油泵压强用来克服四部分损失:(1)主油管、(2)滤油器、(3)每个轴承的分油管、(4)每个轴承的同心环形缝隙。

油的动力粘度已如上题计算结果, 现分别计算这四部分损失。

(1) $$\Delta p = \frac{128\mu L q_V}{\pi d^4} = \frac{128\times0.032\times1\times50\times10^{-6}}{\pi\times(6\times10^{-3})^4} = 5\times10^4\ \text{Pa}$$

(2) $$\Delta p = 16\ 700\ \text{Pa}\ (\text{承上题数据})$$

(3) $$\Delta p = \frac{128\mu l_1}{\pi d_1^4}\frac{q_V}{3} = \frac{128\times0.032\times0.2\times50\times10^{-6}}{\pi\times(4\times10^{-3})^4\times3} = 1.7\times10^4\ \text{Pa}$$

(4) $$\Delta p = \frac{12\mu\left(\frac{l-b}{2}\right)}{\pi D\delta^3}\frac{q_V}{3\times2} = \frac{\mu(l-b)q_V}{\pi D\delta^3} = \frac{0.032\times44\times10^{-3}\times50\times10^{-6}}{\pi\times0.04\times(0.06\times10^{-3})^3} = 25.9\times10^5\ \text{Pa}$$

油泵的压强应为上述四项之和

$$p=(0.5+0.167+0.17+25.9)\times10^5=26.74\times10^5\ \text{Pa}$$

油泵所需功率为

$$P=pq_V=26.74\times10^5\times50\times10^{-6}=134\ \text{W}=0.134\ \text{kW}$$

*§7-4 倾斜平面缝隙

两个平面倾斜成一个微小的 α 角(如图 7-18),平面间的油液在平面两端具有压强差 p_1-p_2 或平面具有相对运动时均会出现倾斜平面间的缝隙流动。这种流动有重要的实际应用。例如滑动轴承(图 7-19)在正常工作情况下,总是处于偏心位置,沿轴承中心 O 与轴中心 O' 联线方向切开,展成平面,则正是图 7-18 这种情况。又如柱塞与套筒之间出现锥度缝隙时(如图 7-20),将其展开,也成倾斜平面缝隙。

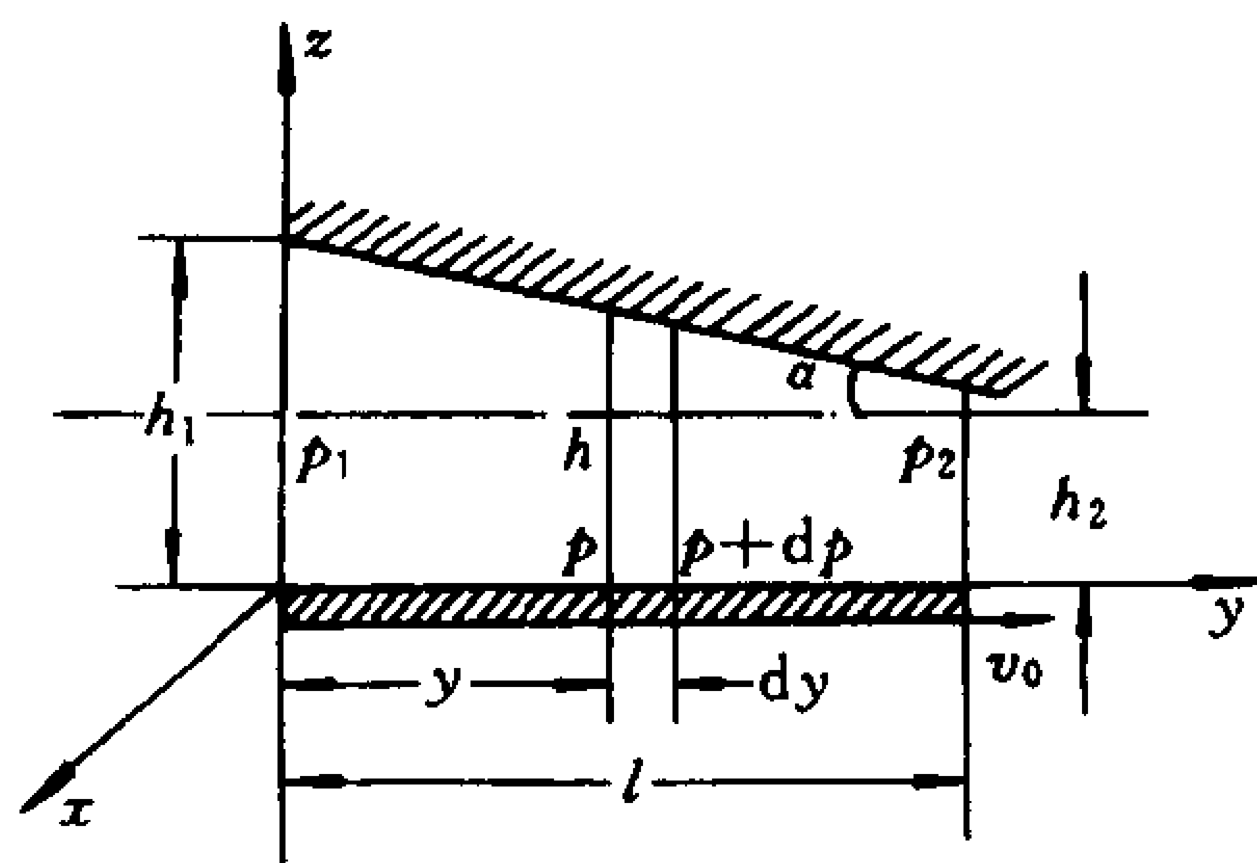


图 7-18 倾斜平面缝隙

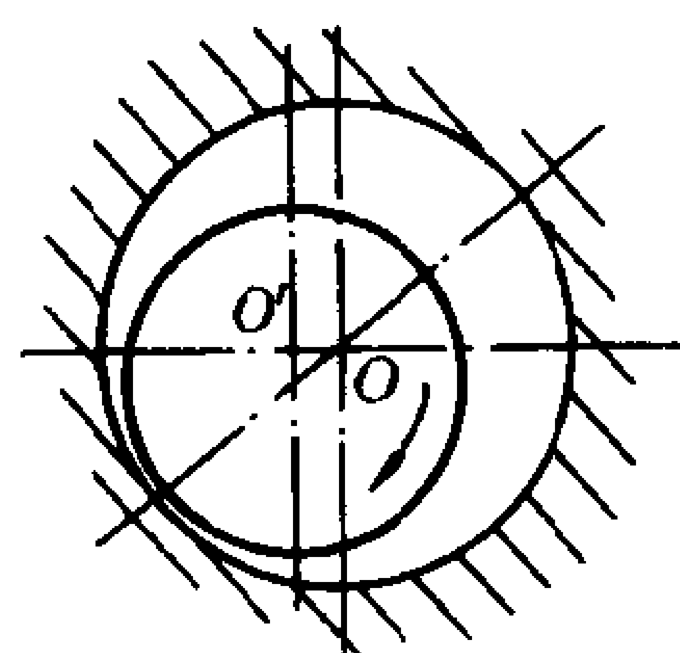


图 7-19 滑动轴承

此外,图 7-21 所示的端面止推轴承,也是倾斜平面缝隙。一组推力块 A 借助于支承圈 B,定位分布在圆周平面上,在推力块与支承圈之间有浮动接触点,可以使推力块顺沿圆周方向各自浮动一个微小倾斜角度。当轴旋转时,轴的端面与推力块之间即形成倾斜平面缝隙,这种倾斜的推力块上的油膜可以产生巨大的轴向支承力。

这种端面止推轴承也称为密歇尔(Michell)轴承,它常用于飞

机和船舶的螺旋桨或大型水轮机轴上，借以平衡较大的轴向推力。

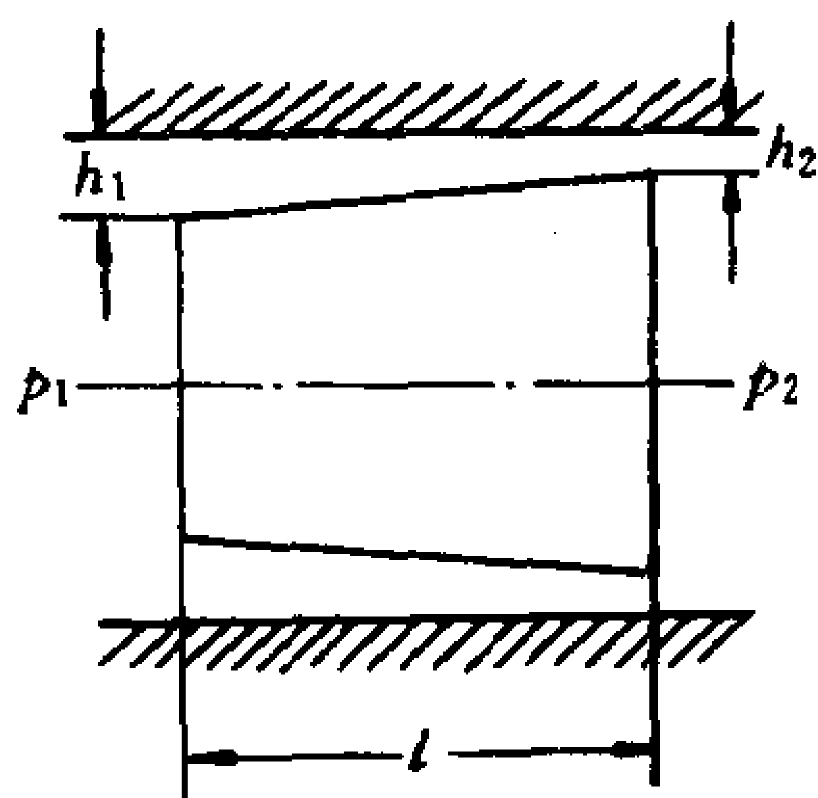


图 7－20　柱塞锥度

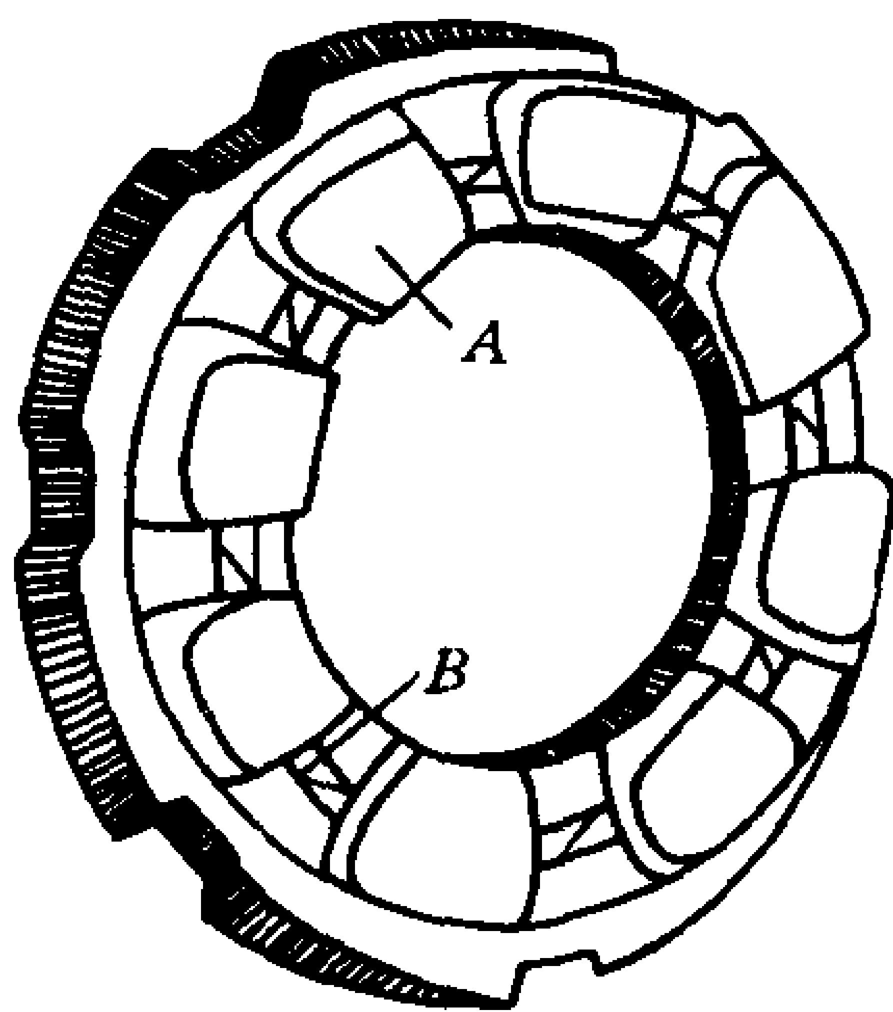


图 7－21　端面止推轴承

倾斜平面缝隙流动也分为剪切流动和压差流动两种情况，滑动轴承和端面止推轴承都是属于剪切流的问题，这种问题统称为动压支承。锥度柱塞运动既有压差流又有剪切流，但其移动速度不大时，通常柱塞两端的压强差却起主要作用，特别是对于启动中的锥度柱塞则完全可以看作是纯压差流。

下面我们分析倾斜平面缝隙流动中的一些基本原理。

一、缝隙间的速度分布

实际问题中的倾斜角 α 都是比较小的，在倾斜平面缝隙两端存在压强差 p_1-p_2，或一个平板以 v_0 速度运动，都会使缝隙中的液体以近似平行的速度运动。于是对照图 7－18 可知

$$\left.\begin{aligned} &v_x\approx 0,\ v_y=v=v(z),\ v_z=0\\ &\frac{\partial p}{\partial x}=0,\ \frac{\partial p}{\partial z}\approx 0,\ \frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\end{aligned}\right\}\tag{7-28}$$

但是倾斜平面缝隙与平行平面缝隙不同之处在于沿流动方向的压强变化率$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$不是常数，因此$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$不能用$-\frac{\Delta p}{l}$代表，而且 $p=p(y)$的压强分布规律对于倾斜平面缝隙来说是一个十分重要的问题，它是解决动压支承的承载能力和柱塞卡紧力这样一些实际

问题的基础。

在(7－28)式的条件下，倾斜平面缝隙的 N－S 方程可以简化为

$$\frac{\mathrm{d}^2 v_y}{\mathrm{d}z^2}=\frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \tag{7-29}$$

对 z 积分两次，可得

$$v_y=\frac{1}{2\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}z^2+C_1 z+C_2 \tag{7-30}$$

用边界条件：

$$\left.\begin{aligned} z=0\text{ 时}\quad v_y=v_0 \\ z=h\text{ 时}\quad v_y=0 \end{aligned}\right\} \tag{7-31}$$

可以求出积分常数 $C_1=-\frac{1}{2\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}h-\frac{v_0}{h}$，$C_2=v_0$，代回(7－30)式，得

$$v_y=\frac{z^2-zh}{2\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+v_0\left(1-\frac{z}{h}\right) \tag{7-32}$$

这就是倾斜平面缝隙中的速度分布规律。

二、压强分布与流量

将通过 $B\mathrm{d}z$ 微元断面的流量 $v_yB\mathrm{d}z$，从 $z=0$ 到 $z=h$ 积分即可得出流过任一断面的流量

$$q_V=\int_0^h v_yB\mathrm{d}z=\frac{B}{2\mu}\int_0^h\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}(z^2-zh)\mathrm{d}z+Bv_0\int_0^h\left(1-\frac{z}{h}\right)\mathrm{d}z$$

$$=B\left(-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{h^3}{12\mu}+\frac{v_0h}{2}\right) \tag{7-33}$$

式中$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$尚未知，因而此式还不是最后结果，下面利用此式首先解出压强分布规律(7－35)，然后才有可能得到有实用价值的流量表达式(7－38)。

从(7－33)式得出

$$dp=\left(\frac{6\mu v_0}{h^2}-\frac{12\mu q_V}{Bh^3}\right)dy$$

将

$$h=h_1-y\tan\alpha \tag{7-34}$$

代入，则 $$dp=\left[\frac{6\mu v_0}{(h_1-y\tan\alpha)^2}-\frac{12\mu q_V}{B(h_1-y\tan\alpha)^3}\right]dy$$

积分，得

$$p=\frac{6\mu v_0}{\tan\alpha(h_1-y\tan\alpha)}-\frac{12\mu q_V}{2B\tan\alpha\,(h_1-y\tan\alpha)^2}+C$$

或 $$p=\frac{6\mu}{\tan\alpha}\left(\frac{v_0}{h}-\frac{q_V}{Bh^2}\right)+C$$

利用边界条件 $h=h_1$ 时，$p=p_1$ 可得积分常数

$$C=p_1-\frac{6\mu}{\tan\alpha}\left(\frac{v_0}{h_1}-\frac{q_V}{Bh_1^2}\right)$$

代回，则

$$p=p_1+\frac{6\mu}{\tan\alpha}\left[v_0\left(\frac{1}{h}-\frac{1}{h_1}\right)-\frac{q_V}{B}\left(\frac{1}{h^2}-\frac{1}{h_1^2}\right)\right] \tag{7-35}$$

这就是倾斜缝隙中的压强分布规律。

如果令 $h=h_2$ 时 $p=p_2$，则可得出倾斜缝隙两端的压强差

$$\Delta p=p_1-p_2=\frac{6\mu}{\tan\alpha}\left[\frac{q_V}{B}\left(\frac{1}{h_2^2}-\frac{1}{h_1^2}\right)-v_0\left(\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h_1}\right)\right]$$

利用

$$h_2=h_1-l\tan\alpha \text{ 或 } \tan\alpha=\frac{h_1-h_2}{l} \tag{7-36}$$

化简得

$$\Delta p=\frac{6\mu l}{h_1-h_2}\left[\frac{q_V}{B}\left(\frac{h_1^2-h_2^2}{h_1^2h_2^2}\right)-v_0\left(\frac{h_1-h_2}{h_1h_2}\right)\right]$$

$$=\frac{6\mu l}{h_1h_2}\left(\frac{q_V}{B}\frac{h_1+h_2}{h_1h_2}-v_0\right) \tag{7-37}$$

这就是由流量求压强差的公式。

从中解出 q_V，则

$$q_V = \frac{\Delta pB}{6\mu l}\frac{h_1^2h_2^2}{h_1+h_2} + Bv_0\frac{h_1h_2}{h_1+h_2}$$

$$= \frac{h_1h_2B}{h_1+h_2}\left[\frac{\Delta ph_1h_2}{6\mu l} + v_0\right] \quad (7-38)$$

这就是由压强差求流量的公式。事实上这也就是带有锥度的柱塞两端有压强差而且柱塞运动时的泄漏流量公式。公式有两种特例，

一是 $v_0=0$ 时的纯压差流

$$q_V = \frac{\Delta pB}{6\mu l}\frac{h_1^2h_2^2}{h_1+h_2}, \quad \Delta p = \frac{6\mu lq_V}{B}\frac{h_1+h_2}{h_1^2h_2^2} \quad (7-39)$$

一是 $\Delta p=0$ 时的纯剪切流

$$q_V = Bv_0\frac{h_1h_2}{h_1+h_2} \quad (7-40)$$

以上是倾斜平面缝隙的基本公式。

下面利用这些基本公式分别说明柱塞运动中的卡紧力问题和动压支承中的支承力问题。

三、柱塞运动中的卡紧力

在液压传动中，经常用换向滑阀控制液动机的运动方向。正常情况下推动滑阀本不需要很大的外力，但有时却可能出现故障：用很大的外力还推不动滑阀，造成机构失灵，出现滑阀“卡死”现象。这是什么原因呢?

当滑阀处于静止状态时，$v_0=0$，由(7－35)式可得

$$p = p_1 - \frac{6\mu}{\tan\alpha}\left[\frac{q_V}{B}\left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h_1^2}\right)\right]$$

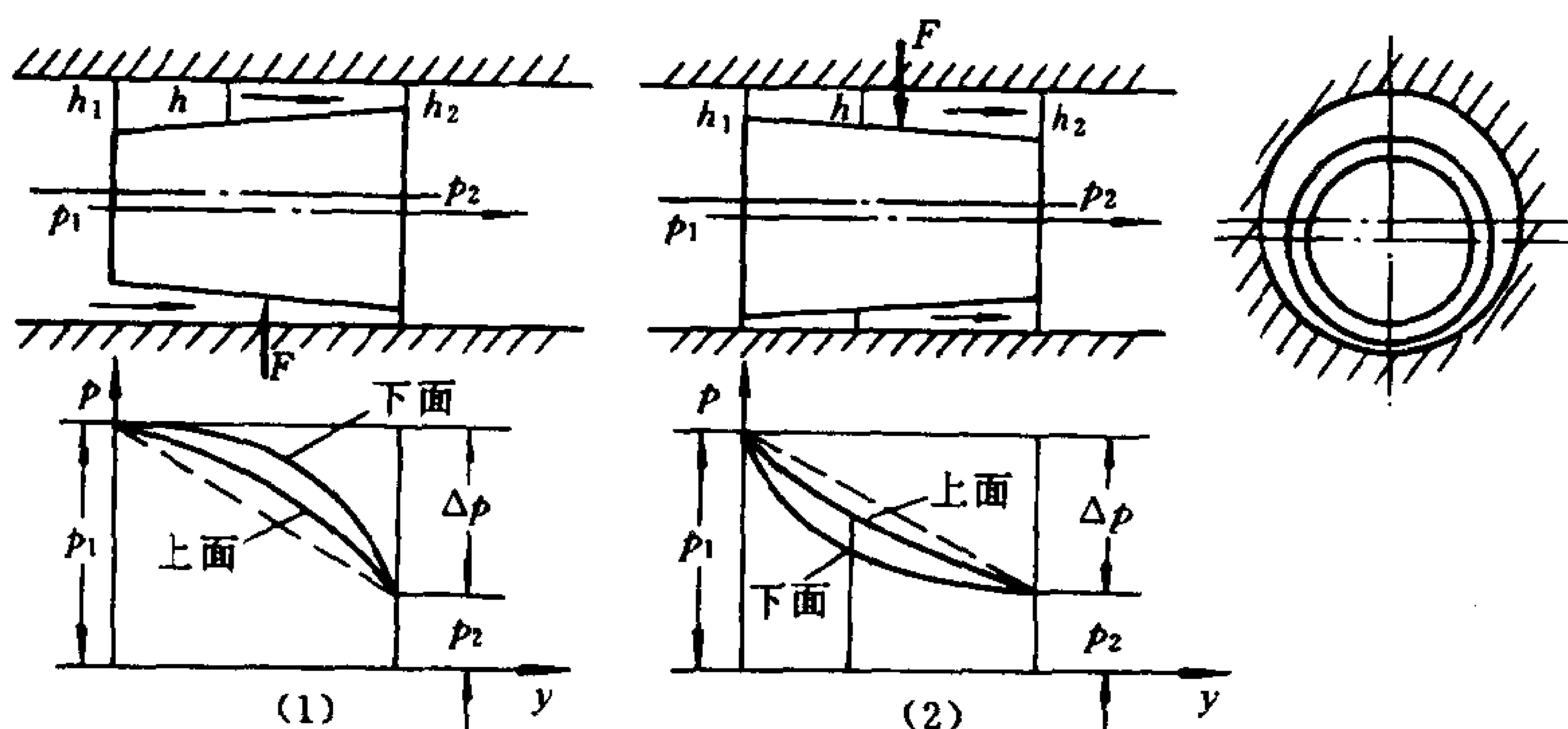
将(7－39)式代入，则

$$p = p_1 - \frac{6\mu}{\tan\alpha}\left[\frac{\Delta p}{6\mu l}\frac{h_1^2 h_2^2}{h_1 + h_2}\left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h_1^2}\right)\right]$$

用 $l\tan\alpha = h_1 - h_2$ 化简得

$$p = p_1 - \Delta p \frac{\left(\frac{h_1}{h}\right)^2 - 1}{\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 - 1} \tag{7-41}$$

这是 p 随 h 变化的规律，它的使用条件是 $h_1 > h > h_2$，如图 7－22(1)所示，这是液流流向小缝隙，亦即液流缝隙沿流动方向逐渐缩小的情况。



(1) 不产生卡紧力的情况　　(2) 产生卡紧力的情况

图 7－22　液压卡紧力的分析

此时滑阀如果出现偏心如图所示，滑阀偏向下方，则按(7－41)式分别绘出柱塞上面和下面的压强分布曲线，亦如图(1)所示。柱塞下面缝隙较小一侧的压强大于柱塞上面缝隙较大一侧的压强。因此形成合力 F 推柱塞向上恢复同心位置，这种情况下柱塞不会卡紧。

但是如图(2)所示，当液流流向缝隙较大一端，也就是沿液流方向缝隙逐渐扩张时，

$$\left.\begin{aligned} &h_1<h<h_2 \\ &h=h_1+y\tan\alpha \\ &h_2=h_1+l\tan\alpha \\ &h_2-h_1=l\tan\alpha \end{aligned}\right\} \tag{7-42}$$

从(7－34)式开始，改变 h 的表达式，用类似方法推演，则会得到

$$p=p_1-\Delta p\frac{1-\left(\dfrac{h_1}{h}\right)^2}{1-\left(\dfrac{h_1}{h_2}\right)^2} \tag{7-43}$$

据此，分别绘出柱塞上面和下面的压强分布曲线，如图 7－22(2) 所示。柱塞上面缝隙较大一侧的压强大于柱塞下面缝隙较小一侧的压强，因此形成合力 F 推柱塞向下，于是柱塞将与套筒发生局部接触，这时要想移动柱塞必须克服静摩擦力 fF，如果电磁换向阀的设计推力达不到这一数值，则柱塞“卡死”。

当液流流向缝隙较大一端，缝隙沿流动方向逐渐扩张时，就有可能形成一个柱塞的卡紧力 F，因此在柱塞和套筒中最好避免出现这种沿液流逐渐扩张的锥度间隙。

但加工柱塞和套筒时总难避免锥度，况且换向滑阀往复运动，总有一个方向容易“卡死”，因此防止“卡死”的有效方法仍是如图 7－11 所示的开平衡槽。平衡槽均衡柱塞周围压强，不容易出现偏心，自然也就不会出现卡紧力。

四、动压支承的支承力

如图 7－23 所示，当上平板向左或下平板向右运动时，带动液流向小缝隙一端流动，这与图 7－19 和图 7－21 的运转情况一样，缝隙中能产生很大的支承力。这种由机件运动造成的支承方式称为动压支承。它与端面压差流的所谓静压支承不同，现在是 $\Delta p=0$，而 $v_0\neq 0$ 的剪切流问题。

下面我们计算一下动压支承力的大小。

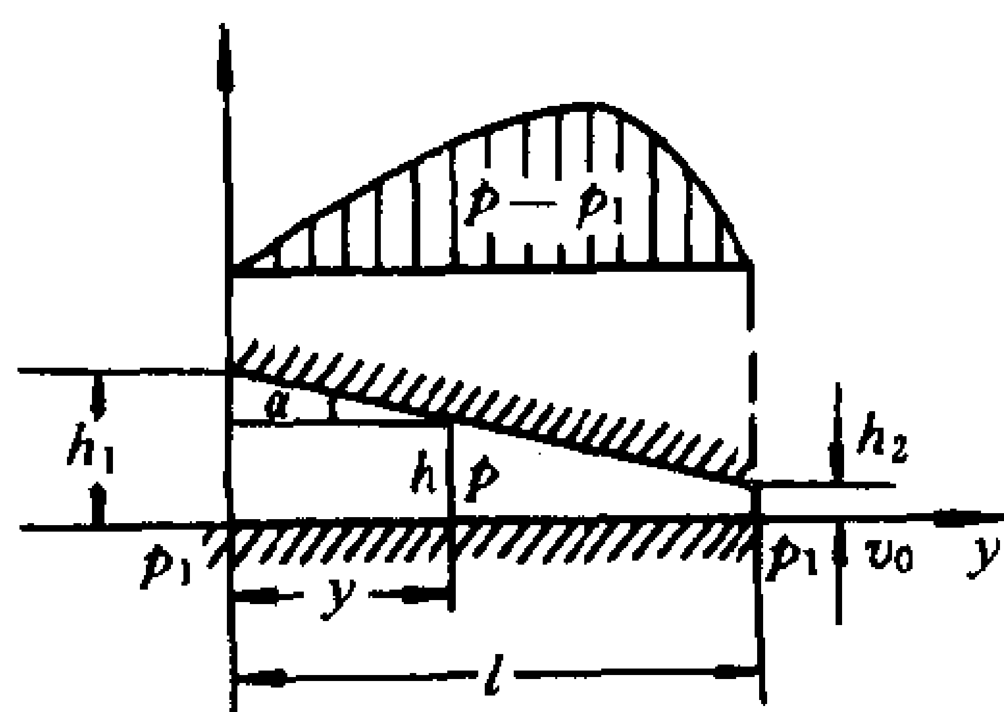


图 7－23　动压支承

当 $\Delta p=0$ 时，将(7－40)式的 $q_V=Bv_0\dfrac{h_1h_2}{h_1+h_2}$ 代入(7－35)式中得缝隙中任意点的压强为

$$p=p_1+\frac{6\mu}{\tan\alpha}\left[v_0\left(\frac{1}{h}-\frac{1}{h_1}\right)-v_0\left(\frac{1}{h^2}-\frac{1}{h_1^2}\right)\cdot\frac{h_1h_2}{h_1+h_2}\right]$$

利用 $h=h_1-y\tan\alpha$ 及 $h_2=h_1-l\tan\alpha$，化简可得

$$p=p_1+\frac{6\mu v_0y(h-h_2)}{(h_1+h_2)h^2}$$

或

$$p-p_1=\frac{6\mu v_0(h_1-h_2)}{l(h_1+h_2)}\ \frac{ly-y^2}{h^2}\tag{7-44}$$

$p-p_1$ 就是缝隙中比缝隙外超出的压强，其分布如图 7－23 所示，沿 l 长度积分求和即可得单位宽度上的承载力为

$$F=\frac{6\mu v_0(h_1-h_2)}{l(h_1+h_2)}\int_0^l\frac{ly-y^2}{h^2}\mathrm{d}y\tag{7-45}$$

利用

$$\left.\begin{array}{l} l=\dfrac{h_1-h_2}{\tan\alpha},y=\dfrac{h_1-h}{\tan\alpha},\mathrm{d}y=-\dfrac{\mathrm{d}h}{\tan\alpha}\\ y=0\text{ 时},h=h_1;\quad y=l\text{ 时},h=h_2\end{array}\right\}\tag{7-46}$$

及

改变积分变量，可得积分

$$\int_0^l\frac{ly-y^2}{h^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{\tan^3\alpha}\left[(h_1+h_2)\ln\frac{h_1}{h_2}-2(h_1-h_2)\right]\tag{7-47}$$

代回(7－45)式则

$$F=\frac{6\mu v_0(h_1-h_2)}{l(h_1+h_2)\tan^3\alpha}\left[(h_1+h_2)\ln\frac{h_1}{h_2}-2(h_1-h_2)\right]$$

$$=\frac{6\mu v_0 l^2}{(h_1-h_2)^2}\left[\ln\frac{h_1}{h_2}-2\frac{h_1-h_2}{h_1+h_2}\right]$$

$$=\frac{\mu v_0 l^2}{h_2^2}\cdot\frac{6}{\left(\frac{h_1}{h_2}-1\right)^2}\left[\ln\frac{h_1}{h_2}-2\frac{\frac{h_1}{h_2}-1}{\frac{h_1}{h_2}+1}\right]$$

令 $k=\frac{6}{\left(\frac{h_1}{h_2}-1\right)^2}\left[\ln\frac{h_1}{h_2}-2\frac{\frac{h_1}{h_2}-1}{\frac{h_1}{h_2}+1}\right]$称为承载系数，则可得倾斜平板单位宽度($B=1$)上的承载力为

$$F=k\frac{\mu v_0 l^2}{h_2^2} \tag{7-48}$$

承载系数是一个完全由$\frac{h_1}{h_2}$决定的无量纲数，k 与$\frac{h_1}{h_2}$的关系曲线如图 7－24 所示，当$\frac{h_1}{h_2}=1$ 时 $k=0$，即平行平板无承载能力。$\frac{h_1}{h_2}=2.2$ 时，得到最大值 $k=0.16$，此时承载能力最大。考虑到平板宽度，则最大承载力为

$$F_{max}=0.16\frac{\mu v_0 l^2 B}{h_2^2} \tag{7-49}$$

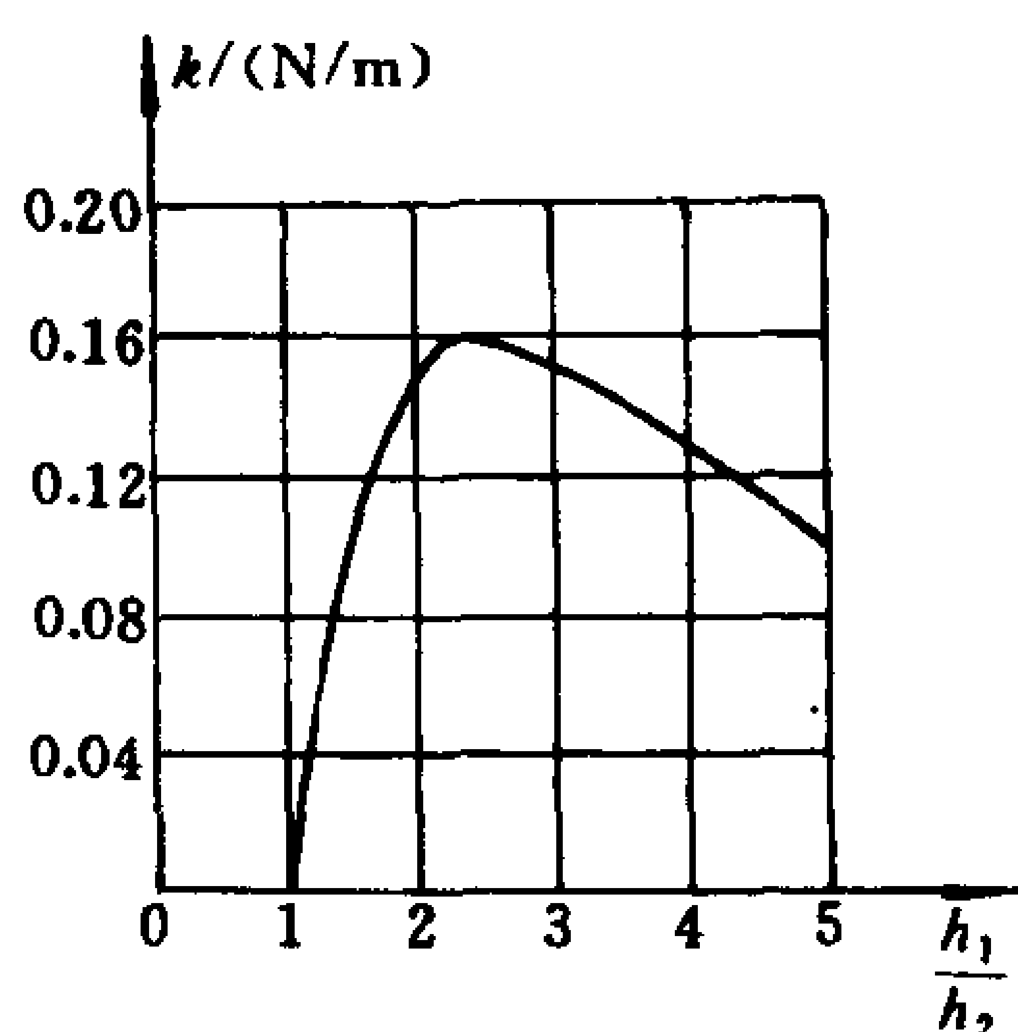


图 7－24　承载系数曲线

$\frac{h_1}{h_2}$继续增大，即倾斜平面的斜度

再加大，承载能力反而下降。

从公式中可以看到动压支承的承载力 F 与 v_0 成正比、与 l^2 成正比、而与 h_2^2 成反比，油膜越薄承载力越大。

以上计算是在宽度 B 无限大、x 方向不存在影响时得到的结果。实验证明，当实际宽度为有限值时，由于 x 方向的泄漏，实际承载力比上述结果要小。这种现象通称为轴承的端面效应。

当 $\frac{B}{l} \geqslant 2$ 时，可近似认为承载力 $F = k\frac{\mu v_0 l^2 B}{h_2^2}$

当 $\frac{B}{l} = 1$ 时，承载力等于 $0.422F$

当 $\frac{B}{l} = \frac{1}{3}$ 时，承载力等于 $0.031F$

［**例题 7－7**］ 在立式水轮机轴下端，用如图 7－21 所示的密歇尔轴承支承，轴承共有 16 个推力块，每个推力块分布在径向上的长度为 0.23 m，在圆周方向上的长度为 0.08 m，推力块与轴端面间的最小缝隙为 0.07 mm，缝隙间充满动力粘度为 0.096 Pa·s 的油液，水轮机轴的转速为 120 r/min，推力块中心分布在半径为 0.45 m 的圆周上，试求轴承的最大支承力是多少？

［**解**］ 由(7－49)式可知，每个推力块上的最大支承力为

$$F_{max} = 0.16\frac{\mu v_0 l^2 B}{h_2^2}$$

令 $\mu = 0.096$ Pa·s，$l = 0.08$ m，$B = 0.23$ m，$h_2 = 0.07 \times 10^{-3}$ m，

$$v_0 = 2\pi R\frac{n}{60} = 2\pi \times 0.45 \times \frac{120}{60} = 5.655 \text{ m/s}$$

代入上式可得

$$F_{max} = 0.16 \times \frac{0.096 \times 5.655 \times 0.08^2 \times 0.23}{(0.07 \times 10^{-3})^2} = 26\,094 \text{ N}$$

16 个推力块上的总支承力为

$$F = 16\,F_{max} = 16 \times 26\,094 = 417\,500 \text{ N}$$

因为 $\frac{B}{l} = 2.875 > 2$，故不需要端面修正。

习　　题

7－1. 两固定平行平板间隔为 $\delta=8$ cm,动力粘度 $\mu=1.96$ Pa·s 的油在其中作层流运动。最大速度为 $v_{max}=1.5$ m/s,试求:

(1) 单位宽度上的流量;

(2) 平板上的切应力和速度梯度;

(3) $l=25$ m 前后的压强差及 $z=2$ cm 处的流体速度。

[答:$q_V=0.08\ \mathrm{m^3/s}$, $\tau_0=147$ Pa, $\left.\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}z}\right|_{z=0}=75$ l/s,

$\Delta p=91\ 880$ Pa, $v_y=1.125$ m/s]

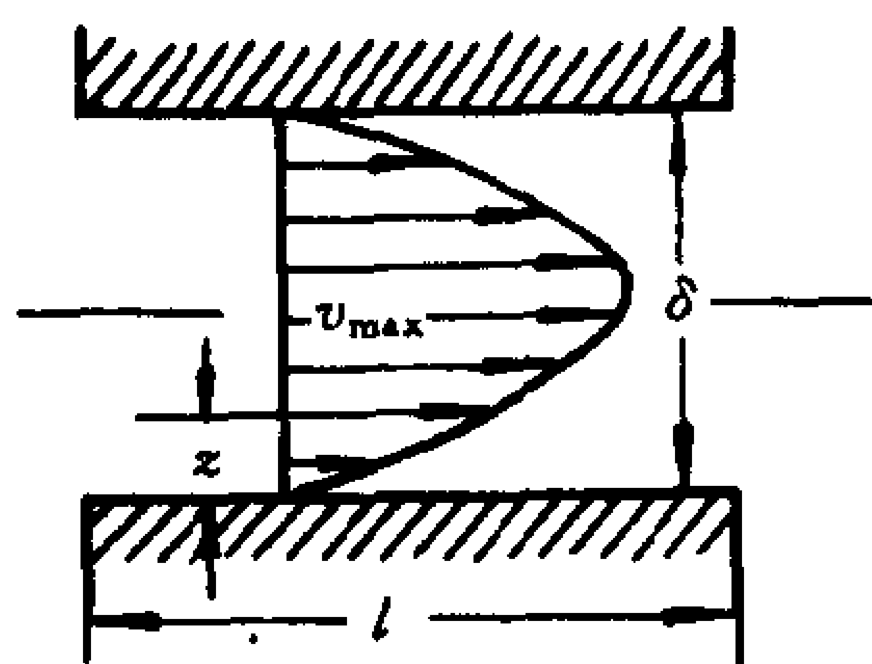
7－2. 运动平板与固定平板的缝隙为 $\delta=0.1$ mm,中间的油液动力粘度 $\mu=0.1$ Pa·s,下平板运动速度为 $v_0=1$ m/s,平板长 $l=10$ cm,宽 $B=10$ cm,平板左端压强为 0,右端压强为 $p=10^6$ Pa,平板运动方向是朝高压方向。

(1) 求平板间的流量 q_V 及维持平板运动所需的功率 P;

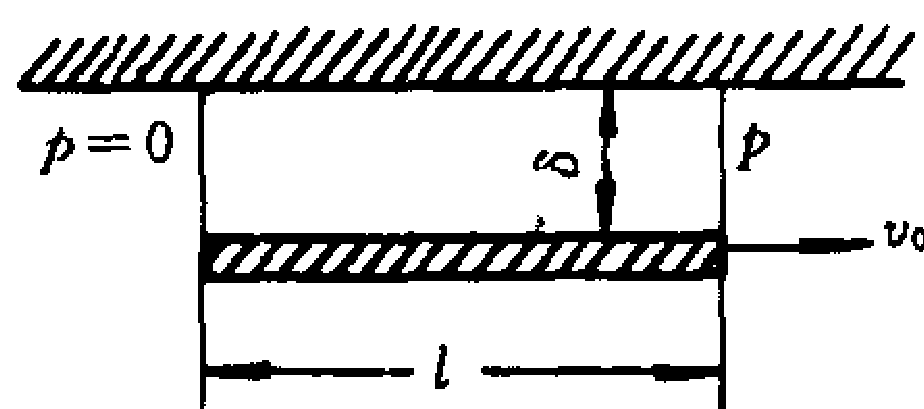
(2) 如果 δ 可变,试求流量最大时的缝隙 δ 及流量的最大值;

(3) 如果 δ 可变,试求功率最小时的缝隙 δ_b 及功率的最小值;

(4) 试求流量为零时的无泄漏缝隙 δ_0 及无泄漏压强。



题 7－1 图



题 7－2 图

[答:(1) $q_V=4.17\ \mathrm{cm^3/s}$, $P=10.83$ W

(2) $\delta=0.14$ mm, $q_{V\max}=4.7\ \mathrm{cm^3/s}$

(3) $\delta_b=0.14$ mm, $P_{min}=9.4$ W

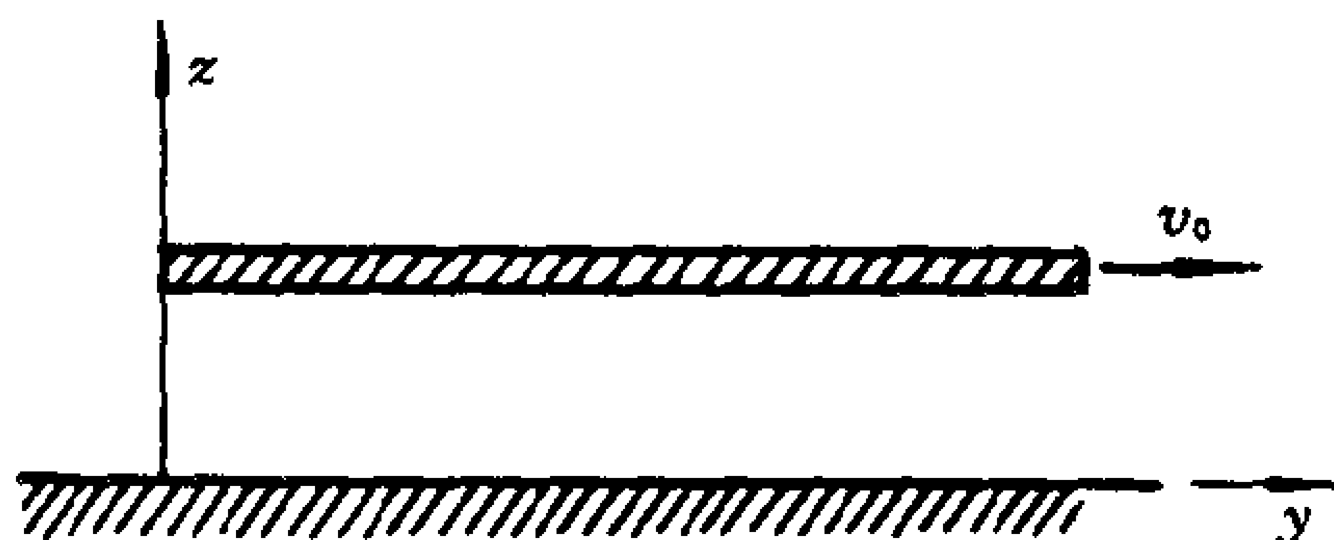
(4) $\delta_0=0.24$ mm, $p=6\times10^6$ Pa]

7－3. 相距 0.01 m 的平行平板间充满 $\mu=0.08$ Pa·s 的油,上板运动速

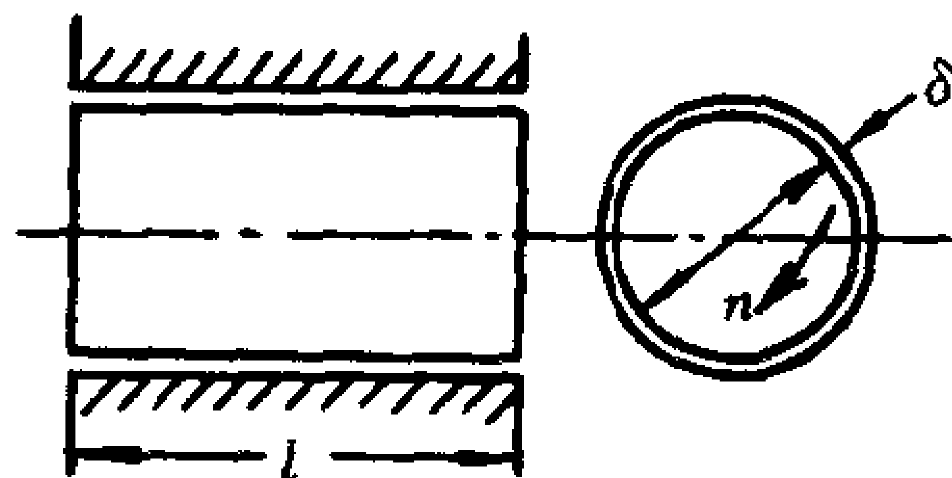
度为 $v_0=1$ m/s,在 80 m 的距离上,压强从 17.65×10^4 Pa 降到 9.81×10^4 Pa。

求 $v_y=v_y(z)$的速度分布规律,并由此计算单位宽度上的流量及上板的切应力。

[答:$v_y=161.25z-6\,125z^2$, $q_V=6.02$ l/s, $\tau_0=3.1$ Pa]



题 7-3 图



题 7-4 图

7-4. 直径为 5 cm 的轴在内径为 5.004 cm 的轴承内同心旋转,转速为 $n=110$ r/min,间隙中充满 $\mu=0.08$ Pa·s 的油液,轴承长度 $l=20$ cm,两端的压强差为 392.4×10^4 Pa,试求

(1) 沿轴向的泄漏量;

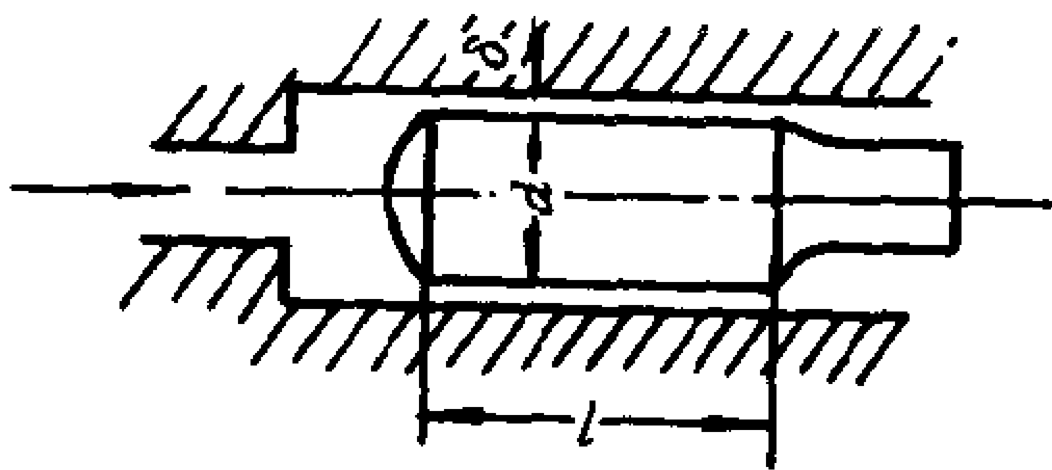
(2) 作用在轴上的摩擦力矩。

[答:$q_V=2.56\times10^{-8}$ m^3/s, $T=0.904$ Nm]

7-5. 柱塞直径 $d=38$ mm,长度 $l=80$ mm,在 $D=40$ mm 的油缸中处于平衡状态,油液动力粘度 $\mu=0.12$ Pa·s。试求下列两种情况下经缝隙的液体流量:

(1) 柱塞与油缸同心,两端压强差为 10^5 Pa。

(2) 柱塞在油缸中偏心,偏心距 $e=1$ mm,柱塞两端压强差为 40 kPa。

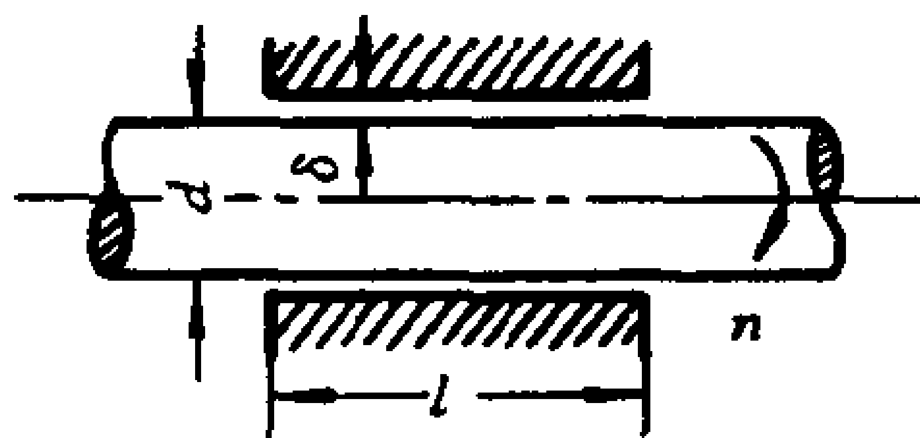


题 7-5 图

[答:$q_{V1}=q_{V2}=0.103\,6$ l/s]

7-6. 直径 $d=100$ mm 的轴，以 $n=60$ r/min 在长为 $l=200$ mm 的滑动轴承中旋转，同心间隙 $\delta=0.5$ mm，油的动力粘度为 $\mu=0.004$ Pa·s。

试求轴承的摩擦功率。

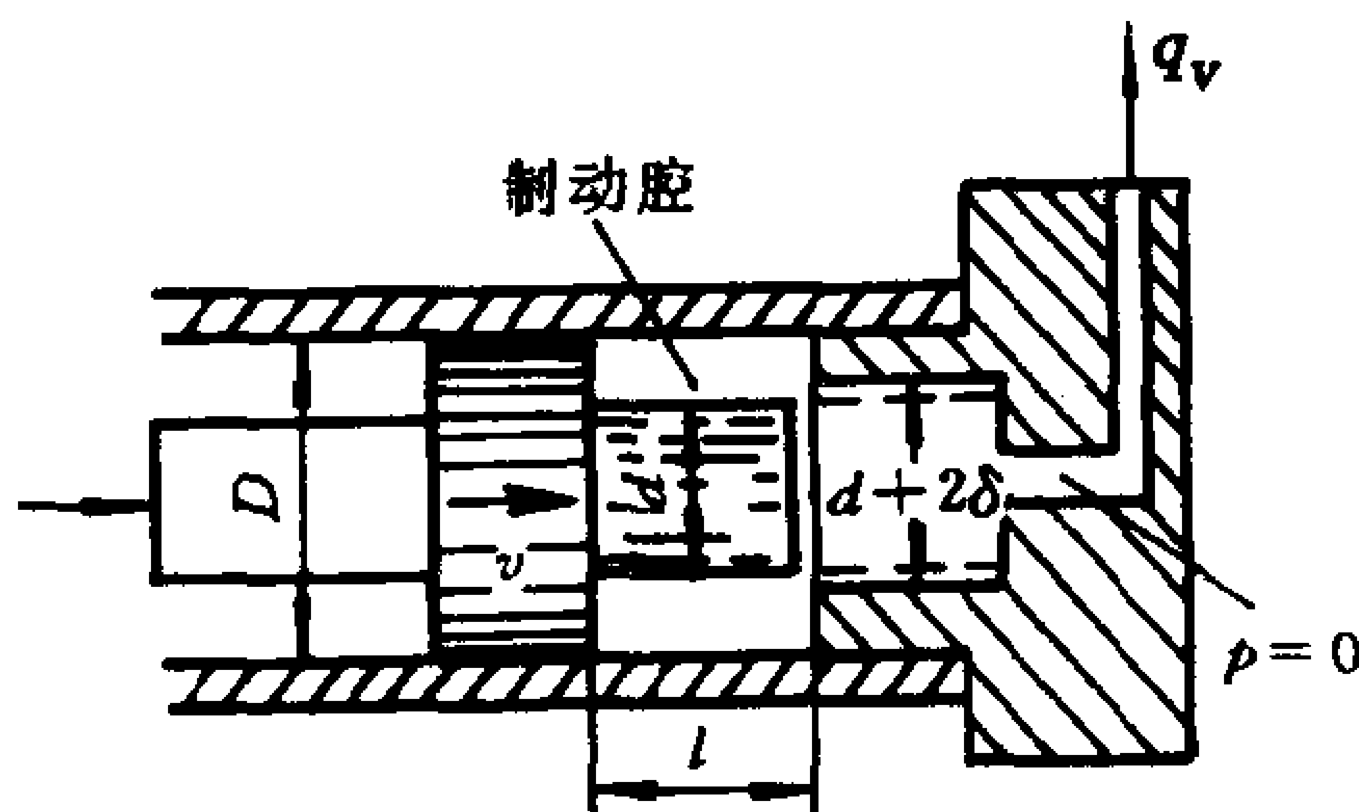


题 7-6 图

[答：$P=4.95\times10^{-2}$ W]

7-7. 图示同心环形缝隙制动器，当柱塞受力向右运动时，将制动腔中的油液经同心环形缝隙挤出，借以达到制动目的。已知 $D=60$ mm，$d=40$ mm，运动部件质量 $m=22.5$ kg，运动部件的初始速度 $v=0.1$ m/s，要求在制动距离 $l=100$ mm 内匀减速变成静止，制动腔中油的动力粘度 $\mu=7.5\times10^{-5}$ Pa·s，试求同心缝隙 δ 的尺寸。

制动腔出口压强为零。缝隙流动可按纯压差流计算。



题 7-7 图

[答：$\delta=0.43$ mm]

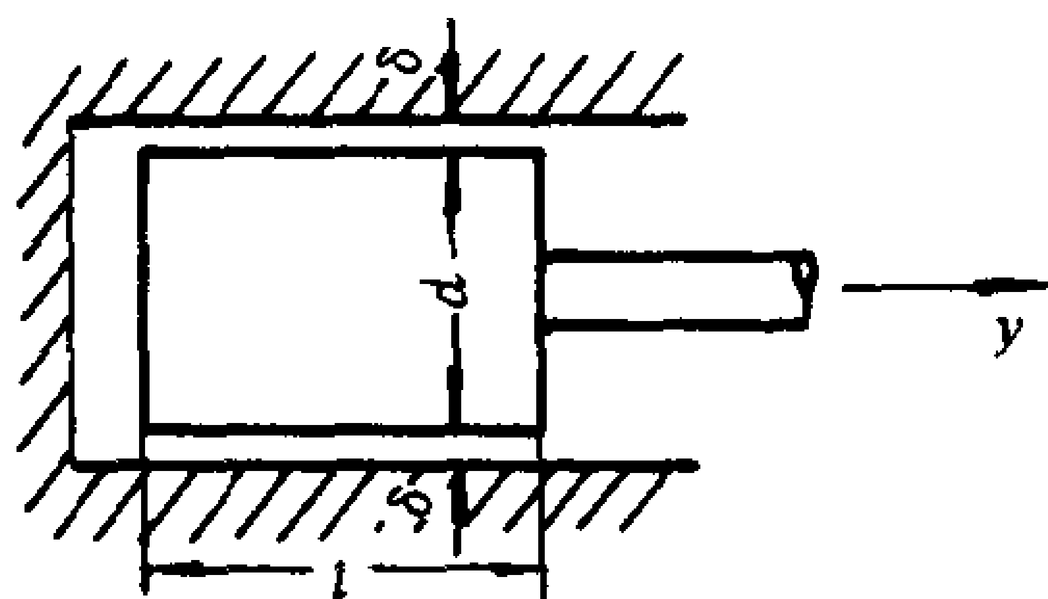
7-8. 活塞直径为 d，长度为 l，同心缝隙为 δ，活塞位移 y 与时间 t 的函数关系是

$$y=R\sin\omega t$$

式中 R 为常数，ω 为活塞曲柄角速度。

假定活塞两端压强相等，油液动力粘度为 μ，不计惯性力，试求活塞运动所需要的功率。

$\left[\text{答}: P=\frac{1}{\delta}\pi d l\mu\omega^2 R^2\cos^2\omega t\right]$



题 7－8 图

7－9. 试证明锥形止推轴承的摩擦力矩公式：

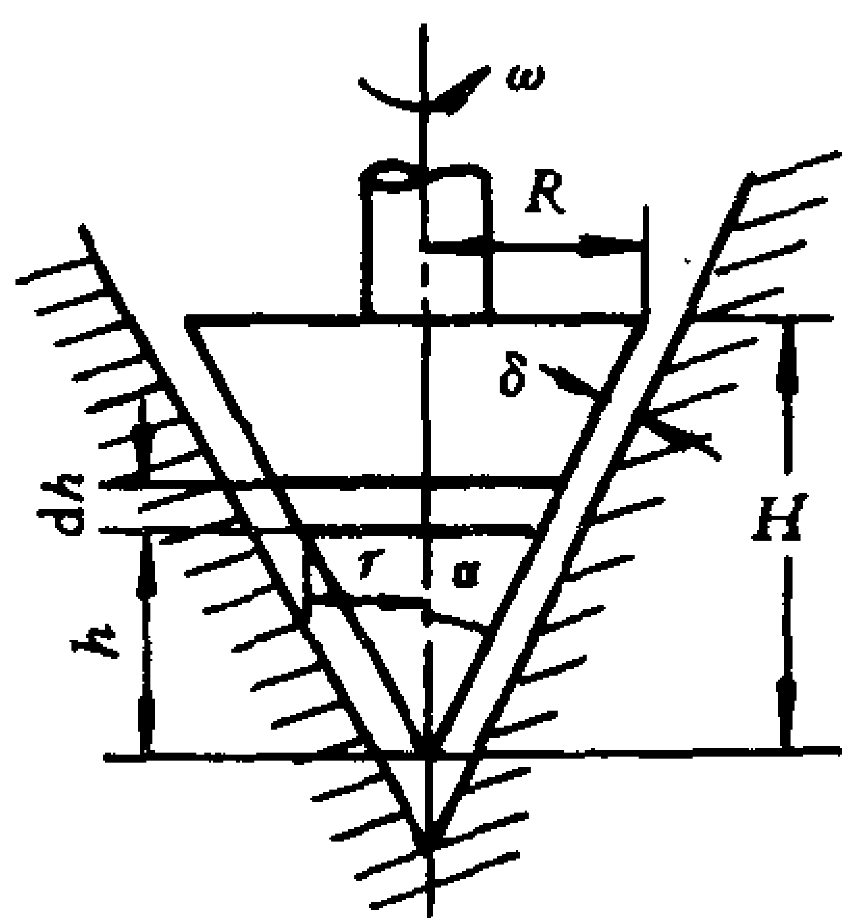
$$T=\frac{\pi\mu\omega^2 R^4}{2\delta\sin\alpha}$$

式中 ω 为角速度，R 为锥体最大半径，δ 为锥面缝隙，α 为半锥顶角，μ 为油的动力粘度。

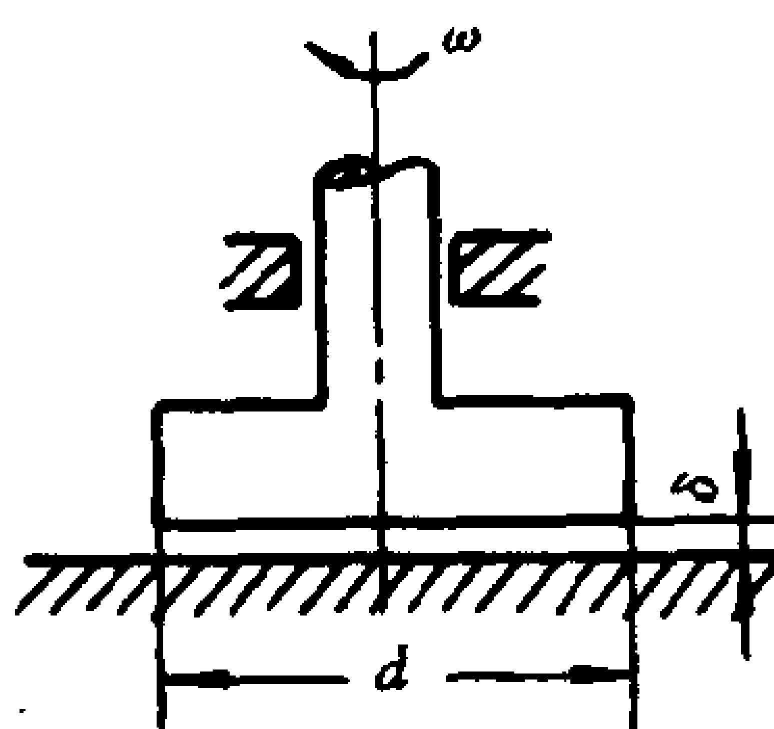
已知锥体摩擦功率 $P=100$ W，轴的转速为 $n=600$ r/min，$R=10$ cm，$\delta=0.1$ cm#，$\alpha=30^\circ$，试求油液的动力粘度。

[提示：取半径为 r，垂直高度为 h 处的微元锥面列出微元面积上的摩擦力矩，然后积分。图中的锥高 H 是可以消去的参数]

[答：$\mu=0.080\ 6$ Pa·s]



题 7－9 图



题 7－10 图

7－10. 端面止推轴承的缝隙为 δ，轴上的受力圆盘直径为 d，轴的角速度为 ω，油液动力粘度为 μ，假定缝隙中的速度分布为直线规律，试证明圆盘上的摩擦功率为

$$P=\frac{\pi\mu\omega^2}{32\delta}d^4$$

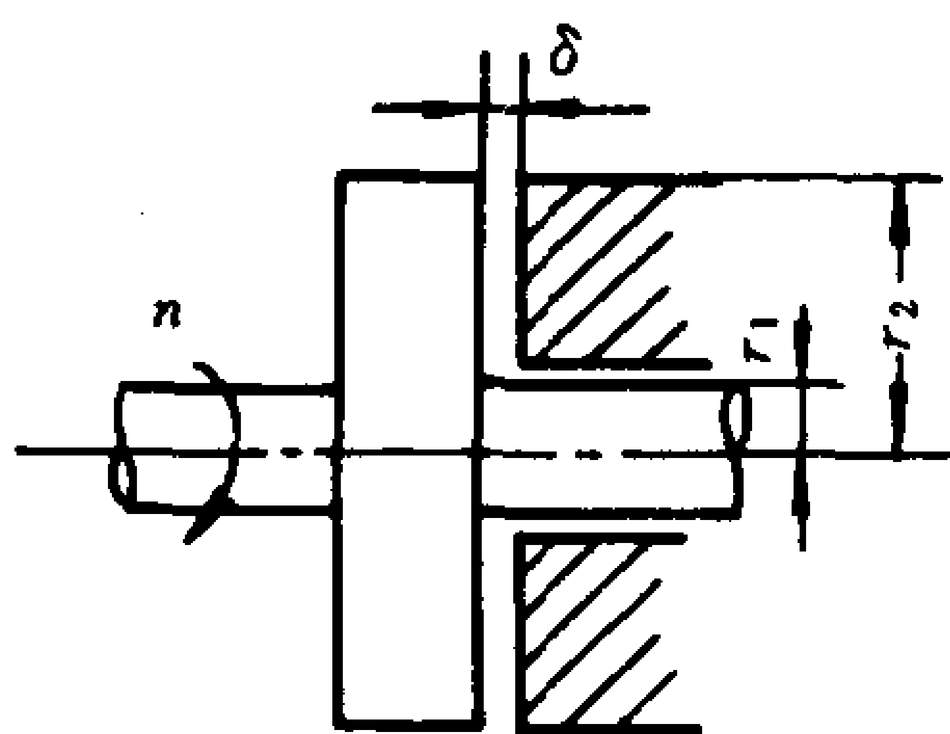
7-11. 在圆环式止推轴承中，轴的半径 $r_1=7.5$ cm，环形座半径为 $r_2=10$ cm，止推轴承的油膜厚度 $\delta=0.05$ cm，油的动力粘度 $\mu=0.15$ Pa·s，轴的转速为 $n=300$ r/min，圆环缝隙中速度分布可近似认为是直线规律，试求圆环上的摩擦功率。

[答：$P=31.8$ W]

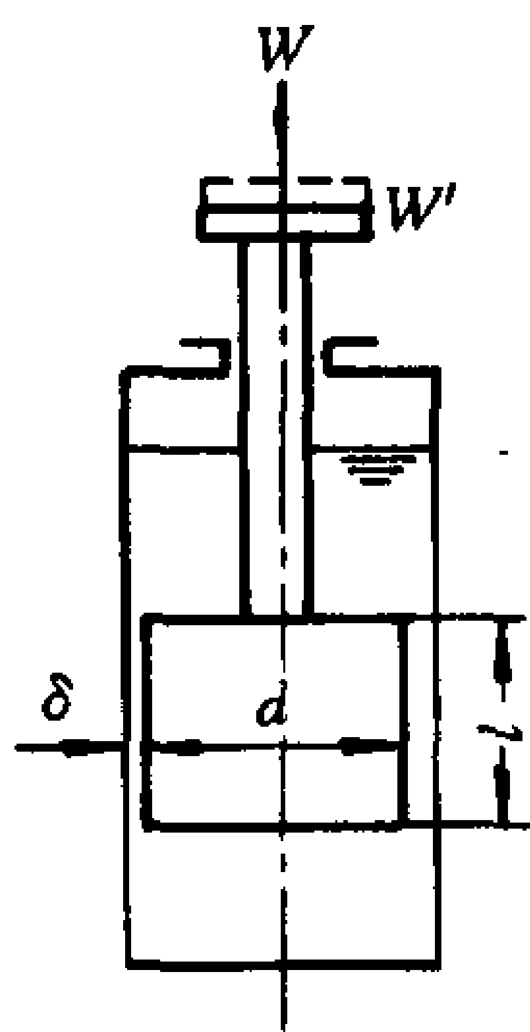
7-12. 油液减震器由图示的柱塞和油缸所组成，柱塞直径为 $d=7.5$ cm，长度为 $l=10$ cm，同心间隙为 $\delta=0.12$ cm，受载荷后柱塞匀速下降。

如果在载荷 W 作用下，下降 5 cm 的时间为 100 s；在载荷 $W+W'$ 的作用下，下降 5 cm 的时间为 86 s。已知 $W'=1.334$ N，试求载荷 W 的大小及油液的动力粘度 μ。

[答：$W=8.34$ N，$\mu=0.281$ Pa·s]



题 7-11 图



题 7-12 图

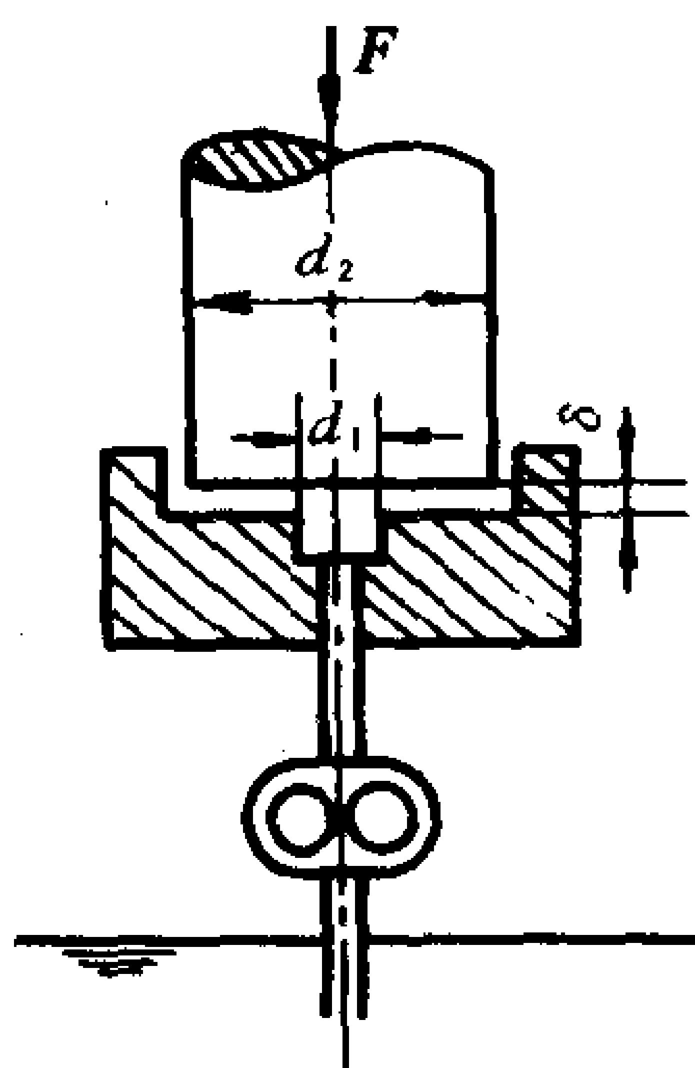
7-13. 作用在轴上的力为 $F=10^4$ N，轴承上油槽直径 $d_1=4$ cm，轴直径 $d_2=12$ cm，油液动力粘度为 $\mu=0.1$ Pa·s，流量 $q_V=10^{-4}$ m³/s。

忽略油管中损失，试求油泵功率及圆盘缝隙。

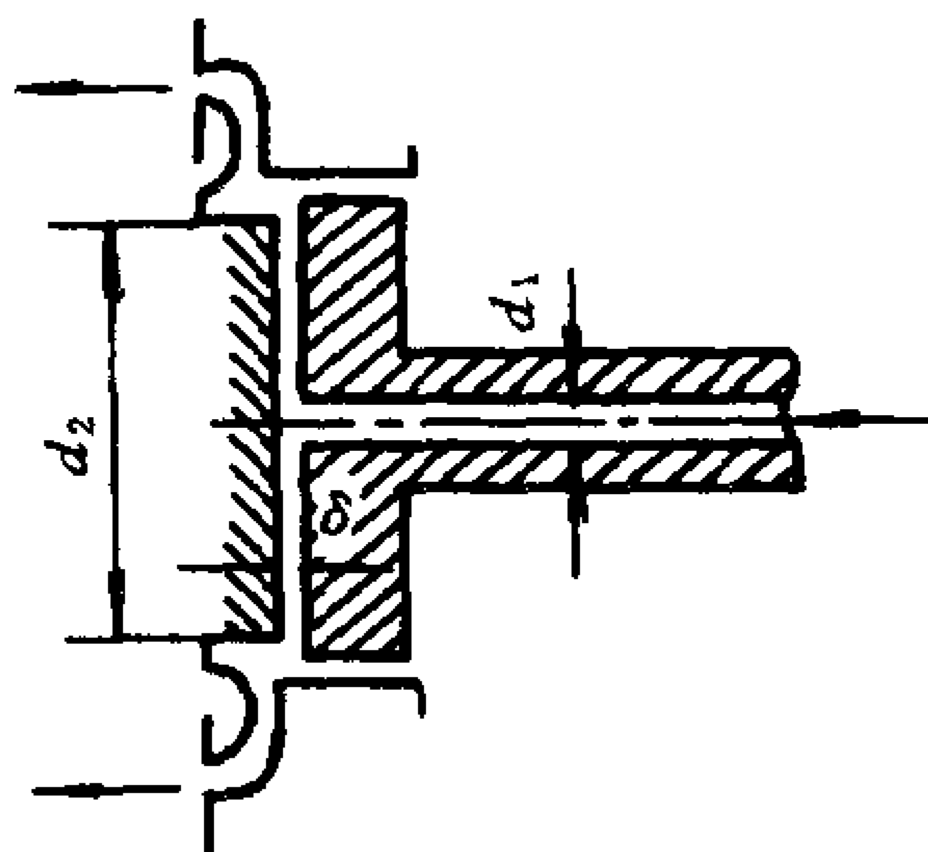
[答；$P=0.22$ kW，$\delta=0.213$ mm]

7-14. 水力止推轴承承受 400 N 的轴向负载，$d_1=12$ mm，$d_2=45$ mm，流体动力粘度 $\mu=0.063$ Pa·s，$\delta=0.2$ mm，忽略轴承转动影响，试求圆盘中心处的压强 p_1 及经过缝隙的流量 q_V。

[答：$p_1 = 8.97 \times 10^5$ Pa，$q_V = 0.045$ l/s]



题 7－13 图



题 7－14 图

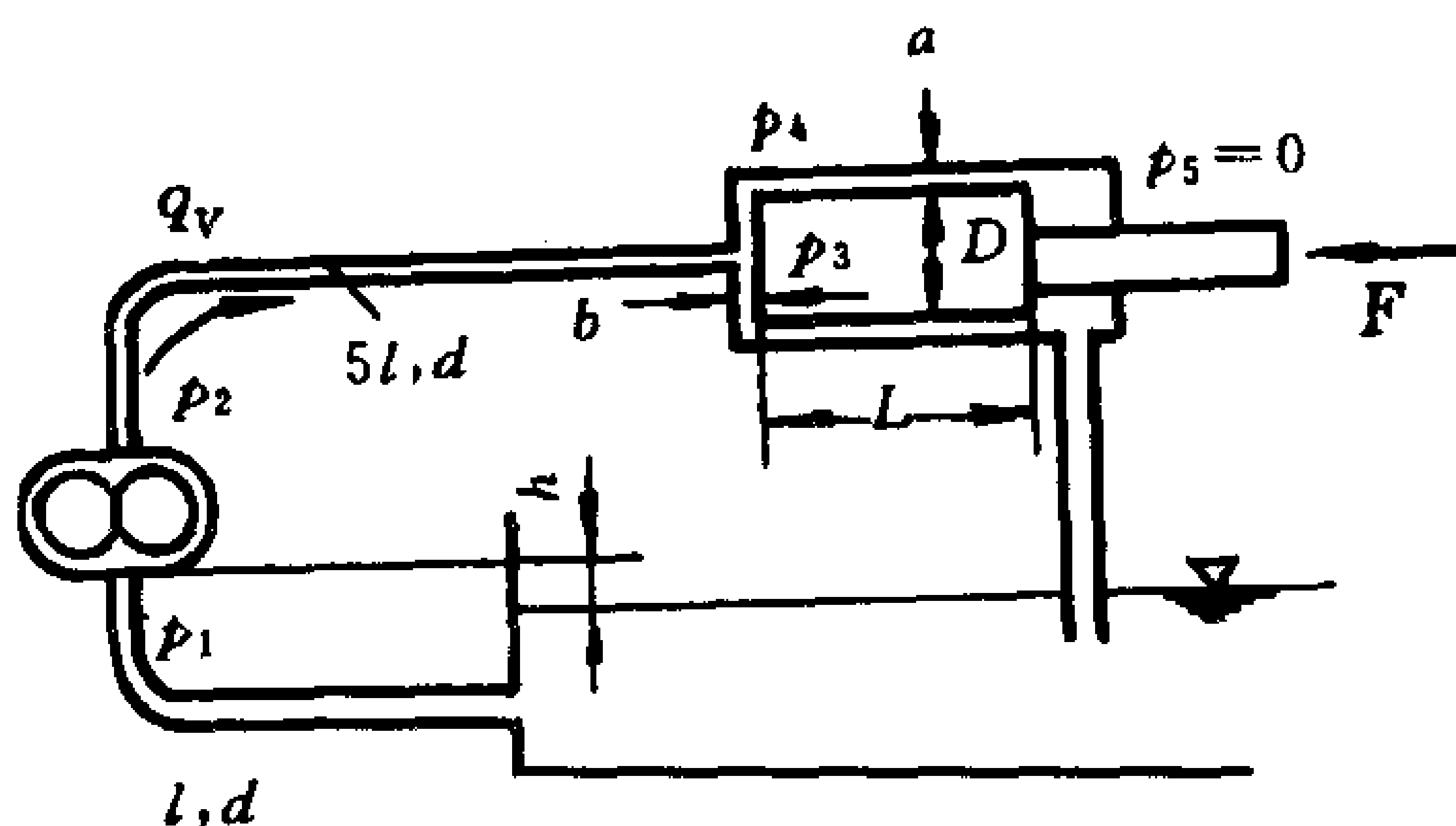
7－15. 齿轮泵向具有端面缝隙 $b = 0.3$ mm 和同心环形缝隙 $a = 0.4$ mm的柱塞和套筒供油，借以平衡柱塞上的轴向力 F。

已知泵入口在液面之上 $h = 0.7$ m，吸油管 $l = 1$ m，$d = 15$ mm，压油管长为 $5l$。柱塞直径 $D = 50$ mm，柱塞长度 $L = 100$ mm，油的密度为 $\rho = 900$ kg/m^3，动力粘度 $\mu = 0.065$ Pa·s，流量 $q_V = 0.4$ l/s。

试求：

(1) 泵入口压强 p_1、泵出口压强 p_2、压油管终端压强 p_3 及圆盘外缘压强 p_4，假定柱塞右端压强 $p_5 = 0$。

(2) 柱塞的轴向力 F 和泵的功率。



题 7－15 图

[答：(1) $p_1 = 0.25 \times 10^5$ Pa(真空度)，$p_2 = 5\ 450$ kPa，$p_3 = 5\ 350$ kPa，

$p_4 = 3\ 100$ kPa,以上三项均系计示压强。

(2) $F = 7\ 835$ N, $P = 2.19$ kW]

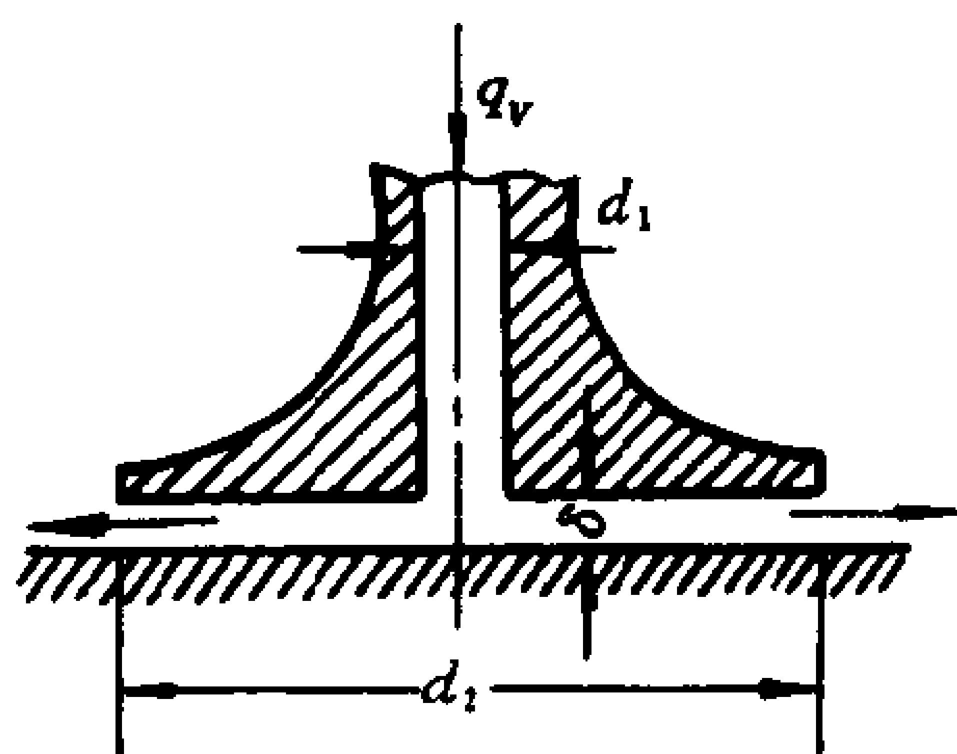
7-16. 动力粘度 $\mu = 0.147$ Pa·s 的油液从直径 $d_1 = 10$ mm 的小管进入圆盘缝隙,然后经缝隙 $\delta = 2$ mm 从 $d_2 = 40$ mm 的圆盘外缘流入大气,流量 $q_V = 4$ l/s,试求小管与圆盘交界处的压强 p_1 及流体作用在上圆盘上的力。

[答: $p_1 = 194.6$ kPa, $F = 67.4$ N]

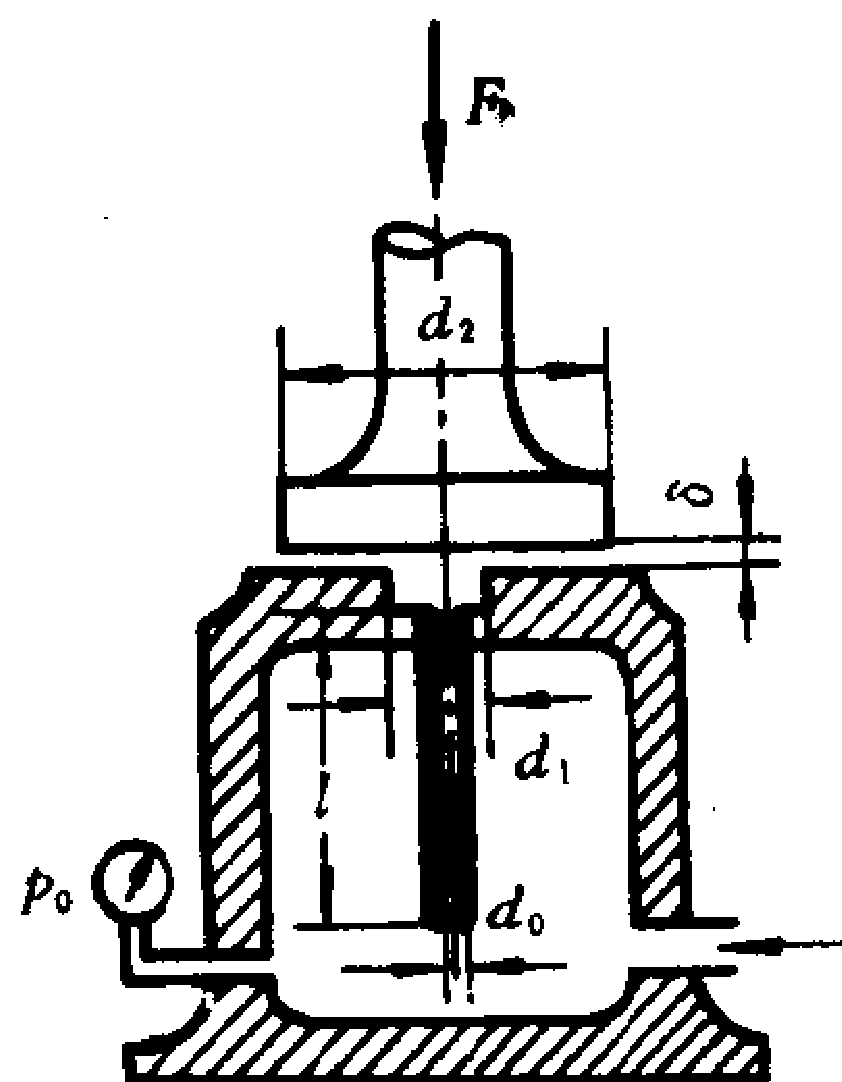
7-17. 油泵将油输入立轴下面的贮油池后,再经毛细管($d_0 = 2$ mm, $l = 150$ mm)及立轴的端面缝隙($d_1 = 40$ mm, $d_2 = 120$ mm, $\delta = 0.1$ mm)而后流回油箱,已知轴上的载荷是 $F = 5\ 000$ N,油的动力粘度是 $\mu = 0.04$ Pa·s。

试求油的流量和油池中的压强 p_0。

[答: $q_V = 0.013$ l/s, $p_0 = 1\ 290$ kPa]



题 7-16 图



题 7-17 图

7-18. 图示为立轴止推轴承的滑块。下平面运动,在楔形油膜中产生压强借以支承荷重。

已知下平面运动速度为 $v_0 = 3$ m/s,油液动力粘度 $\mu = 0.078\ 5$ Pa·s, $h_2 = 0.2$ mm, $l = 60$ mm, $\alpha = 15'$,轴承宽度(与图面垂直方向)$B = 150$ mm。

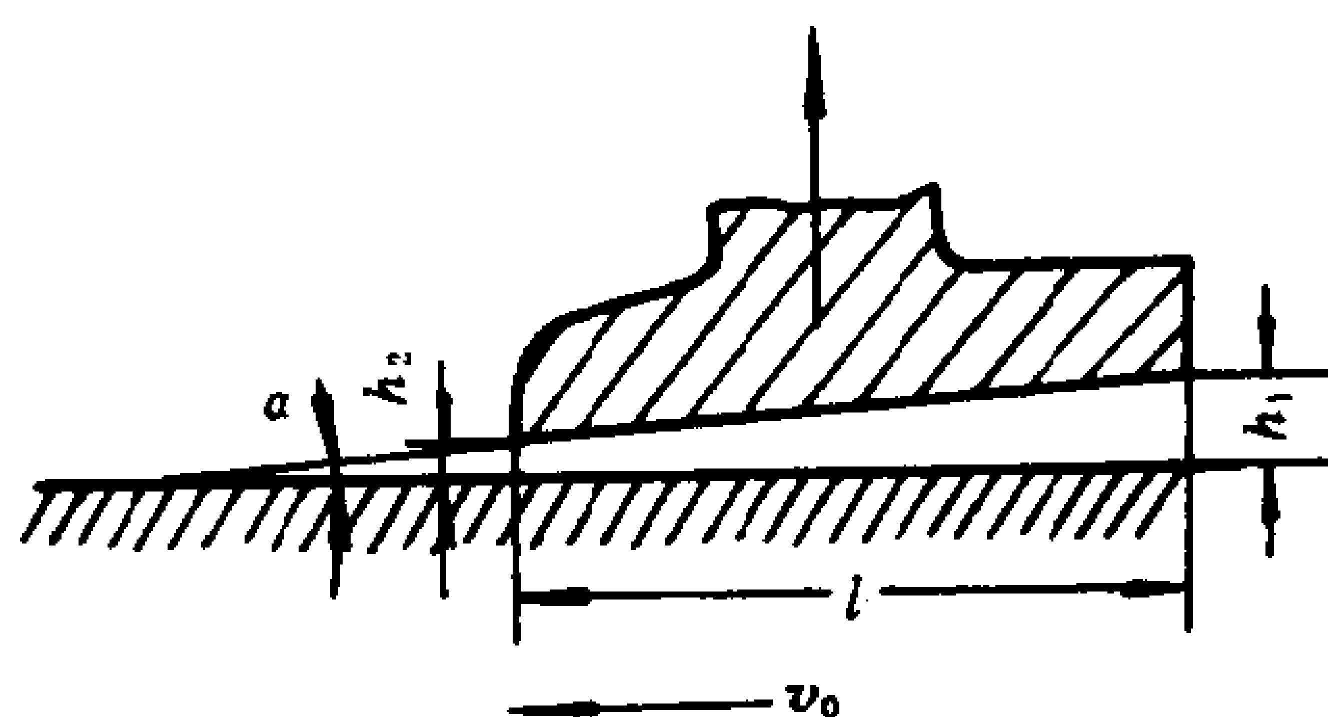
试求轴承的支承力 F 为若干? 油楔的流量多少?

[答: $F = 508$ N, $q_V = 0.0628$ l/s]

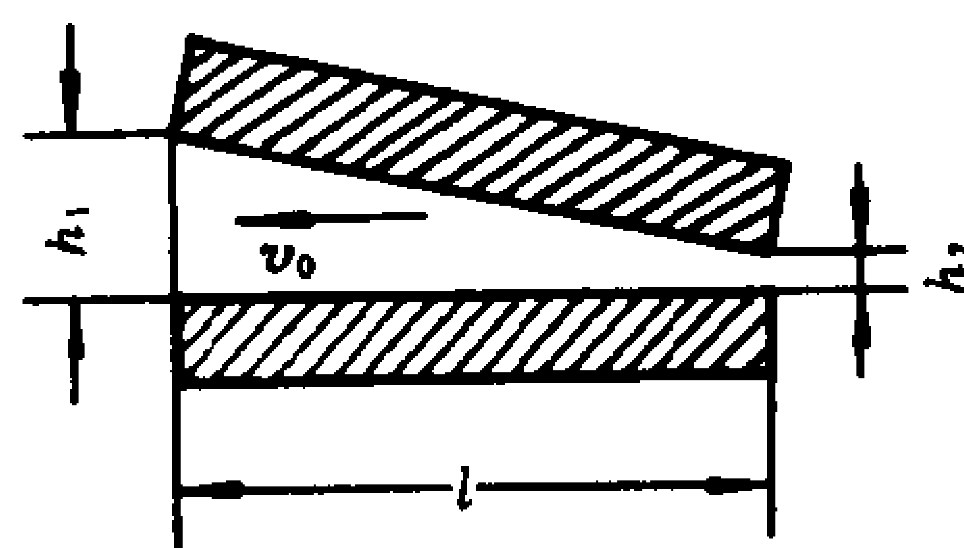
7-19. 轴承倾斜滑块运动速度 $v_0 = 1.22$ m/s,油液动力粘度 $\mu = 0.08$ Pa·s, $h_1 = 0.075$ mm, $h_2 = 0.025$ mm, $l = 152$ mm,滑块宽度 $B = 0.305$ m。

试求液压支承力。

[答:$F=16\times10^4$ N]



题 7-18 图



题 7-19 图

第八章　气体的一元流动

气体动力学研究可压缩性流体的运动规律及其应用。它与航空、燃气轮、热能动力等技术部门联系十分密切。随着航空航天技术的发展,气体动力学早已成为流体力学中最为活跃的一个独立分支。

气体一元流动只是气体动力学中最初步的基本知识,它只讨论气体流动参数(如速度、压强、密度、温度等等)在过流断面上的平均值的变化规律,而不研究气流流场的空间变化情况。

气体一元流动虽然简单,但却非常实用,除航空等科学外,许多技术领域中的气流问题大都可简化为一元流动问题。如气体管流、发动机的空气供给、气动控制元件、风动工具、通风机、压气机、燃气轮、涡轮增压器等许多问题都可用一元流动方法求得一些简化而实用的结果。

本章重点介绍气体一元流动的基本概念、流动特性和简单喷管计算。这些基本知识与工程热力学的关系非常密切,有些内容可以互为参考。工程热力学着重分析气流的焓熵特性,而工程流体力学则着重分析气流的机械能转化。

§8-1　声速和马赫数

气体压缩性对流动性能的影响,是由气流速度接近声速的程度来决定的。为了讨论气体的压缩性,必须首先了解声速和马赫(Mach)数这两个概念。

一、声速方程式

声速是微弱扰动波在介质中的传播速度。例如弹拨琴弦，振动了空气，空气的压强、密度发生了微弱变化，这种状态变化在空气中形成一种不平衡的扰动，扰动又以波的形式迅速外传。人耳所能接收的振动频率有一定的范围，气体动力学中的声速概念，则不仅限于人耳收听范围，只要是介质中的扰动传播速度皆称为声速。这里是把它作为压强、密度状态变化在流体中的传播过程来看待的。

如图 8－1，面积为 A 的活塞在充满静止空气的管道中以缓慢的速度 $\mathrm{d}v$ 向右移动，活塞运动造成气体压缩，这种不平衡状态的传播速度就是声速 c，$c \gg \mathrm{d}v$，因而经过 $\mathrm{d}t$ 时间虽然活塞只移动 $\mathrm{d}v\mathrm{d}t$ 距离，而扰动波却早已传至 $c\mathrm{d}t$ 处了。

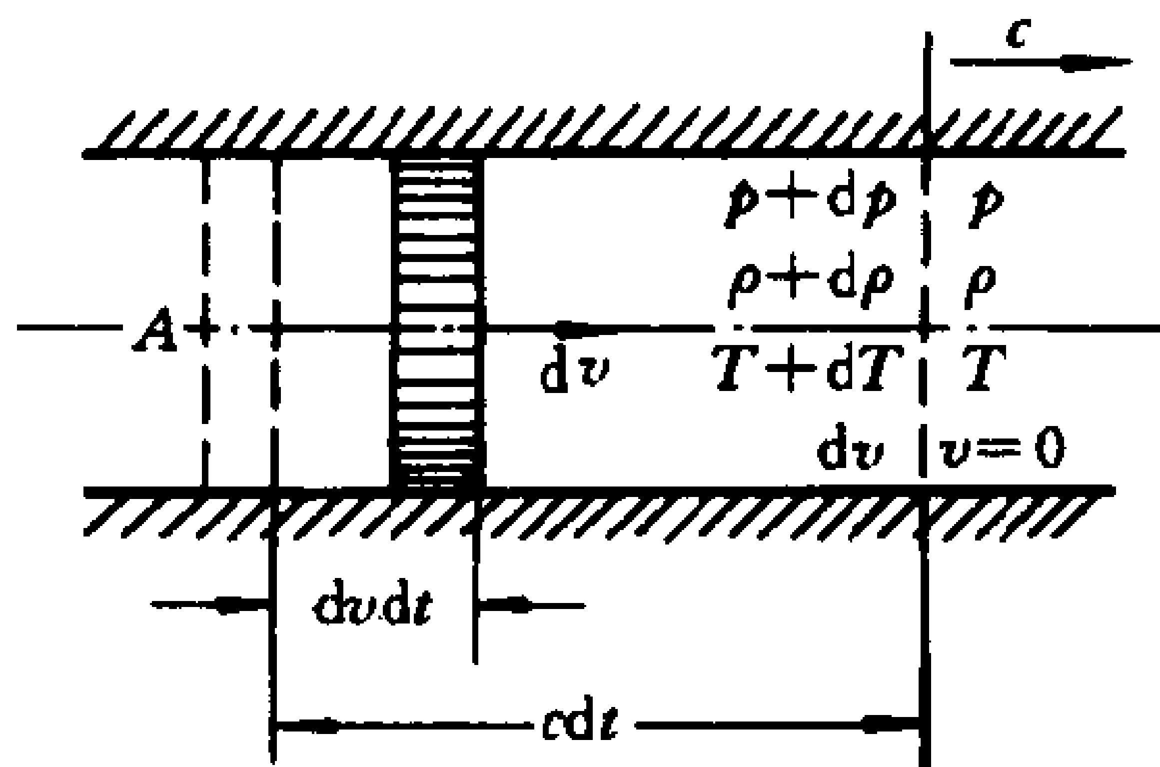


图 8－1　声速传播过程

波前气体处于静止状态，$v=0$，其状态参数为 p、ρ、T。波后气体处于扰动状态，并在活塞推动下产生了一个随活塞一起缓慢运动的速度 $\mathrm{d}v$，其他状态参数亦均有微小变化，变为 $p+\mathrm{d}p$、$\rho+\mathrm{d}\rho$、$T+\mathrm{d}T$。

我们现在分析一下受到扰动的这部分气体在 $\mathrm{d}t$ 时间前和 $\mathrm{d}t$ 时间后的质量守恒表达式。

$\mathrm{d}t$ 前气体质量为 $\rho c\mathrm{d}tA$，$\mathrm{d}t$ 后气体质量为 $(\rho+\mathrm{d}\rho)(c-\mathrm{d}v)\mathrm{d}tA$，由质量守恒则可得

$$\rho c\mathrm{d}tA=(\rho+\mathrm{d}\rho)(c-\mathrm{d}v)\mathrm{d}tA$$

消去 $\mathrm{d}tA$ 可得

$$\mathrm{d}v=\frac{c\,\mathrm{d}\rho}{\rho+\mathrm{d}\rho} \tag{8-1}$$

其次再分析一下受到扰动这部分气体在 $\mathrm{d}t$ 时间前后的动量变化率和它受到的所有外力矢量和的关系。

$\mathrm{d}t$ 时间之前气体动量为零，$\mathrm{d}t$ 时间之后气体动量为 $\rho c\,\mathrm{d}tA\,\mathrm{d}v$，因此动量变化率是 $\rho cA\,\mathrm{d}v$。

这部分气体左端压强为 $p+\mathrm{d}p$，右端压强为 p，乘以断面面积 A，则可得其合外力为

$$(p+\mathrm{d}p)A-pA=\mathrm{d}pA$$

按照动量定理，动量变化率等于同方向上的所有外力和，故

$$\rho cA\,\mathrm{d}v=\mathrm{d}pA$$

消去 A，可得

$$\mathrm{d}v=\frac{\mathrm{d}p}{\rho c} \tag{8-2}$$

由(8－1)(8－2)式，可得

$$\frac{c\,\mathrm{d}\rho}{\rho+\mathrm{d}\rho}=\frac{\mathrm{d}p}{\rho c}$$

即

$$c^2=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}\,\frac{\rho+\mathrm{d}\rho}{\rho}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}\left(1+\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}\right) \tag{8-3}$$

因为活塞移动速度很小，气体受到的扰动也很弱，状态参数的相对变化量都是极小的，因此当 $\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}\to 0$ 时，即可得弱扰动波的传播速度

$$c=\sqrt{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}} \tag{8-4}$$

这就是声速方程式的微分形式。

因为 $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}p}$ 代表密度随压强的变化率，可压缩性越大，自然 $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}p}$ 也

越大，其倒数$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}$则越小，因而 $c=\sqrt{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}}$也越小。这说明声速大小可以作为流体压缩性大小的标志。声速在哪一种介质中传播得越快，说明这种介质的可压缩性越小。由此可见水中声速必然大于空气中的声速。扰动传播速度大小也代表自动控制系统中控制信号的快慢。由此也顺便说明，液压控制系统的灵敏性必然高于气动控制系统。气动控制，由于管道中气体可压缩性大，因而动作稍嫌迟缓，这是气动控制的一个弱点，当然它也有设备轻便、廉价等液压控制系统所不具备的优点，这里就不多说了。

下面我们再来推导声速方程式的另外两种形式。

因为微弱扰动波在传播过程中引起的温度变化也很微弱，这种弱扰动波在流体中传播时，流体的压缩或膨胀过程不仅绝热而且可逆。于是(8－4)式中的压强密度关系可以根据绝热或等熵方程式求得，即

$$pv^{\gamma}=\frac{p}{\rho^{\gamma}}=C$$ （式中 v 为气体的比体积，γ 为绝热或等熵指数） (8－5)

或

$$p=C\rho^{\gamma}$$

p 对 ρ 求导数，则

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}=C\gamma\rho^{\gamma-1}=\frac{p}{\rho^{\gamma}}\gamma\rho^{\gamma-1}=\frac{\gamma p}{\rho} \tag{8-6}$$

又根据理想气体状态方程式

$$pv=\frac{p}{\rho}=R_gT \tag{8-7}$$

可得

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}=\gamma R_gT \tag{8-8}$$

由(8－6)及(8－8)式可以得到声速方程式的另外两种形式。于是

将声速方程式的三种形式写在一起，则

$$c=\sqrt{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}}=\sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}=\sqrt{\gamma R_g T} \tag{8-9}$$

对于空气来说，它的绝热指数 $\gamma=1.4$，它的气体常数 $R_g=287\ \mathrm{J/(kg\cdot K)}$，于是空气中的声速为

$$c=\sqrt{1.4\times 287T}=20.1\sqrt{T}\ \mathrm{m/s} \tag{8-10}$$

在不同温度下，空气中的声速可列如表 8－1。

表 8－1　空气中的声速

海拔高度/km	30	20	10	2	0	0	0	0
空气温度/℃	－40.2	－56.5	－49.9	2	15	25	50	100
声速/(m/s)	306	295	299	332	340	346	360	387

这样我们可以进一步看到，声速大小不仅反映不同介质的压缩性，而且它也反映同一种介质在不同温度状态下的压缩性。例如对于空气来说，温度越低它的声速越小，它的可压缩性则越大。这一结论与第一章气体的膨胀和压缩性分析是完全一致的。

声速直接与气体的温度有关，它也是代表气体状态一个重要参数，不同地点不同位置的气体温度不同，因而不同地点（例如海平面或高空），不同位置（例如压气机的进口或出口等等）处的声速是不同的。声速也称为当地声速，因为离开具体地点的温度状况，声速的大小也就无从确定了。这一点在机械中尤其重要，气体机械的不同部位处均有不同的温度，因而各处都有不同的声速，在管流不同断面上也有类似的情况。我们由此可以看到，气体中的声速也和速度、压强、温度、密度等参数一样，是坐标和时间的函数。了解声速的这一特点，就可以使我们从“声音传播速度”这一习惯看法中解脱出来，从而在气体状态参数的角度上来认识声速概念

的重要性。

二、马赫数

流动运动速度 v 与介质中声速 c 之比,称为马赫数,用 Ma 表示,则

$$Ma=\frac{v}{c} \tag{8-11}$$

根据相对性原理,固体飞行器在静止空气中的运动速度与空气绕固定飞行器的运动速度大小相等方向相反时,空气作用在飞行器上的力学效果是相同的。因而通常也以飞行器速度与当地声速之比称为飞行器运动的马赫数。

当物体在气体中运动,或者反过来,气流绕物体流动,物体将对气体产生扰动,假如扰动源是物体的前缘点,则由此发出的扰动波将以声速向四周传播,其传播情况有图 8-2 所示的四种方式。

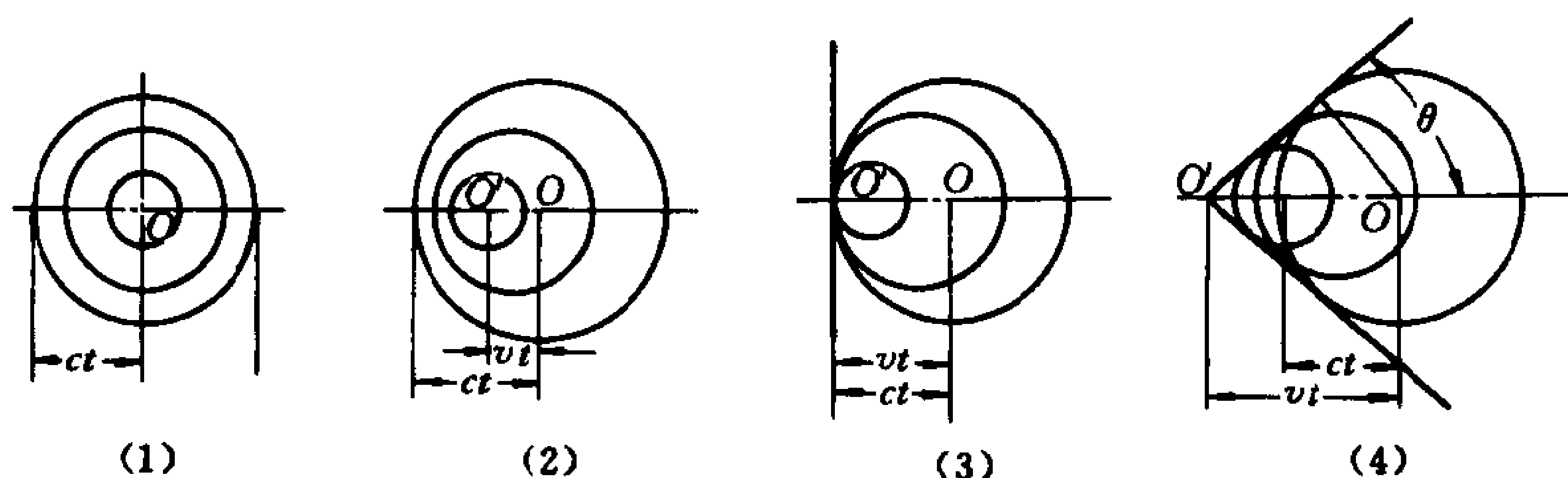


图 8-2 扰动波的传播方式

图(1),扰动源静止,此时扰动波均以 O 点为中心,经过一定时间后,扰动波布满整个空间。

图(2),扰动源运动速度 $v<c$,$Ma<1$,称为亚声速流动。扰动源 t 秒之前在 O 点处,t 秒之后运动到 O' 点处;$OO'=vt$。而 t 秒之前在 O 点所发生的扰动波则已传播至以 O 为圆心,以 ct 为半径的球面,$vt<ct$,波在物体之前。经过一定时间,扰动波布满整个空间。

图(3),扰动源运动速度 $v=c$,$Ma=1$,称为声速流动。扰动源 t 秒之前在 O 点,t 秒之后到 O' 点,$OO'=vt=ct$。物体与扰

动波同时到达 O' 点，扰动波始终不会超出物体之前，扰动波只能布满扰动源后的半个空间，而扰动源之前的半个空间则为不受扰动区或寂静区。

图(4)，扰动源运动速度 $v>c$，$Ma>1$，称为超声速流动。t 秒之前扰动源在 O 点，t 秒之后扰动源到达 O' 点，$OO'=vt>ct$。物体在扰动波之前。扰动波传播范围只能充满以 O' 为顶点的锥形空间，这个空间称为马赫锥，其半锥角 θ 称为马赫角，由图可得

$$\sin\theta=\frac{ct}{vt}=\frac{c}{v}=\frac{1}{Ma} \tag{8-12}$$

马赫数越大，马赫角越小。一般 $Ma>3$ 称为高超声速流动，此时扰动区域只有 $2\theta<40^\circ$ 的范围。而马赫锥外 320° 空间中皆不受扰动。

上面叙述的四种情况，是以马赫数的大小来划分的，马赫数的大小取决于气流速度（或物体运动速度）v 与介质中声速 c 的比值。

在环境温度不变、声速不变时，气流速度越大马赫数越大。而当气流速度不变，环境温度或声速改变时，马赫数也要发生变化。因此马赫数也是一个当地值，它与声速一样也是反映气体状态的参数，不过它反映的是动态气流，因而比反映静态气体可压缩性大小的声速概念更有实用价值。一切航空模型实验都是以马赫数相等作为相似模型实验的依据。

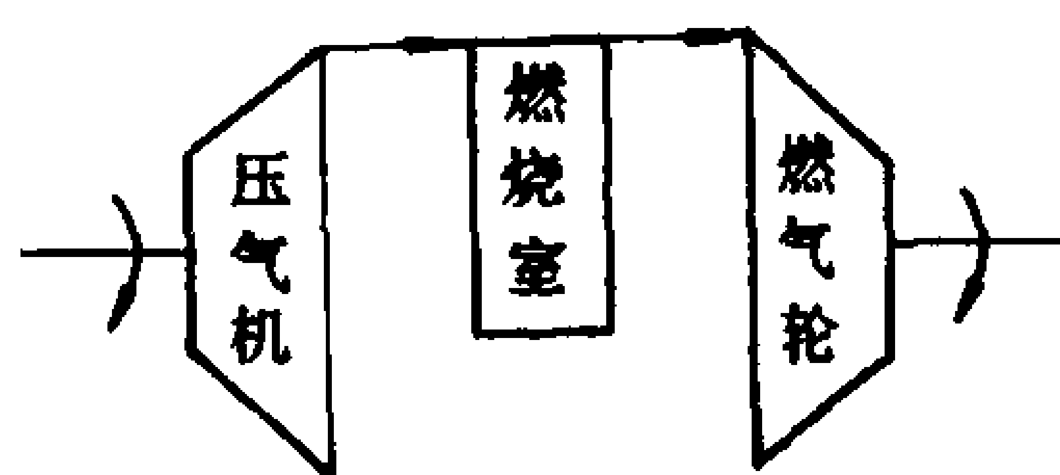


图 8-3　燃气轮机

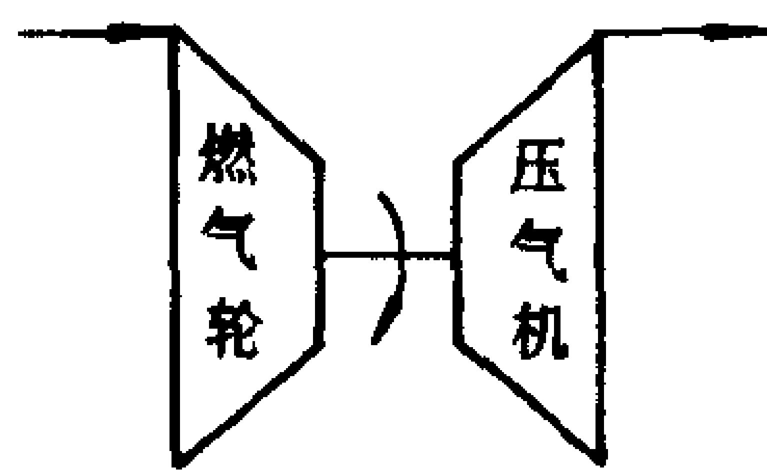


图 8-4　废气涡轮增压器

在图 8-3 的燃气轮机与图 8-4 的废气涡轮增压装置中，燃

气轮中气流的温度均比压气机中气流的温度高，因而在同样转数下，压气机中的气流马赫数均大于燃气轮中的马赫数。飞行器的马赫数也有类似情况。同样飞行速度，在高空低温时的马赫数大于低空高温时的马赫数。

[例题 8－1] 如图 8－5，压气机叶轮入口与出口、扩压器与蜗壳出口分别以 1、2、3、4 点表示。已知 $v_1 = 48$ m/s、$p_1 = 98$ kPa，$\rho_1 = 1.1$ kg/m³；$v_2 = 220$ m/s，$t_2 = 62$ ℃；$v_3 = 130$ m/s，$t_3 = 77$ ℃；$v_4 = 50$ m/s，$p_4 = 149$ kPa，$\rho_4 = 1.5$ kg/m³。试比较这四处的声速和马赫数。

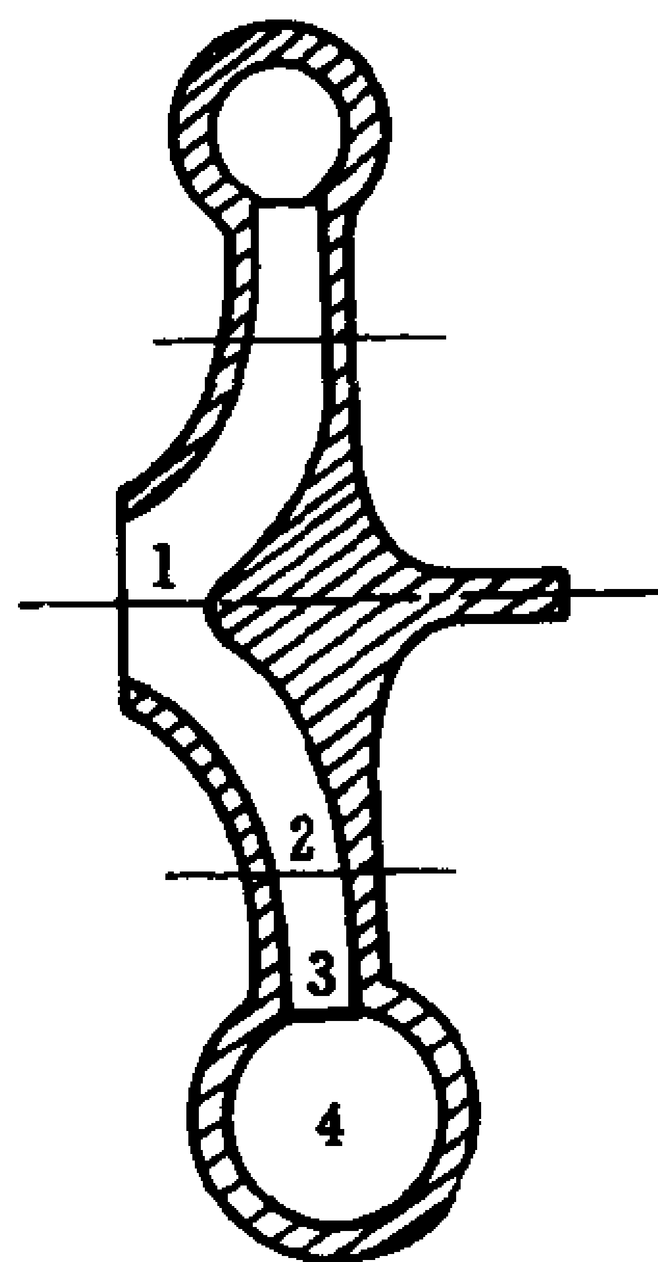


图 8－5 压气机流道

[解] 根据(8－11)与(8－9)式，

$$Ma_1 = \frac{v_1}{c_1} = \frac{v_1}{\sqrt{\gamma \frac{p_1}{\rho_1}}} = \frac{48}{\sqrt{\frac{1.4}{1.1} \times 0.98 \times 10^5}}$$

$$= \frac{48}{353} = 0.136$$

$$Ma_2 = \frac{v_2}{c_2} = \frac{v_2}{\sqrt{\gamma R_g (t_1 + 273)}}$$

$$= \frac{220}{\sqrt{1.4 \times 287 \times 335}}$$

$$= \frac{220}{369} = 0.599$$

$$Ma_3 = \frac{v_3}{c_3} = \frac{v_3}{\sqrt{\gamma R_g (t_3 + 273)}} = \frac{130}{\sqrt{1.4 \times 257 \times 350}}$$

$$= \frac{130}{375} = 0.347$$

$$Ma_4 = \frac{v_4}{c_4} = \frac{v_4}{\sqrt{\gamma \frac{p_4}{\rho_4}}} = \frac{50}{\sqrt{\frac{1.4}{1.5} \times 1.49 \times 10^5}}$$

$$= \frac{50}{373} = 0.134$$

可见

$$Ma_2 > Ma_3 > Ma_1 > Ma_4$$

$$c_3 > c_4 > c_2 > c_1$$

由题知，$v_2 > v_3 > v_4 > v_1$，可见马赫数的大小不是单纯由速度决定，而是由速度和声速的比值来决定的。声速也不是恒定不变的，它与当地温度、压强和密度等状态参数有关。既然声速具有当地性，自然马赫数也是如此。

§8-2　一元气流的流动特性

流体动力学中的一些基本原理，不论对可压缩或不可压缩气体都是适用的，因为一元流的连续方程式是 $\rho vA =$ 常数，取对数可得

$$\ln(\rho vA) = \ln\rho + \ln v + \ln A = C$$

微分，则

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{dA}{A} = 0 \qquad (8-13)$$

再引用第三章推导一元流伯努利方程式时所得到(3-72)式

$$W + \int\frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \int f ds = C$$

忽略气体的质量力，则力的势函数 $W=0$。等熵气流不计摩擦，则$\int f ds = 0$，将点的速度换成气流平均速度 v，于是

$$\int\frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2} = C \qquad (8-14)$$

微分，则

$$v dv = -\frac{dp}{\rho} \qquad (8-15)$$

(8-13)与(8-15)式对于可压缩或不可压缩气体的一元流动都是普遍适用的，但是再继续引入声速和马赫数概念，考虑到气体的可压缩性，我们就可以得出一元气流所独特具有的下述两个重要特性。

一、气流速度与密度的关系

由(8-15)式得

$$v\mathrm{d}v=-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}=-c^2\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}=-\frac{v\mathrm{d}v}{c^2}=-\frac{v^2}{c^2}\frac{\mathrm{d}v}{v}=-Ma^2\frac{\mathrm{d}v}{v} \tag{8-16}$$

由(8－15)及(8－16)式可以看到以下两点。

1．不论 $Ma<1$ 或 $Ma>1$，只要 $\mathrm{d}v>0$，则 $\mathrm{d}p<0$，$\mathrm{d}\rho<0$。反之，$\mathrm{d}v<0$ 时，则 $\mathrm{d}p>0$，$\mathrm{d}\rho>0$。

这说明，加速气流必然引起压强降低、气体膨胀；而减速气流，则必然压强增大、气体压缩。于是气流沿流线加速或减速运动，实质上相当于气体的膨胀或压缩过程。气体运动伴随着密度变化，这不但与液体流动不同，而且与汽缸中的静止压缩或膨胀过程也有区别。

亚声速和超声速气流都具有上述性质，不过当 Ma 数不同时，速度相对变化量$\frac{\mathrm{d}v}{v}$与密度相对变化量$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}$的数值是不相同的。

2．$Ma<1$ 时，密度的相对变化量小于速度的相对变化量，即 $\left|\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}\right|<\left|\frac{\mathrm{d}v}{v}\right|$；

$Ma>1$ 时，密度的相对变化量大于速度的相对变化量，即 $\left|\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}\right|>\left|\frac{\mathrm{d}v}{v}\right|$。

这种亚声速和超声速在变化数量上的差别可以从(8－16)式直接得到证明。这种变化数量上的差别，导致如下所述，亚声速和超声速在速度与流道断面积关系上的本质性的差异。

二、气流速度与流道断面积的关系

由(8－13)式可得

$$\frac{\mathrm{d}A}{A}=-\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}+\frac{\mathrm{d}v}{v}\right) \tag{8-17}$$

将(8－16)式代入，则

$$\frac{dA}{A}=Ma^2\frac{dv}{v}-\frac{dv}{v}=(Ma^2-1)\frac{dv}{v} \tag{8-18}$$

由此可以看到:

1. 亚声速流动,$Ma<1$ 时,

如果 $dv>0$,则 $dA<0$;

如果 $dv<0$,(即 $dp>0$),则 $dA>0$。

这说明,亚声速气流沿流线加速运动时,其过流断面面积一定是逐渐缩小的;沿流线减速扩压运动时,其过流断面面积一定是逐渐扩大的。因此,图 8－6 的收缩管道称为亚声速加速管,而图 8－7 的扩张管道则称为亚声速扩压管。

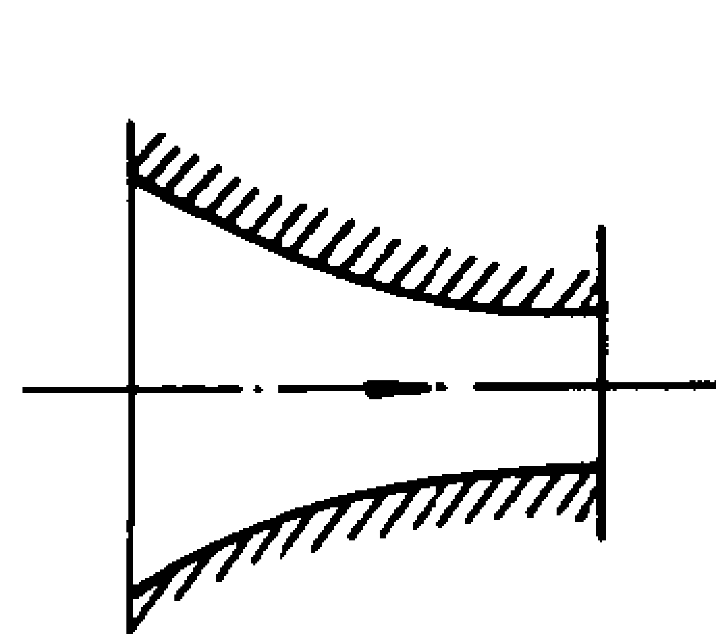


图 8－6　收缩管道

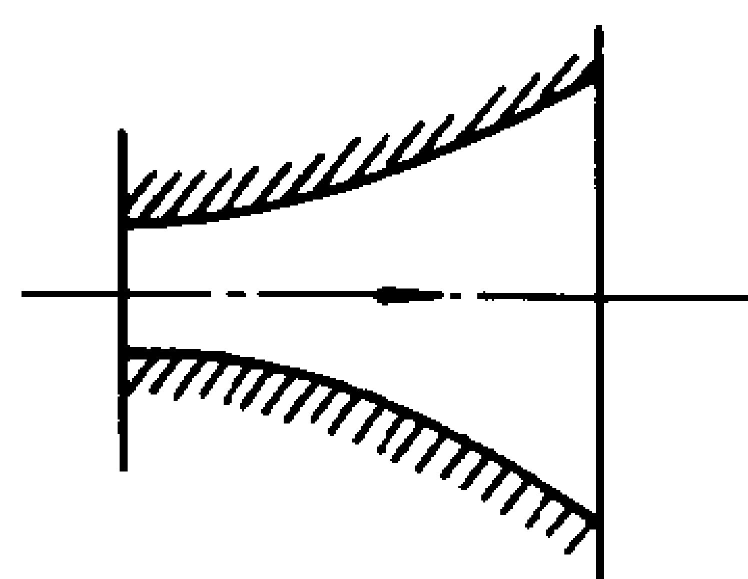


图 8－7　扩张管道

2. 超声速流动,$Ma>1$ 时,

如果 $dv>0$,则 $dA>0$;

如果 $dv<0$(即 $dp>0$),则 $dA<0$

这说明,超声速流动时,沿流线加速,则过流断面必须逐渐扩大;沿流线减速扩压时,过流断面必须逐渐缩小,这情况与亚声速流动完全相反。因而图 8－6 的收缩管道又称为超声速扩压管,而图 8－7 的扩张管道又称为超声速加速管。

为什么同样一个管道,对亚声速和超声速气流所起的作用是截然相反呢? 这原因从前面的一些基本关系上也不难找到。

因为由(8－16)式知道 $\frac{dv}{v}>0$ 时,$\frac{d\rho}{\rho}<0$。而当 $Ma<1$ 时,

$\left|\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\rho}\right|<\left|\dfrac{\mathrm{d}v}{v}\right|$,故从(8－17)式可以看到等式右端括号中$\left(\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\rho}+\dfrac{\mathrm{d}v}{v}\right)>0$,故$\dfrac{\mathrm{d}A}{A}<0$。相反当 $Ma>1$ 时,$\left|\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\rho}\right|>\left|\dfrac{\mathrm{d}v}{v}\right|$,故$\left(\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\rho}+\dfrac{\mathrm{d}v}{v}\right)<0$,由(8－17)式可见必然$\dfrac{\mathrm{d}A}{A}>0$。

这种推理中包含的物理内容究竟是怎样呢？因为从连续方程(8－17)式来看,面积的增减取决于$\left(\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\rho}+\dfrac{\mathrm{d}v}{v}\right)$这两项和的正负,而偏偏这两项又永远是一正一负,速度增大则密度减小,速度减小则密度增大。问题就在于速度和密度的变化中,哪一方是矛盾的主要方面？亚声速加速中,速度增加的相对变化量大于密度减小的相对变化量,速度增加是主要的,因而面积必随速度增加而减小。超声速加速中,速度增加的相对变化量小于密度减小的相对变化量。密度减小是主要的,因而面积必随密度减小而增大。这就是亚声速和超声速气流存在着本质性差别的物理原因。

3. 拉瓦尔喷管

从上述分析可知,要想完成气流从亚声速向超声速转变,或者从超声速向亚声速转变,用一种单纯收缩管或单纯扩张管都是无法实现的。逐渐收缩管道充其量只能在出口处达到声速,想超过这个界限,必须不失时机地在声速断面之后立即改变管道形状。这种能够从亚声速连续加速到超声速的管道,如图 8－8 所示,称为拉瓦尔(Laval)喷管。拉瓦尔喷管由收缩段、喉部及扩张段所组成。其收缩段如果按照维托辛斯基(Витсинский)公式

$$r=\frac{r_1}{\sqrt{1-\left[1-\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^2\right]\dfrac{\left(1-\dfrac{x^2}{l^2}\right)^2}{\left(1+\dfrac{x^2}{3l^2}\right)^3}}} \tag{8-19}$$

绘制,可以避免流场的不均匀性。扩张段一般可用 6°～12°的扩张

锥形，以避免流体从管壁分离。喉部断面与出口断面大小则需按所要求的流量和马赫数计算。

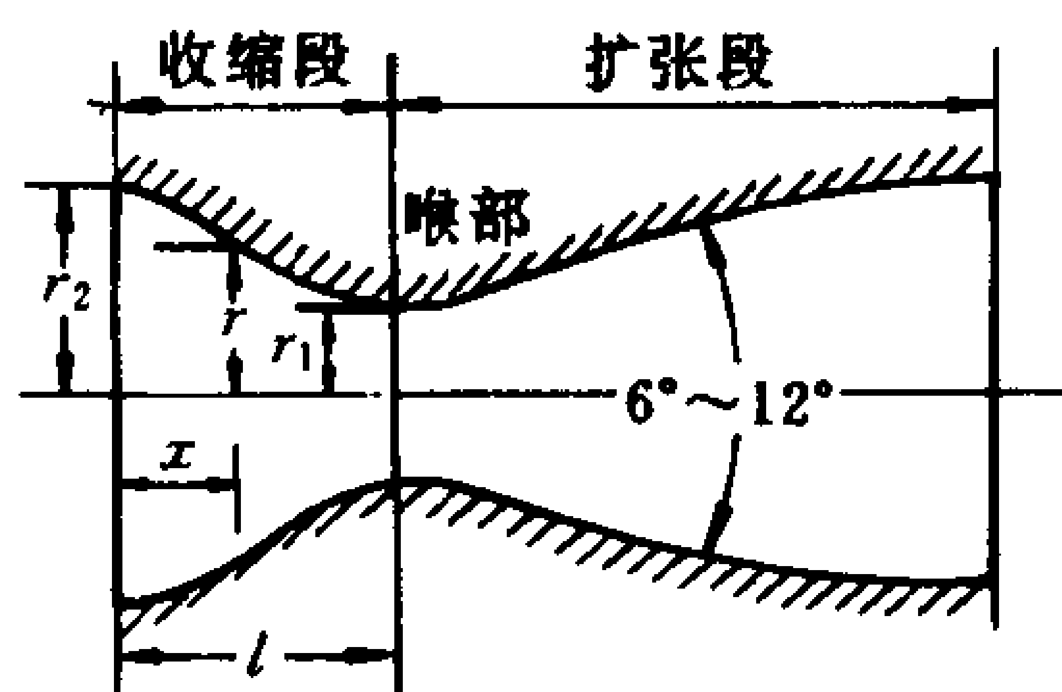


图 8-8　拉瓦尔喷管

拉瓦尔喷管在工程技术中有许多应用。如图 8-9 所示，(1)为超声速燃气轮机中的叶栅，其流道形状就是拉瓦尔喷管形状。

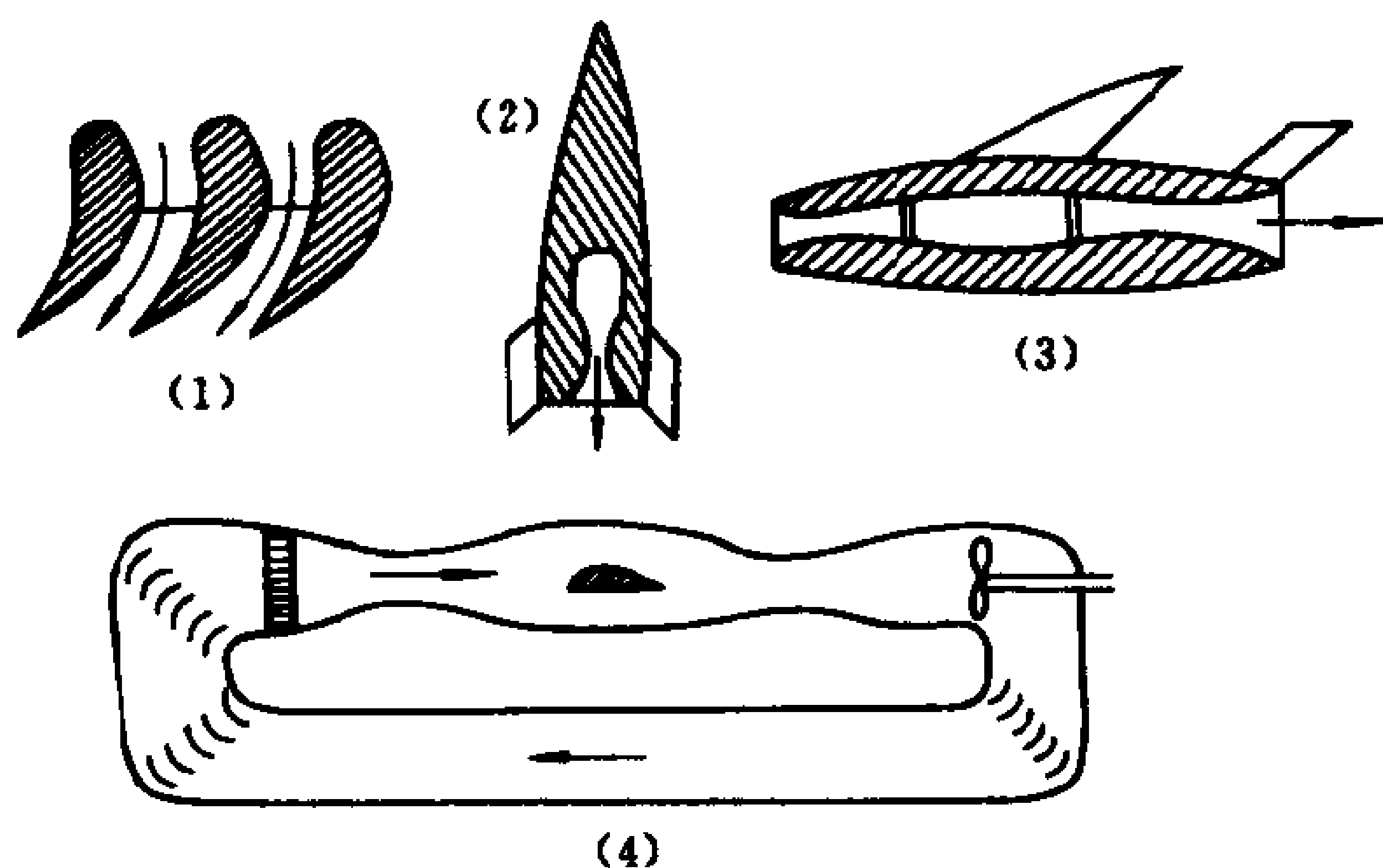


图 8-9　拉瓦尔喷管的应用

(2)为火箭喷管，(3)为冲压式喷气发动机，(4)为超声速风洞。冲压式喷气发动机用第一个拉瓦尔喷管将超声速气流连续压缩，然后在燃烧室中燃烧，再用第二个拉瓦尔喷管将燃烧气体以超声速射出。这里第一个是超声速扩压管，第二个才是超声速加速管。超声速风洞中第一个是超声速加速管，产生超声速气流供试验用，然后用第二个超声速扩压管将超声速气流连续增压至常压状态，这样既能保证超声速实验的稳定性，又能减少气流损失。

§8-3　等熵和绝热气流的基本方程式与基本概念

一、基本方程式：

等熵气流的基本方程式就是第三章中得出的沿流线的伯努利方程(3-83)式

$$\frac{v^2}{2}+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}=C$$

方程式左端第二项可以改写成许多不同形式。

因　$\frac{p}{\rho}=R_g T$　所以　$\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}=\frac{\gamma}{\gamma-1}R_g T$　(8-20)

因　$c=\sqrt{\gamma R_g T}$　所以　$\frac{\gamma}{\gamma-1}R_g T=\frac{c^2}{\gamma-1}$　(8-21)

再引用工程热力学中的下面四个基本关系式：

绝热指数等于比定压热容与比定容热容之比

$$\gamma=\frac{c_p}{c_V} \tag{8-22}$$

气体常数等于比定压热容与比定容热容之差

$$R_g=c_p-c_V \tag{8-23}$$

单位质量的焓等于比定压热容乘绝对温度

$$h=c_pT \tag{8-24}$$

单位质量的内能等于比定容热容乘绝对温度

$$e=c_VT \tag{8-25}$$

于是又可得：

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}R_g T=\frac{\frac{c_p}{c_V}}{\frac{c_p-c_V}{c_V}}R_g T=c_p T=h \tag{8-26}$$

$$\begin{aligned}\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}&=\frac{\gamma-1+1}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}=\left(1+\frac{1}{\gamma-1}\right)\frac{p}{\rho}\\&=\frac{p}{\rho}+\frac{1}{\gamma-1}R_g T=\frac{p}{\rho}+\frac{1}{\frac{c_p-c_V}{c_V}}R_g T\\&=\frac{p}{\rho}+c_V T=\frac{p}{\rho}+e\end{aligned} \tag{8-27}$$

综合以上结果,可以将等熵气流的基本方程写成

$$\frac{v^2}{2}+\left\{\begin{array}{l}\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}\\ \frac{\gamma}{\gamma-1}R_g T\\ \frac{c^2}{\gamma-1}\\ c_p T\\ h\\ \frac{p}{\rho}+e\end{array}\right\}=C \tag{8-28}$$

这实际上是六个方程式,长括号表示并列关系,可从中任取一项。这种公式表示法既可以节省篇幅,又可以并列进行比较。

这六种形式统称为基本方程式,它们都具有同等效用,多种形式是为了适应不同需要。以下的(8-29)、(8-30)及(8-32)式也都采取这种并列形式。

(8-28)方程式的物理意义,由其最末一式可以看得很清楚。因为$\frac{v^2}{2}$、$\frac{p}{\rho}$、e 分别代表单位质量气体所具有的动能、压能和内能。

故基本方程式的物理意义是沿流线或流管上单位质量流体的总能量守恒,因而基本方程式也称为能量方程式。当然这里所指的能量包括机械能(即动能和压能)也包括热能(即内能)。后者在液体中不参与变化,故液体的伯努利方程式中没有内能项,如不计损失则可写成

$$\frac{v^2}{2}+\frac{p}{\rho}=C$$

这种机械能形式的伯努利方程式只适用于没有损失的理想流体。而现在的气流基本方程式(8-28)的适用范围则不受这种限制。

因为气体基本方程式中包括机械能和热能,尽管实际流体有摩擦会造成沿流线上机械能的降低和损耗,但只要所讨论的系统与外界不发生热交换,则损耗的机械能仍以热能的形式存在于系统中。虽然机械能有所降低,但热能却相应增加,总能量并不改变。因此气流基本方程式既适用于理想气体的可逆绝热流动(即等熵气流),也同样适用于实际流体的不可逆绝热流动。

使用气流基本方程式不必区分理想或实际流体,但却要注意是否绝热。在绝热条件下,(8-28)式才适用。绝热,是能量方程式(8-28)的唯一限制条件。

二、滞止参数和临界参数

气流计算中有些断面上的参数是已知的,有些断面上的参数是待求的。如果根据气流基本方程式,直接建立已知断面和未知断面上气流参数的关系式,则使用起来会更加方便。下面我们以图 8-10 表示的流动为例说明滞止参数和临界参数的概念,以及它们之间的关系式。

左边燃烧室或者大型气罐中的速度可以认为是零,速度为零处的状态参数称为滞止参数,并用下标$_0$表示,如滞止温度 T_0、滞止密度 ρ_0,滞止压强 p_0、滞止声速 c_0 等等。

气流离开燃烧室以后,速度逐渐增大,按基本方程式可知气流

的其它参数均逐渐下降。假定燃烧室中的滞止参数具备建立声速的条件,则在喉部一定是气流速度 v 与喉部处的声速 c 相等。

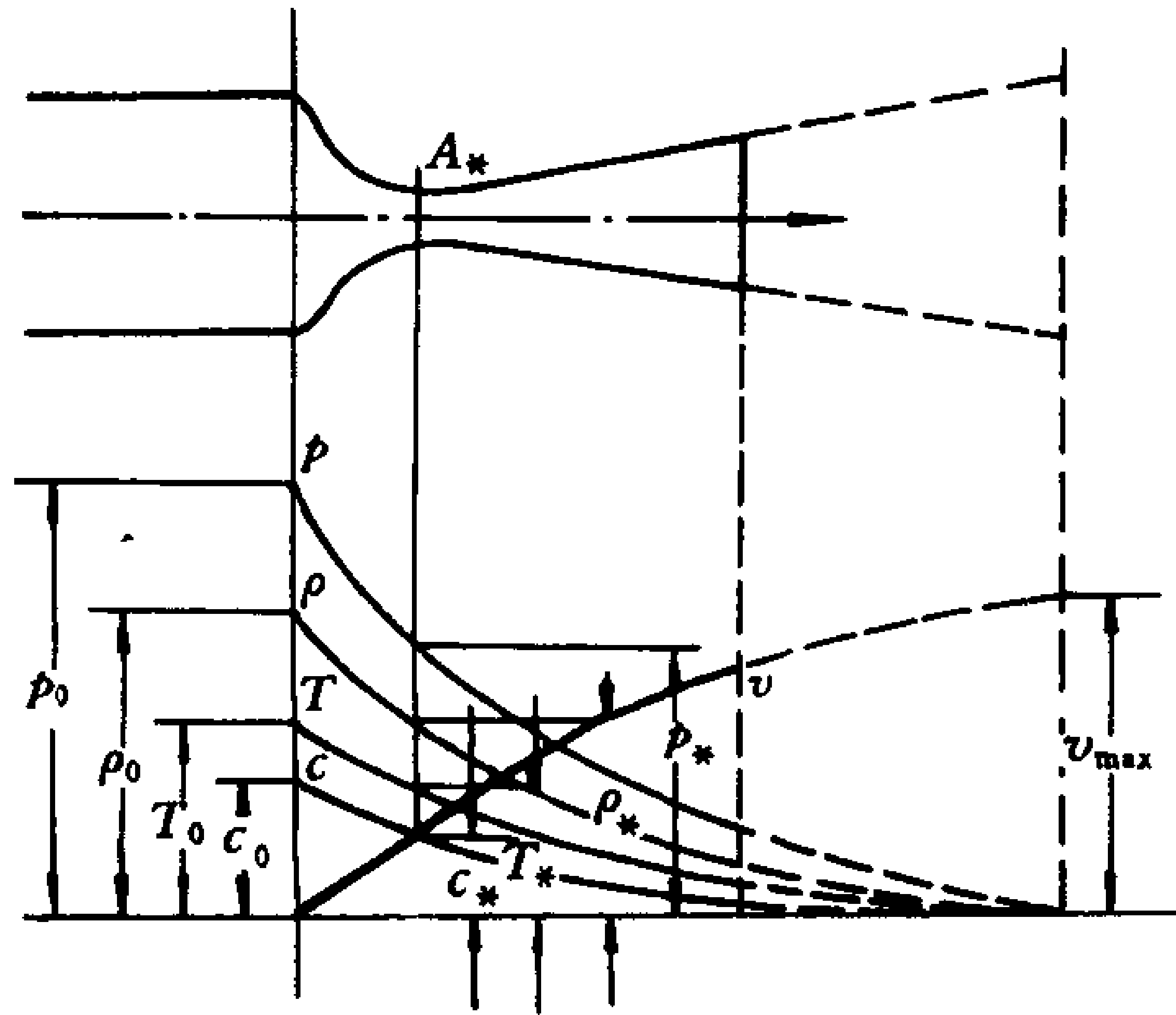


图 8-10　滞止参数与临界参数

$Ma=1$ 的喉部称为临界断面,临界断面上的一切参数均为临界参数,并用下标 $_*$ 表示,如临界温度 T_*、临界密度 ρ_*、临界压强 p_*、临界声速 c_*、临界断面 A_* 等等。

除临界马赫数 $Ma_*=1$、临界速度 $v_*=c_*$ 以外,其余临界参数均小于对应的滞止参数。

过喉部以后速度继续提高,其他参数继续下降,在出口处得到一定的超声速气流,$Ma=\frac{v}{c}>1$,但出口处仍具有一定的压强 p、密度 ρ、温度 T 和声速 c。

如果设想再延长扩张管,从理论上来说,使 p、ρ、T、c 等降为零时,可能有极限的气流速度 v_{max},但这纯粹是理论上的设想,实际上 $p=\rho=T=c=0$ 的绝对真空状态是永远得不到的。因此这种理论上的极限速度 v_{max} 只是告诫人们在设计喷管时不要超过实际条件所允许的速度界限。

根据上述定义，不难得出各种参数之间的下列关系式：

1. 流动参数与滞止参数的关系

$$\frac{v^2}{2}+\begin{cases}\dfrac{\gamma}{\gamma-1}\dfrac{p}{\rho}=\dfrac{\gamma}{\gamma-1}\dfrac{p_0}{\rho_0}\\ \dfrac{\gamma}{\gamma-1}R_g T=\dfrac{\gamma}{\gamma-1}R_g T_0\\ \dfrac{c^2}{\gamma-1}=\dfrac{c_0^2}{\gamma-1}\\ c_p T=c_p T_0\\ h=h_0\\ \dfrac{p}{\rho}+e=\dfrac{p_0}{\rho_0}+e_0\end{cases} \tag{8-29}$$

2. 极限速度与滞止参数的关系

$$v_{\max}=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2\gamma}{\gamma-1}\dfrac{p_0}{\rho_0}}\\ \sqrt{\dfrac{2\gamma}{\gamma-1}R_g T_0}\\ \sqrt{\dfrac{2}{\gamma-1}}c_0\\ \sqrt{2c_p T_0}\\ \sqrt{2h_0}\\ \sqrt{2\left(\dfrac{p_0}{\rho_0}+e_0\right)}\end{cases} \tag{8-30}$$

3. 临界声速与滞止参数的关系

因为临界断面上 $v=c=v_*=c_*$，故

$$\frac{v^2}{2}+\frac{c^2}{\gamma-1}=\frac{c_*^2}{2}+\frac{c_*^2}{\gamma-1}=\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}c_*^2$$

$$=\frac{v_{\max}^2}{2}=\frac{c_0^2}{\gamma-1} \tag{8-31}$$

由此可得

$$c_* = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2\gamma}{\gamma+1}\dfrac{p_0}{\rho_0}} \\ \sqrt{\dfrac{2\gamma}{\gamma+1}R_g T_0} \\ \sqrt{\dfrac{2}{\gamma+1}}c_0 \\ \sqrt{\dfrac{2(\gamma-1)}{\gamma+1}c_p T_0} \\ \sqrt{\dfrac{2(\gamma-1)}{\gamma+1}h_0} \\ \sqrt{\dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}}v_{max} \end{cases} \quad (8-32)$$

4. 临界参数与滞止参数的关系：

由(8－32)的第三式可得 $\dfrac{c_*}{c_0} = \left(\dfrac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{2}}$

因 $\dfrac{c_*}{c_0} = \dfrac{\sqrt{\gamma R_g T_*}}{\sqrt{\gamma R_g T_0}} = \sqrt{\dfrac{T_*}{T_0}}$，所以 $\dfrac{T_*}{T_0} = \left(\dfrac{2}{\gamma+1}\right)$

因 $\dfrac{c_*}{c_0} = \sqrt{\dfrac{\gamma\dfrac{p_*}{\rho_*}}{\gamma\dfrac{p_0}{\rho_0}}} = \left(\dfrac{\rho_*}{\rho_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}}$，所以 $\dfrac{\rho_*}{\rho_0} = \left(\dfrac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$

因 $\dfrac{p_*}{p_0} = \dfrac{C\rho_*^\gamma}{C\rho_0^\gamma} = \left(\dfrac{\rho_*}{\rho_0}\right)^\gamma$，所以 $\dfrac{p_*}{p_0} = \left(\dfrac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$

(8－33)

临界参数与滞止参数之比也简称为临界参数比，它们只与气体的绝热指数有关，对于不同绝热指数的几种气体，可列出表8－2。

表 8-2　临界参数与滞止参数之比

临界参数 滞止参数	空气、氢、氧 $\gamma=1.4$	油燃气、水蒸汽 $\gamma=1.33$	过热蒸汽、甲烷 $\gamma=1.3$	火药燃气 $\gamma=1.2$
临界声速比$\frac{c_*}{c_0}$	0.913	0.926	0.932	0.953
临界温度比$\frac{T_*}{T_0}$	0.833	0.858	0.870	0.909
临界密度比$\frac{\rho_*}{\rho_0}$	0.634	0.630	0.628	0.621
临界压强比$\frac{p_*}{p_0}$	0.528	0.540	0.546	0.564
$\frac{c_*}{v_{max}}$	0.408	0.376	0.361	0.302

5. 流动参数与马赫数的关系

$$\left.\begin{aligned}
&将(8-29)第三式乘以\frac{\gamma-1}{c^2},得\ \frac{c}{c_0}=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}Ma^2\right)^{-\frac{1}{2}}\\
&因\quad \frac{c}{c_0}=\sqrt{\frac{T}{T_0}},所以\frac{T}{T_0}=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}Ma^2\right)^{-1}\\
&因\quad \frac{c}{c_0}=\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}},所以\frac{\rho}{\rho_0}=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}Ma^2\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}}\\
&因\quad \frac{p}{p_0}=\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma},所以\frac{p}{p_0}=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}Ma^2\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}}
\end{aligned}\right\}$$

(8-34)

(8-33)与(8-34)两式中的密度比和压强比是利用等熵条件导出的,因而对于出现超声速的冲波,即有熵的突跃的情况是不适用的,本书对此不作叙述了。

[**例题 8-2**]　环境温度为 $t_0=27$ ℃,绝对压强 $p_0=10^5$ Pa,在汽油机吸气过程中,图 8-11 所示的汽化器喉部绝对压强为 $p=88$ kPa,已知喉部断

面积 $A=4\ \text{cm}^2$，试按不可压缩及绝热可压缩两种方法计算：

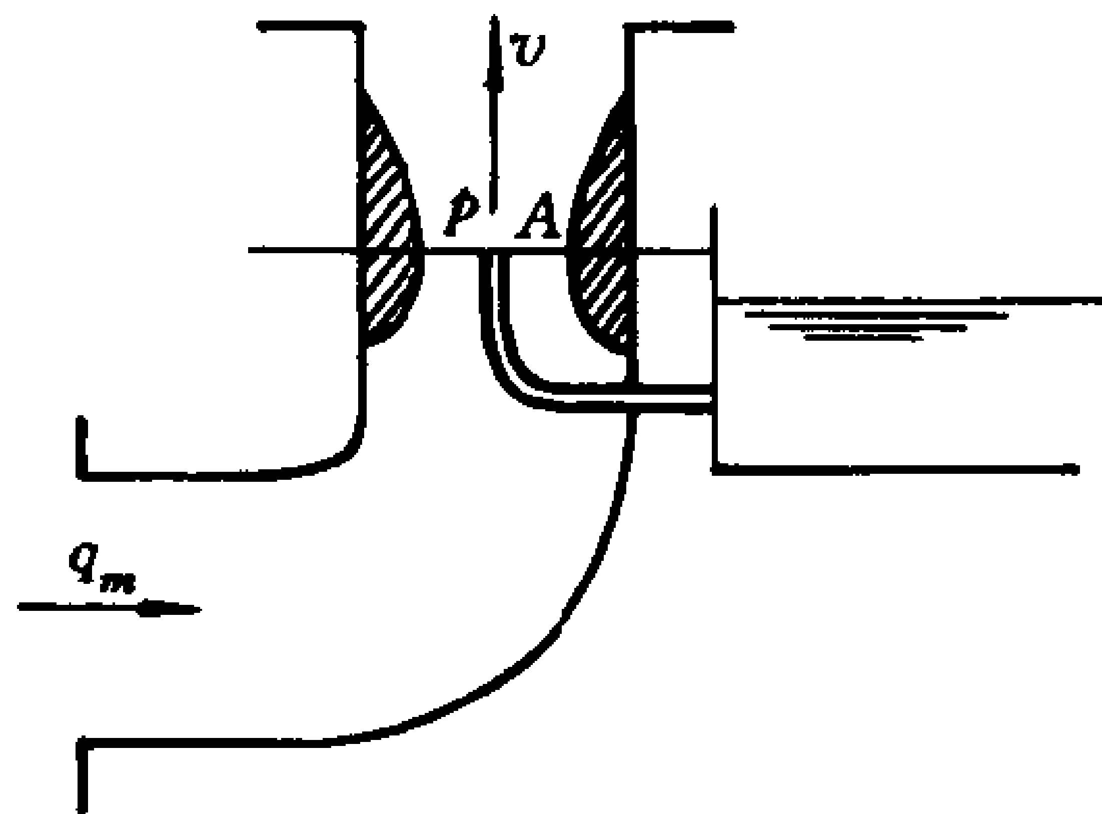


图 8-11　汽化器

(1) 喉部空气速度；

(2) 发动机进气的质量流量。

[解]　先按不可压缩流体计算

空气密度

$$\rho_0=\frac{p_0}{RT_0}=\frac{10^5}{287\times300}=1.16\ \text{kg/m}^3$$

喉部空气速度

$$\begin{aligned}v&=\sqrt{\frac{2(p_0-p)}{\rho}}\\&=\sqrt{\frac{2\times(1-0.88)\times10^5}{1.16}}\\&=143.8\ \text{m/s}\end{aligned}$$

质量流量

$$q_m=\rho_0 vA=1.16\times143.8\times4\times10^{-4}=0.066\,7\ \text{kg/s}$$

其次按绝热可压缩计算

喉部空气密度

$$\rho=\rho_0\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}}=1.16\times\left(\frac{0.88}{1}\right)^{\frac{1}{1.4}}=1.06\ \text{kg/m}^3$$

喉部温度

$$T=\frac{p}{\rho R_g}=\frac{0.88\times10^5}{1.06\times287}=289\ \text{K}$$

根据(8-29)中的第二式可得：

喉部气流速度

$$v=\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}R_g(T_0-T)}=\sqrt{\frac{2\times1.4}{1.4-1}\times287(300-289)}$$
$$=148.7\ \text{m/s}$$

质量流量

$$q_m=\rho vA=1.06\times148.7\times4\times10^{-4}=0.063\ \text{kg/s}$$

比较可见,按不可压缩流体计算,速度偏低,而质量流量偏高。

[**例题 8-3**] 液体燃料火箭(图 8-12)燃烧室中的温度是 $t_0=350$ ℃,燃料密度是 $\rho_0=1.52\ \text{kg/m}^3$,绝热指数 $\gamma=1.33$,气体常数 $R_g=250\ \text{J/(kg·K)}$。

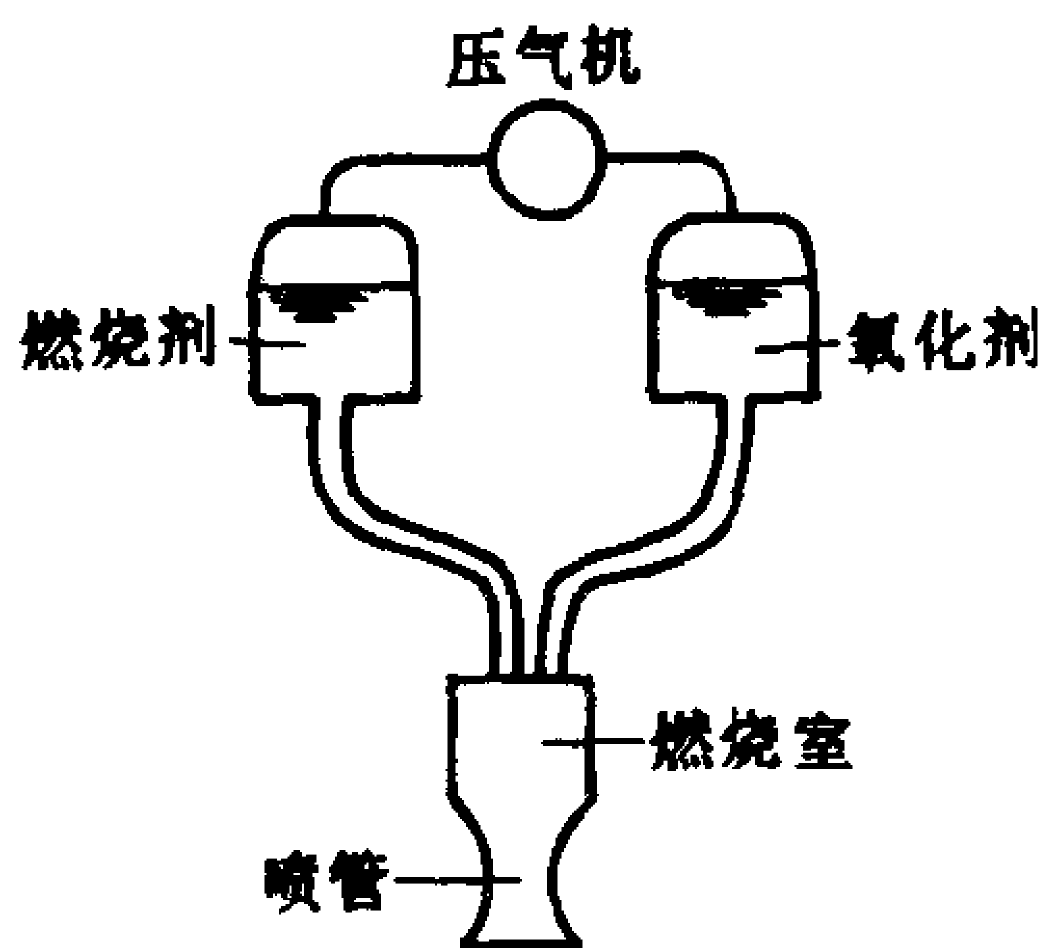


图 8-12 液体燃料火箭

(1) 试求临界温度、临界声速、临界密度、临界压强。

(2) 如果喷管出口的 $Ma=1.8$,喷管出口面积 $A=0.1\ \text{m}^2$,试求火箭推力及喷管喉部面积。

(3) 如果火箭飞行速度 $v=1\ 500$ m/s,当运行到 20 km 高空时,其头部最高温度是多少?

[**解**] 已知燃烧室中的滞止参数为

$$T_0=623\ \text{K},\qquad \rho_0=1.52\ \text{kg/m}^3$$
$$c_0=\sqrt{\gamma R_g T_0}=\sqrt{1.33\times250\times623}=455\ \text{m/s}$$
$$p_0=\rho_0 R_g T_0=1.52\times250\times623=2.367\times10^5\ \text{Pa}$$

(1) 根据表 8-2、$k=1.33$ 栏中的数据可得:

$$\left.\begin{aligned}T_* &= T_0\times0.858=534.5\ \text{K}\\ c_* &= c_0\times0.926=421\ \text{m/s}\\ \rho_* &= \rho_0\times0.630=0.958\ \text{kg/m}^3\\ p_* &= p_0\times0.540=1.278\times10^5\ \text{Pa}\end{aligned}\right\}$$

(2) 根据(8－34)式中的第一式可得出口处的声速为

$$c=c_0\left(1+\frac{\gamma-1}{2}Ma^2\right)^{-\frac{1}{2}}=455\times\left(1+\frac{1.33-1}{2}\times1.8^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$=367\ \text{m/s}$$

出口速度

$$v=Mac=1.8\times367=661\ \text{m/s}$$

根据(8－34)中的第三式可得出口处的密度为

$$\rho=\rho_0\left(1+\frac{\gamma-1}{2}Ma^2\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}}$$
$$=1.52\times\left(1+\frac{1.33-1}{2}\times1.8^2\right)^{-\frac{1}{1.33-1}}$$
$$=0.415\ \text{kg/m}^3$$

火箭喷管的推力为

$$F=\rho q_V v=\rho v^2A=0.415\times661^2\times0.1=18\ 130\ \text{N}$$

由 $\rho vA=\rho_* c_* A_*$ 可得喷管喉部面积为

$$A_*=\frac{\rho vA}{\rho_* c_*}=\frac{0.415\times661\times0.1}{0.958\times421}=0.068\ \text{m}^2$$

(3) 由表 8－1 得 20 km 高空处的温度为 $t=-56.5$ ℃

声速为 $c=295\ \text{m/s}$

于是可得火箭飞行的马赫数 $Ma=\dfrac{v}{c}=\dfrac{1\ 500}{295}=5.085$

因环境温度 $T=273-56.5=216.5\ \text{K}$

火箭头部为滞止点，其温度为 T_0，则由(8－34)中的第二式得

$$T_0=T\left(1+\frac{\gamma-1}{2}Ma^2\right)=216.5\times\left(1+\frac{1.33-1}{2}\times5.085^2\right)$$
$$=1\ 140\ \text{K}$$

$$t_0=1\ 140-273=867\ ℃$$

[例题 8-4] 如果气流密度相对变化量在 1% 以下可以视为不可压缩流体,试求 15 ℃的空气作为不可压缩流体计算时的最大允许速度是多少?

[解] 设气流原来的密度是 ρ_0,变化后的密度是 ρ,

则密度相对变化量为

$$\frac{\rho_0-\rho}{\rho_0}=1-\frac{\rho}{\rho_0}\leqslant 0.01$$

所以 $\dfrac{\rho}{\rho_0}\geqslant 0.99$,根据(8-34)中的第三式得

$$\left(1+\frac{\gamma-1}{2}Ma^2\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}}\geqslant 0.99$$

所以

$$1+\frac{\gamma-1}{2}Ma^2\leqslant\left(\frac{1}{0.99}\right)^{\gamma-1}$$

即

$$Ma\leqslant\sqrt{\frac{2}{\gamma-1}\left[\left(\frac{1}{0.99}\right)^{\gamma-1}-1\right]}$$

以 $\gamma=1.4$ 代入上式,得

$$Ma\leqslant 0.142$$

因为 $t=15$ ℃时,$c=340$ m/s,所以

$$v\leqslant 48.3 \text{ m/s}$$

通常说低速气流可以作为不可压缩流体计算,其根据即在此。以密度相对变化量 1% 为界限,则速度低于 50 m/s 的气流皆可按不可压缩流体计算。如果密度的相对变化量允许 2%,则作为不可压缩流体计算的马赫数 $Ma\leqslant 0.2$,速度为 $v\leqslant 70$ m/s。

§8-4 收缩喷管与拉瓦尔喷管的计算

在气轮机、压气机及火箭中为使气流加速,广泛采用收缩喷管和拉瓦尔喷管。此处介绍的内容主要是导出速度和流量的计算公式。借此可由已知的喷管尺寸和压强计算流量和速度,也可反过来,由已知的喷管流量和压强设计喷管型式和尺寸。

一、收缩喷管

收缩喷管加速的最大界限是出口达到声速,因此,对于加速作用来说,收缩喷管主要用于亚声速范围的气流。

如图 8－13 所示，设喷管前的滞止参数为 p_0、ρ_0、T_0，喷管后的环境参数为 p、ρ、T，喷管出口断面积为 A。

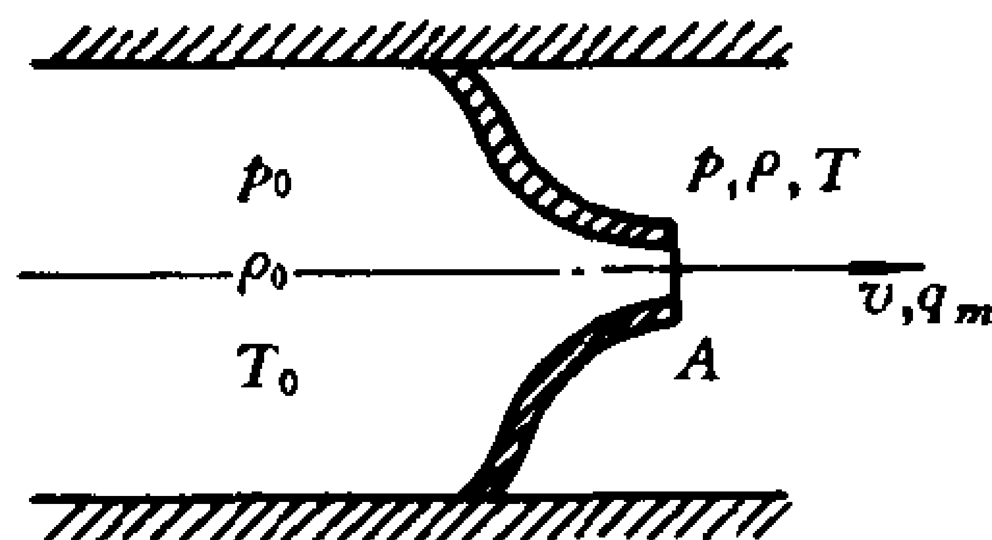


图 8－13　收缩喷管

假定流动过程是绝热的，则根据(8－29)式

$$\frac{v^2}{2}+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}$$

可得

$$v=\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[1-\frac{p}{p_0}\frac{\rho_0}{\rho}\right]}$$

将 $\frac{\rho_0}{\rho}=\left(\frac{p}{p_0}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}$ 代入，则

$$v=\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]} \tag{8-35}$$

这就是喷管出流的速度公式，也称圣·维南(Saint·Venant)定律。此公式无论对亚声速或超声速都是成立的。

经喷管的质量流量为

$$q_m=\rho vA=\rho_0\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}}A\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]}$$

$$=A\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}p_0\rho_0\left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{2}{\gamma}}-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\right]} \tag{8-36}$$

由此可见，经喷管的流量主要取决于喷管前后的压强比 $\frac{p}{p_0}$。以 $\frac{p}{p_0}$ 为横坐标，以 q_m 为纵坐标，(8－36)式可绘成图 8－14 中的 Obc

曲线，当$\frac{p}{p_0}=1$时，喷管前后压强相等，$q_m=0$；当$\frac{p}{p_0}=0$时，射向绝对真空，$\rho=0$所以$q_m=0$。流量曲线有个极大也是最大值，当$\frac{\mathrm{d}q_m}{\mathrm{d}\left(\frac{p}{p_0}\right)}=0$时，可得极值条件为

$$\frac{p}{p_0}=\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \tag{8-37}$$

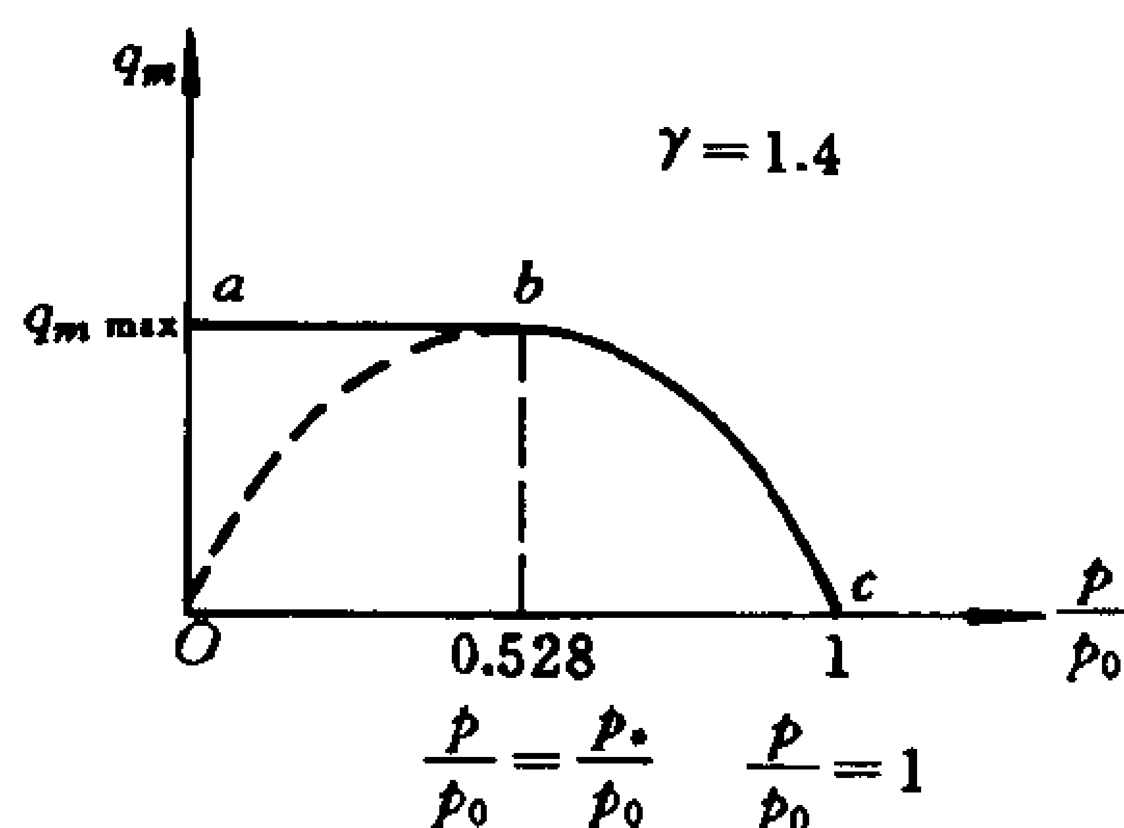


图 8-14　收缩喷管的流量曲线

由(8-33)的第四式可看到等式的右端正是临界压强比$\frac{p_*}{p_0}$。也就是说当$\frac{p}{p_0}=\frac{p_*}{p_0}$，即$p=p_*$时，流经喷管的流量达最大值$q_m=q_{m\max}$，以极值条件(8-37)式代回(8-36)式可得此最大值为

$$\begin{aligned}q_m&=q_{m\max}\\&=A\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}p_0\rho_0\left[\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{2}{\gamma-1}}-\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\right]}\\&=\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}A\sqrt{\gamma\rho_0p_0}\end{aligned} \tag{8-38}$$

由图 8-14 可以看到以下三种情况。

1. 当$\frac{p}{p_0}>\frac{p_*}{p_0}$，即$p>p_*$时，喷管出口处的压强较高，气体在

喷管中虽然逐渐加速降压，但出口处的压强仍大于临界压强。因而气流速度在出口处仍然低于声速，这时只能得到亚声速气流。此时的流量曲线由图中 bc 代表，其流速、流量公式即为(8－35)及(8－36)式。

2．当$\frac{p}{p_0}=\frac{p_*}{p_0}$，即 $p=p_*$ 时，喷管出口处的压强就是临界压强，说明出口断面就是临界状态，这时喷管出口的速度恰好等于声速，得到的是等声速气流，此种情况下得到最大流量，即如图中 b 点所示。流量的计算公式固然仍可用(8－36)式，但以$\frac{p}{p_0}=\frac{p_*}{p_0}=\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$代入后可以化为(8－38)式。

流速公式也可用(8－35)式，但以$\frac{p}{p_0}=\frac{p_*}{p_0}=\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$代入后，可以化为

$$v=\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[1-\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)\right]}$$

$$=\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma+1}\frac{p_0}{\rho_0}}=\sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}c_0=c_* \qquad (8-39)$$

这再一次说明出口速度正是声速。用(8－39)式计算出口声速当然比用(8－35)式方便得多。

3．当$\frac{p}{p_0}<\frac{p_*}{p_0}$即 $p<p_*$ 时，喷管外界压强 p 小于临界压强 p_*，外界条件似乎给喷管中气流以更充分地降压、膨胀、加速的机会，但是在逐渐收缩形喷管中气流不可能超越声速。尽管外界条件容许，但气流在收缩喷管中降压、膨胀、加速是有限度的，它不可能在喷管中加速越过声速。因此也不可能在喷管中降压越过临界压强 p_*。充其量，只能在出口断面上膨胀到临界压强为止，再低是不可能的。喷管外虽然压强比临界压强更低，但对喷管中的流

动不能产生影响，因为当出口已是声速流动时，压强差的扰动波不能再向管中传播。这时在喷管出口处仍然保持临界状态，其流量和流速与 $p=p_*$ 时是一样的。因此在图 8－14 中，当$\frac{p}{p_0}<\frac{p_*}{p_0}$时，其流量曲线为 ab 直线，而不是 Ob 曲线。

Ob 曲线只是用公式(8－36)式绘出的理论曲线，实际上因为受压强波不能向超声速上游传播的限制，这条曲线是根本无法实现的。

外界压强 $p<p_*$，或$\frac{p}{p_0}<\frac{p_*}{p_0}$时的流动称为欠膨胀的气流，此时喷管出口只能是临界状态，其流量仍为最大值，其流速仍为声速。

在喷管内，气流未获得充分膨胀、降压和加速，到出口断面时，其压强只降到 p_*，而未降到 p_* 以下。因此，当$\frac{p}{p_0}<\frac{p_*}{p_0}$时，用收缩喷管等于浪费了可用能，气流出口时仍然有一部分由 p_*-p 所代表的能量未得到利用。当$\frac{p}{p_0}<\frac{p_*}{p_0}$时要想将这部分能量充分利用使气流加速，唯一的办法是改用拉瓦尔喷管。

二、拉瓦尔喷管

当$\frac{p}{p_0}<\frac{p_*}{p_0}$，即 $p<p_*$，或$\frac{p}{p_0}<\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$时，用拉瓦尔喷管可以使气流在管中充分膨胀、充分加速。如图 8－15 所示，过临界断面 A_* 后，在扩张管中气流继续加速降压，当 p_*-p 所代表的这部分能量也发挥作用后，在喷管出口可以得到超声速气流 $v>c_*$。

由此可见选用收缩喷管或拉瓦尔喷管的关键在于，设置喷管前后的压强比$\frac{p}{p_0}$是否小于$\frac{p_*}{p_0}=\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$。如果 $p<p_*$，用拉

瓦尔喷管,可以充分发挥加速作用;如果 $p>p_*$,只用收缩喷管就可以了。这是气轮机中选择不同喷管形式的依据。

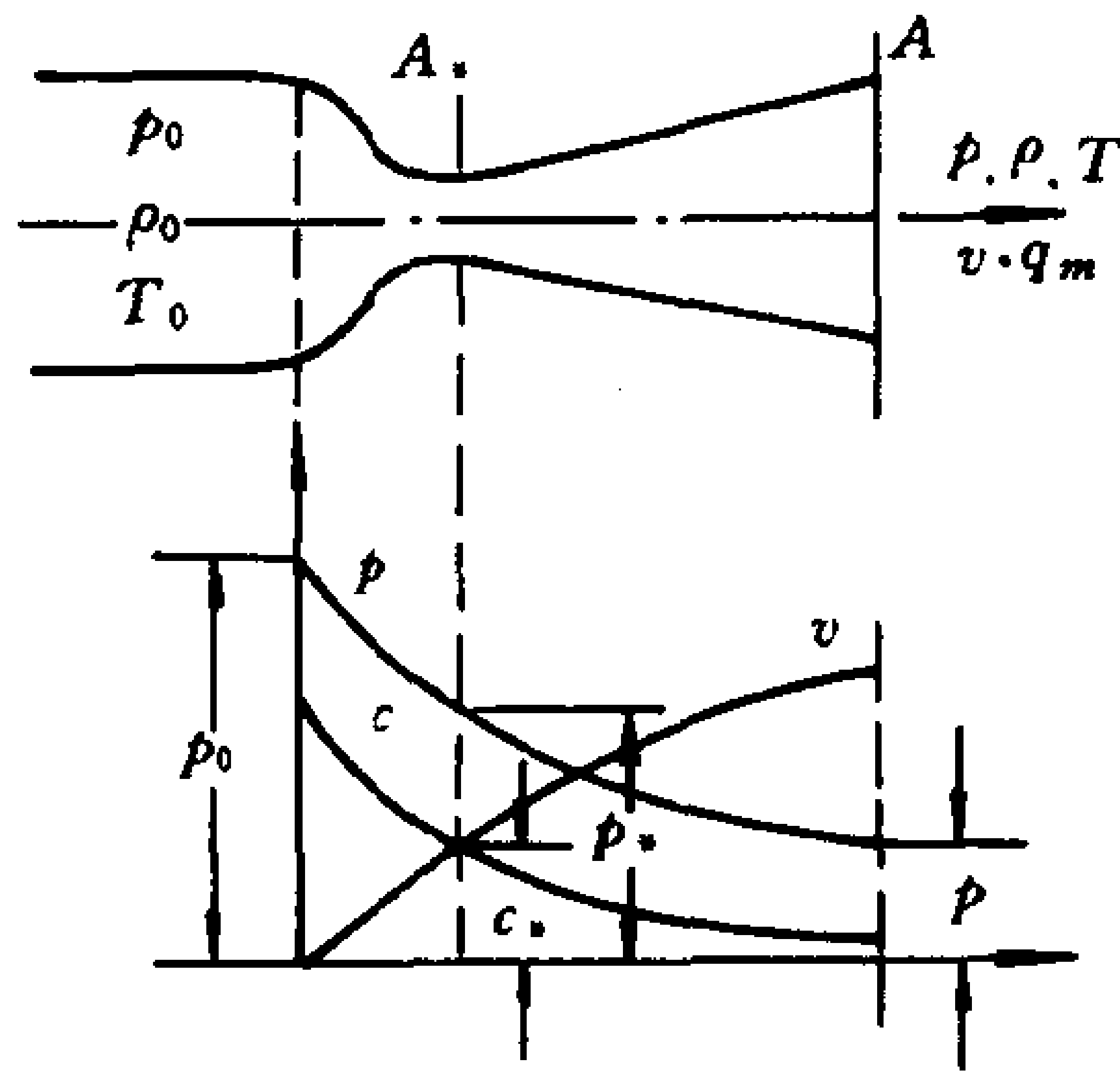


图 8-15 拉瓦尔喷管

当然对于欲获得超声速气流的火箭来说,只能用拉瓦尔喷管。

计算拉瓦尔喷管出口速度仍然用圣·维南定律,即(8-35)式。由于$\frac{p}{p_0}<\frac{p_*}{p_0}$,故由此所得的速度 v 一定是大于c_*的。

计算拉瓦尔喷管质量流量的公式有以下两种写法。

一种是用喉部断面上的临界参数表示,一种是用出口断面上的参数表示,即

$$q_m=\rho_*c_*A_*=\rho vA \tag{8-40}$$

根据(8-38)式可得到第一种形式为

$$q_m=\rho_*c_*A_*=\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}A_*\sqrt{\gamma\rho_0p_0} \tag{8-41}$$

根据(8-35)式可以得到第二种形式为

$$\begin{aligned}q_m&=A\rho_0\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]}\\&=A\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}p_0\rho_0\left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{2}{\gamma}}-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\right]}\end{aligned} \tag{8-42}$$

这与(8－36)式是完全一样的。借助于(8－40)式还可以由喉部截面积 A_* 求出口截面积 A，或者由 A 求 A_*。这种换算也是喷管计算中有可能遇到的问题。

[**例题8－5**] 在空气稳压器的喷嘴出流(图 8－16)中，保持 $p_0=700$ kPa(绝对压强)，$t_0=40$ ℃。稳压器出口的收缩喷嘴直径为 $d=25$ mm。

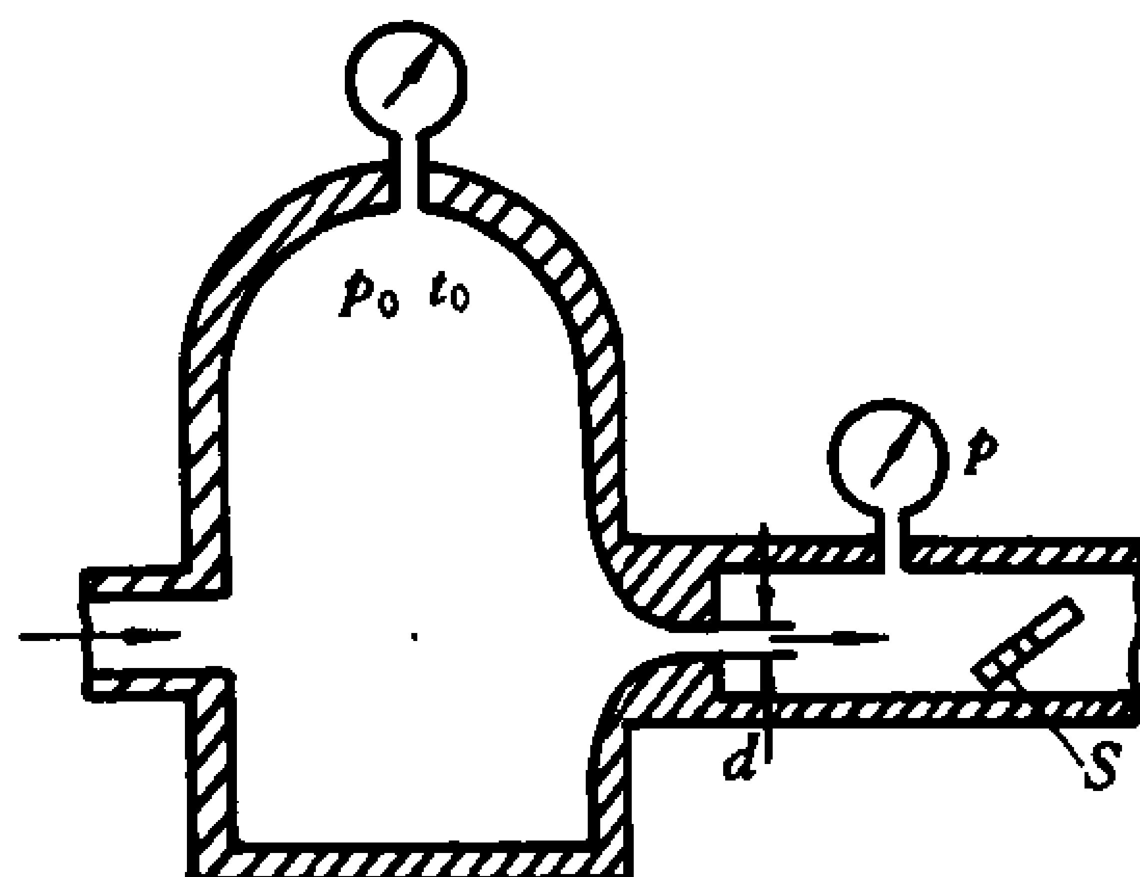


图 8－16 空气稳压器的喷嘴出流

借调节阀 S 可以将喷嘴出口环境压强调节成：

(1) $p=500$ kPa (绝对压强)或

(2) $p=200$ kPa (绝对压强)。

试求这两种情况下的空气质量流量、喷嘴出口断面上的绝对压强、气流速度、温度、声速和马赫数。

[**解**] 首先求出稳压器中的空气密度

$$\rho_0=\frac{p_0}{R_g T_0}=\frac{7\times10^5}{287\times313}=7.79\ \text{km/m}^3$$

(1) $\frac{p}{p_0}=\frac{5}{7}=0.714>0.528=\frac{p_*}{p_0}$，因此出口是亚声速，出口压强就是环境压强 $p=500$ kPa。

由公式(8－36)

$$q_m=A\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}p_0\rho_0\left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{2}{\gamma}}-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\right]}$$

$$=\frac{\pi}{4}(0.025)^2\times\sqrt{\frac{2\times1.4}{1.4-1}\times7\times10^5\times7.79[(0.714)^{\frac{2}{1.4}}-(0.714)^{\frac{2.4}{1.4}}]}$$

$=0.722\ \text{kg/s}$

由公式(8－35)得

$$v=\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]}=240\ \text{m/s}$$

由公式(8－29)中的第四式得

$$\frac{v^2}{2}+c_pT=c_pT_0$$

查表1－4得空气的比定压热容 $c_p=1\,005\ \text{J/(kg·K)}$

于是出口温度为

$$T=T_0-\frac{v^2}{2c_p}=313-\frac{240^2}{2\times1\,005}=284\ \text{K}$$

$$t=284-273=11\ ℃$$

出口声速为

$$c=\sqrt{\gamma R_g T}=\sqrt{1.4\times287\times284}=337.8\ \text{m/s}$$

出口马赫数

$$Ma=\frac{v}{c}=0.71$$

(2) $\frac{p}{p_0}=\frac{2}{7}=0.286<0.528=\frac{p_*}{p_0}$，因此这种情况是欠膨胀气流，出口只能是临界状态。

出口压强为临界压强 $p=p_*=0.528\times p_0=369.6\ \text{kPa}$。由公式(8－38)得

$$\begin{aligned}q_m&=\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}A\sqrt{\gamma\rho_0p_0}\\&=\left(\frac{2}{1.4+1}\right)^{\frac{2.4}{0.8}}\times\frac{\pi}{4}(0.025)^2\sqrt{1.4\times7\times10^5\times7.79}\\&=0.785\ \text{kg/s}\end{aligned}$$

由公式(8－35)或其简化的公式(8－39)可得

$$v=\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma+1}\cdot\frac{p_0}{\rho_0}}=\sqrt{\frac{2\times1.4}{1.4+1}\cdot\frac{7\times10^5}{7.79}}=324\ \text{m/s}$$

因为出口断面是临界断面，故

$$c=324\ \text{m/s},\ Ma=1$$

出口断面的温度是临界温度，故由(8－33)的第二式可得

$$T=T_*=\frac{2}{\gamma+1}T_0=\frac{2}{1.4+1}\times 313=261\ \text{K}$$

$$t=261-273=-12\ ℃$$

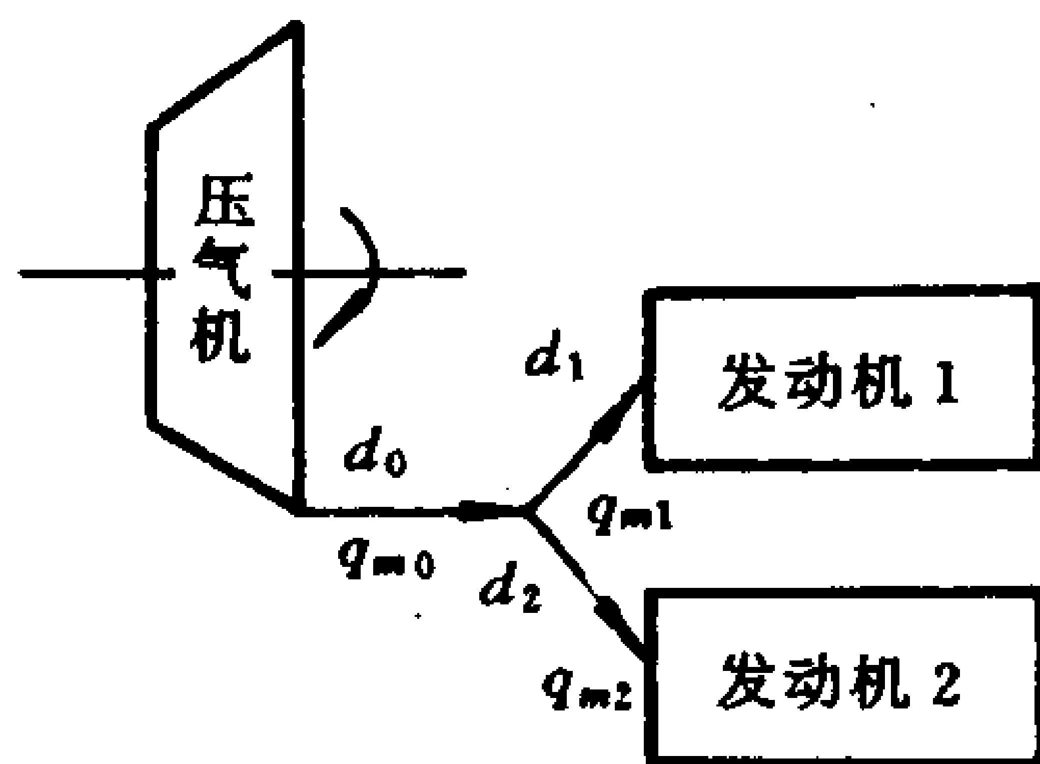
如果用(8－29)式中的第四式，则

$$T=T_0-\frac{v^2}{2c_p}$$

将 $v=324$ m/s 及 $c_p=1\ 005$ J/(kg·K)代入，也会得到同样结果。

习　　题

8－1. 压气机将绝对压强为 $p=3\times10^5$ Pa、温度为 $t=117$ ℃的压缩空气输向两台涡轮发动机，压气机总质量流量为 $q_{m0}=2\ 000$ kg/h，气体常数 $R_g=287$ J/(kg·K)，已知 $d_0=10$ cm，$q_{m1}=\frac{1}{4}q_{m0}$，$q_{m2}=\frac{3}{4}q_{m0}$，试求管中的气流速度 v_0、两分支管路中的管道直径 d_1 和 d_2。



题 8－1 图

[答：$v_0=26.36$ m/s，$d_1=5$ cm，$d_2=8.66$ cm]

8－2. 飞机在温度 $t=20$ ℃的海平面的飞行速度与在同温层 $t=-55$ ℃的飞行速度相等，试求后一情况的马赫数比前一情况的马赫数大多少？

[答：大 15.9%]

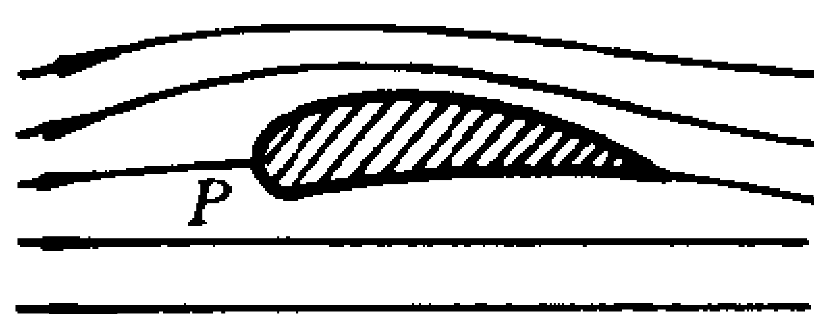
8－3. 模型实验中气流温度为 15 ℃，而驻点 P 的温度为 40 ℃，流动可视为绝热，试求

(1) 气流的马赫数，

(2) 气流速度，

(3) 驻点压强比气流压强增大的百分数。

[答：$Ma = 0.658$, $v = 222$ m/s, $\frac{p_0 - p}{p} =$ 34%]



题 8－3 图

8－4. 空气流动，$p = 10^5$ Pa，$t = 5$ ℃，测压计中汞读数 $h = 20$ cm。当

(1) 空气为等熵流动，比定压热容 $c_p = 1\ 005$ J/(kg·K)时，或

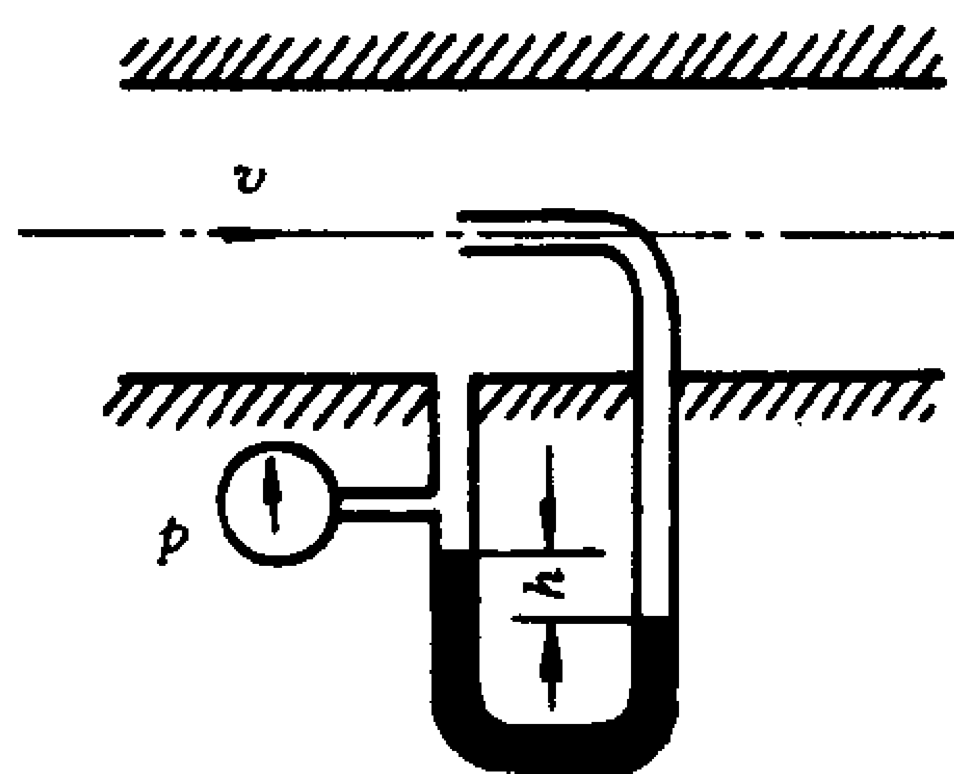
(2) 气流可近似视为不可压缩时，试计算管道轴心上的速度各是多少。

[答：(1) $v = 197.4$ m/s，(2) $v = 205$ m/s]

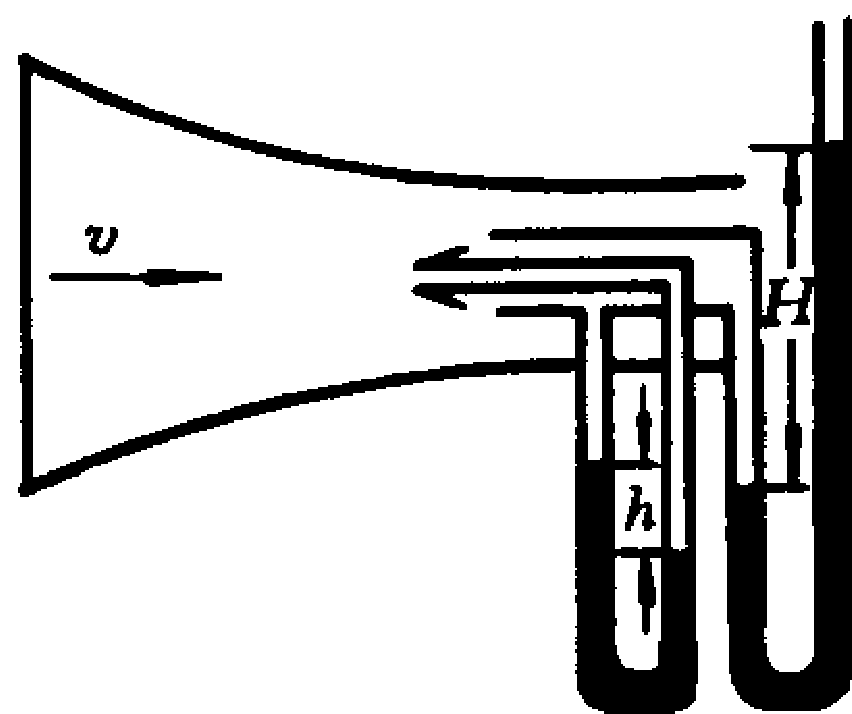
8－5. 用皮托静压管测量风洞中的气流速度，测得 $h = 120$ mm 汞柱，$H = 600$ mm 汞柱，驻点温度 $t_0 = 40$ ℃。

试求气流速度和马赫数。

[答：$v = 544$ m/s，$Ma = 2.113$]



题 8－4 图



题 8－5 图

8－6. 在绝热气流中，测得流线上 1 点的速度为 $v_1 = 225$ m/s，声速为 $c_1 = 335$ m/s，压强为 $p_1 = 1.03 \times 10^5$ Pa，2 点的速度为 $v_2 = 315$ m/s，绝热指数 $\gamma = 1.4$，试求 2 点的压强 p_2。

[答：$p_2 = 75$ kPa]

8－7. 在如题 8－7 图的绝热空气流动中，已知 1－1 断面上的气流平均速度 $v_1 = 365$ m/s，压强 $p_1 = 80$ kPa，温度 $t_1 = 32$ ℃，2－2 断面上的压强 $p_2 = 120$ kPa，试求

(1) 2－2 断面上的速度和温度，

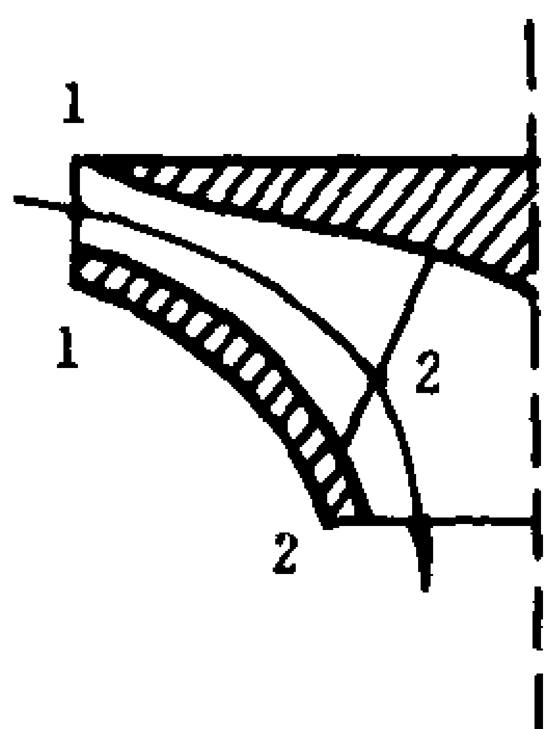
(2) 1－1、2－2 断面上马赫数。

已知气体常数 $R_g=287\ \mathrm{J/(kg\cdot K)}$，绝热指数 $\gamma=1.4$。

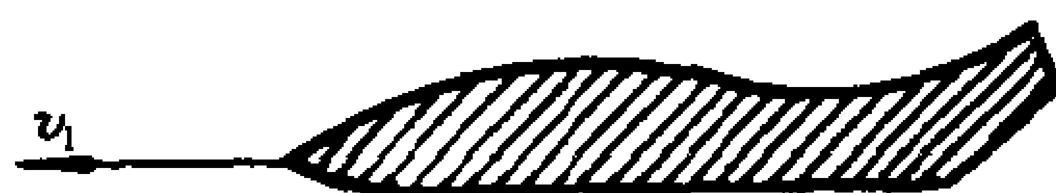
[答：$v_2=241\ \mathrm{m/s}, t_2=70\ ℃, Ma_1=1.043, Ma_2=0.649$]

8-8. 飞机以 $v=270\ \mathrm{m/s}$ 的速度在国际标准大气的条件（$p=101.3\ \mathrm{kPa}, \rho=1.225\ \mathrm{kg/m^3}, t=15\ ℃$）下飞行，试求驻点上的压强、密度与温度增高的百分数。

$$\left[\text{答：}\frac{p_0-p}{p}=51.4\%, \frac{\rho_0-\rho}{\rho}=34.5\%, \frac{t_0-t}{t}=240\%\right]$$



题 8-7 图



题 8-8 图

8-9. 在 $\rho=1.8\ \mathrm{kg/m^3}$、$t=75\ ℃$ 的空气中飞机的马赫数 $Ma=0.7$，试求驻点密度、驻点压强和驻点温度。

[答：$\rho_0=2.275\ \mathrm{kg/m^3}, p_0=2.496\times10^5\ \mathrm{Pa}, t_0=109.3\ ℃$]

8-10. 绝热指数 $\gamma=1.4$ 的可压缩气流在涡轮机中作绝热流动，已知题 8-10 图中 1-1、2-2 两断面上的

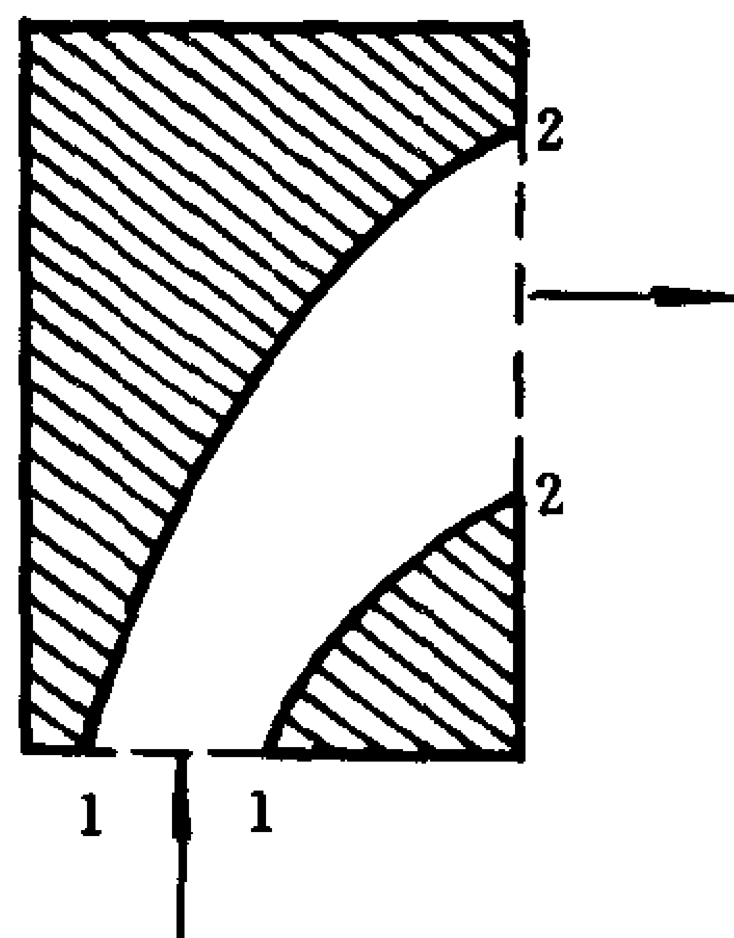
面积比 $\frac{A_1}{A_2}=\frac{1}{2}$，

密度比 $\frac{\rho_1}{\rho_2}=4$，

声速比 $\frac{c_1}{c_2}=2$。

试求 1-1、2-2 断面上的马赫数。

[答：$Ma_1=1.118, Ma_2=4.472$]



题 8-10 图

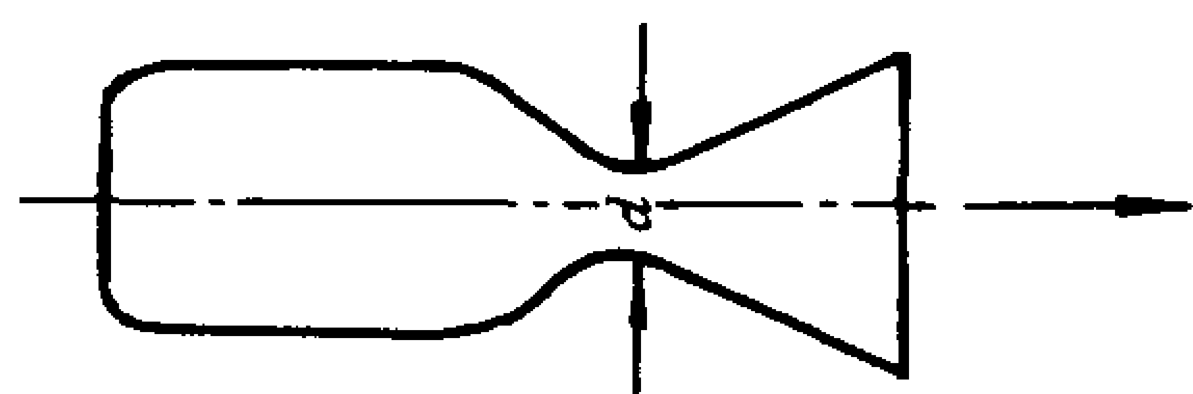
8-11. 压缩空气以超声速从喷管流出，已知喉部直径 $d=25\ \mathrm{mm}$，喉部绝对压强为 $p=0.5\times10^5\ \mathrm{Pa}$，喉部温度 $t=-20\ ℃$，试求喷管的质量流量。

[答：$q_m=0.108\ \mathrm{kg/s}$]

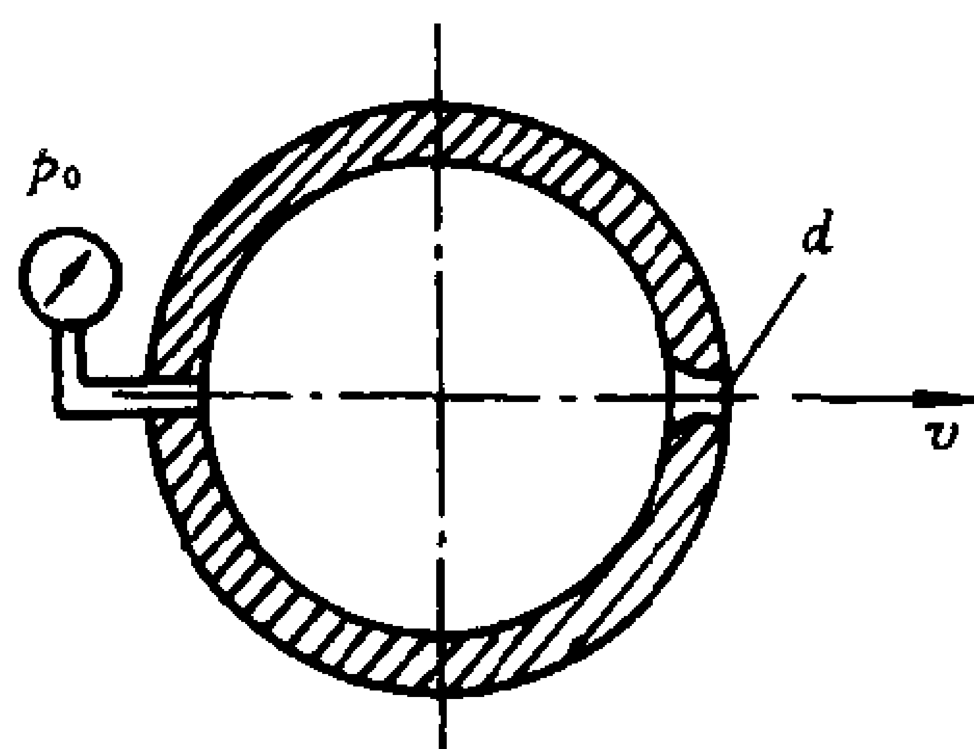
8－12. 绝对压强 $p_0=7$ 个大气压，温度 $t_0=15$ ℃的气罐中贮存二氧化碳，已知其绝热指数 $\gamma=1.3$，气体常数 $R_g=189$ J/(kg·K)，大气压为 101 300 Pa。

试求经过直径 $d=10$ mm 小孔出流时的速度和质量流量。

[答：$v=248$ m/s，$q_m=0.16$ kg/s]

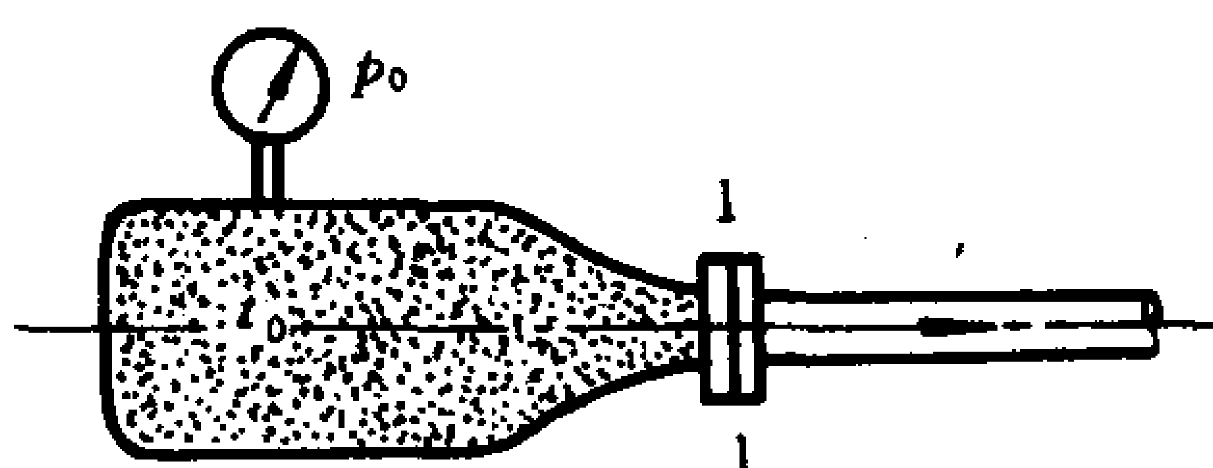


题 8－11 图



题 8－12 图

8－13. 压缩空气从气罐进入管道，已知气罐中绝对压强 $p_0=709.1$ kPa，$t_0=70$ ℃，气罐出口处 $Ma=0.6$，试求气罐出口处的速度、温度、压强和密度。



题 8－13 图

[答：$v=215$ m/s，$t=47$ ℃，$p=5.56\times10^5$ Pa(绝对)，$\rho=6.06$ kg/m^3]

8－14. 空气的超声速喷管质量流量 $q_m=0.051$ kg/s，出口马赫数 $Ma=3$，滞止压强 $p_0=88\ 300$ Pa，滞止温度 $t_0=25$ ℃。

(1) 求喉部直径 d；

(2) 求临界压强、临界密度、临界温度；

(3) 求出口断面直径 D；

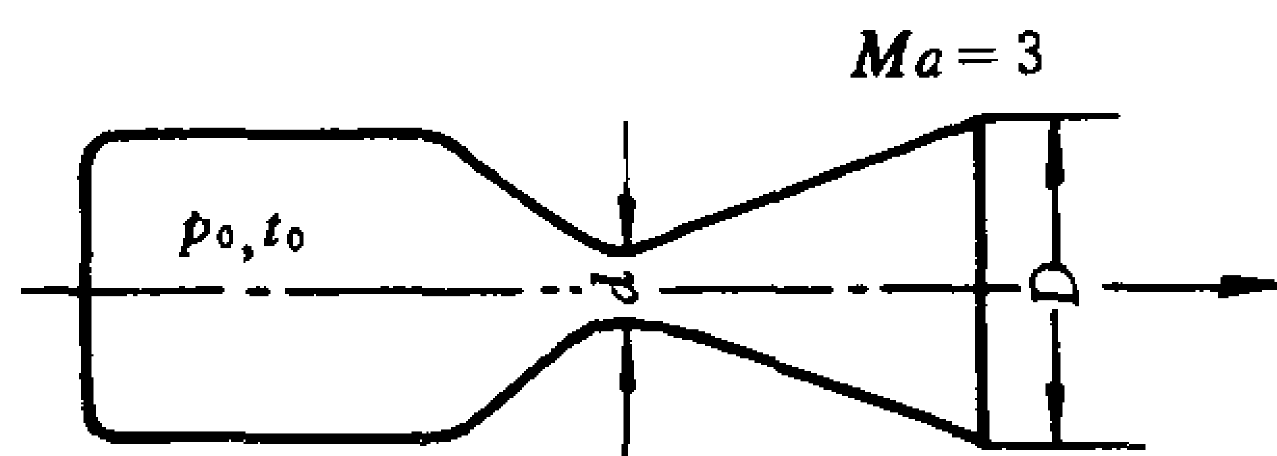
(4) 求出口断面上的压强、密度和温度。

[答：(1) $d=1.77$ cm；

(2) $p_* = 46\ 600$ Pa, $\rho_* = 0.654\ 5$ kg/m^3, $T_* = 248$ K;

(3) $D = 3.654$ cm;

(4) $p = 2\ 404$ Pa, $\rho = 0.078\ 7$ kg/m^3, $T = 106$ K]



题 8－14 图

8－15. 气体在直径为 d、长度为 l 的水平直管中作等温流动，其温度为 T。由于摩擦作用，沿流动方向产生压强降落，其规律可用达西公式表示为

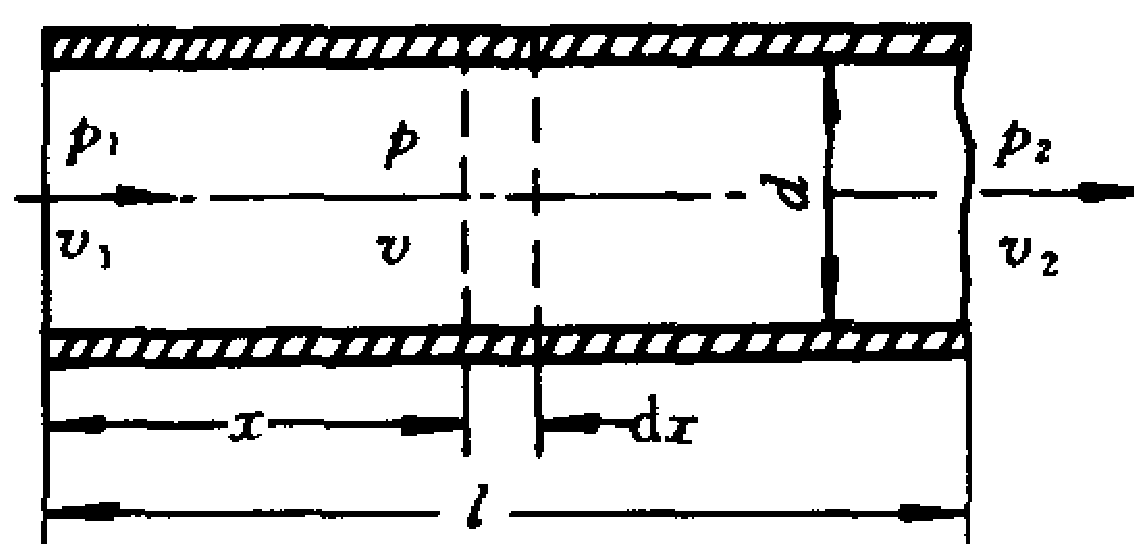
$$\mathrm{d}p = -\lambda \frac{\rho v^2}{2} \frac{\mathrm{d}x}{d}$$

已知入口压强为 p_1 速度为 v_1，试证明

(1) 出口压强 $\quad p_2 = p_1 \sqrt{1 - \dfrac{\lambda l v_1^2}{R_g T d}}$

(2) 出口速度 $\quad v_2 = \dfrac{v_1}{\sqrt{1 - \dfrac{\lambda l v_1^2}{R_g T d}}}$

[提示：引用连续方程与等温方程，并对达西公式从 $x=0$ 到 $x=l$ 积分]



题 8－15 图

附　录

本书物理量的符号、单位与量纲

常见物理量	符　号	单位名称(简称)	单位符号	量　纲
长　度	l, L	米	m	L
时　间	t, T	秒	s	T
质　量	m	千　克	kg	M
力,压力	F	牛顿(牛)	N	MLT^{-2}
体　积	V	立方米,升	m^3, l	L^3
热力学温度	T	开尔文(开)	K	Θ
摄氏温度	t	摄 氏 度	℃	Θ
速　度	v	米 每 秒	m/s	LT^{-1}
加 速 度	a	米每二次方秒	m/s^2	LT^{-2}
功,能,热量	W, E, Q	焦尔(焦)	J	ML^2T^{-2}
功　率	P	瓦特(瓦)	W	ML^2T^{-3}
力　矩	T, M	牛 顿 米	N·m	ML^2T^{-2}
转　速	n	转 每 分	r/min	T^{-1}
角 速 度	ω	弧度每秒	rad/s	T^{-1}
切应力,压强	τ, p	帕斯卡(帕),巴	Pa, bar	$ML^{-1}T^{-2}$
密　度	ρ	千克每立方米	kg/m^3	ML^{-3}

（续表）

常见物理量	符　号	单位名称(简称)	单位符号	量　纲
比 体 积	v	立方米每千克	m^3/kg	$L^3 M^{-1}$
体(膨)胀系数	α_V	负一次方开	K^{-1}	Θ^{-1}
等温压缩率	κ_T	每 帕	Pa^{-1}	$LT^2 M^{-1}$
体积模量	K	帕	Pa	$M L^{-1} T^{-2}$
气体常数	R_g	焦耳每千克开	J/(kg·K)	
比定压热容	c_p	焦耳每千克开	J/(kg·K)	
比定容热容	c_V	焦耳每千克开	J/(kg·K)	
动力粘度	μ	帕斯卡秒(帕秒)	Pa·s	$M L^{-1} T^{-1}$
运动粘度	ν	米二次方每秒	m^2/s	$L^2 T^{-1}$
恩 氏 度	r	恩 氏 度	°E	
粘温指数	λ	每开	K^{-1}	Θ^{-1}
粘压指数	a	每帕	Pa^{-1}	LT^2M^{-1}
速度梯度	$\frac{dv}{dy}$	每秒	s^{-1}	T^{-1}
表面张力	σ	牛顿每米	N/m	$L T^{-2}$
汽化压强	p_v	帕	Pa	$M L^{-1} T^{-2}$
单位质量力	a_m	米每二次方秒	m/s^2	$L T^{-2}$
单位质量力的投影	f_x, f_y, f_z	米每二次方秒	m/s^2	$L T^{-2}$
气体绝热指数	γ			1
压力体体积	V_F	立 方 米	m^3	L^3
对流层温度下降率	β	开 每 米	K/m	ΘL^{-1}
同温层温度	T_d	开	K	Θ
汞柱高度	h	毫米	mm	L

（续表）

常见物理量	符　号	单位名称(简称)	单位符号	量　纲
水柱高度	h	米	m	L
惯 性 矩	I_m, I_c	四次方米	m^4	L^4
偏　距	ϵ	米	m	L
管壁上的应力	σ	帕	Pa	$ML^{-1}T^{-2}$
机械效率	η			1
超　高	Δh	米	m	L
物理量的质点导数	$\frac{dN}{dt}$			
体积流量	q_V	立方米每秒，升每分	m^3/s, l/min	L^3T^{-1}
质量流量	q_m	千克每秒	kg/s	MT^{-1}
净 通 量	q_V	立方米每秒，升每分	m^3/s, l/min	L^3T^{-1}
断面上的平均速度	v	米 每 秒	m/s	LT^{-1}
动　能	T	焦耳	J	ML^2T^{-2}
动　量	p	牛顿·秒	N·s	MLT^{-1}
动能修正系数	α			1
动量修正系数	β			1
直线应变速度	θ	每秒	s^{-1}	T^{-1}
剪切变形角速度	ε	每秒	s^{-1}	T^{-1}
旋转角速度	ω	弧度每秒	rad/s	T^{-1}
水头损失	h_f	米	m	L
扬　程	H	米	m	L
驻点压强	p_0	帕	Pa	$ML^{-1}T^{-2}$

（续表）

常见物理量	符　号	单位名称(简称)	单位符号	量　纲
流速系数	C_v			1
流量系数	C_q			1
管壁上的切应力	τ_0	帕	Pa	$ML^{-1}T^{-2}$
相似比例尺	δ			1
弗劳德数	Fr			1
欧 拉 数	Eu			1
雷 诺 数	Re			1
马 赫 数	Ma			1
无量纲数	π			1
沿程阻力系数	λ			1
局部阻力系数	ζ			1
绕流阻力系数	C_D			1
临界雷诺数	Re_c			1
水力直径	d_H	米	m	L
层流起始段长度	L	米	m	L
湍流时均速度	$\bar{v}$	米每秒	m/s	LT^{-1}
湍流脉动速度	v'	米每秒	m/s	LT^{-1}
混合长度	L	米	m	L
湍动粘度	η	帕　秒	Pa·s	$ML^{-1}T^{-1}$
粘性底层厚度	δ	米	m	L
绝对粗糙度	Δ	米	m	L
当量管长	l_e	米	m	L

（续表）

常见物理量	符　　号	单位名称(简称)	单位符号	量　　纲
当量阻力系数	ζ_e			
管路总阻力系数	ξ			
管路综合参数	K	二次方秒每五次方米	s^2/m^5	T^2L^{-5}
管材的弹性模量	E	帕	Pa	$ML^{-1}T^{-2}$
孔口收缩系数	C_c			
气穴系数	σ			
空气分离压强	p_g	帕	Pa	$ML^{-1}T^{-2}$
无泄漏缝隙	δ_0	米	m	L
最佳缝隙	δ_b	米	m	L
偏 心 矩	e	米	m	L
相对偏心矩	ϵ			1
平板宽度	B,b	米	m	L
承载系数	k	牛顿每米	N/m	MT^{-2}
声　　速	c	米 每 秒	m/s	LT^{-1}
比　　焓	h	焦耳每千克	J/kg	L^2T^{-2}
质量热力学能	e	焦耳每千克	J/kg	L^2T^{-2}
滞止温度	T_0	开	K	Θ
滞止压强	p_0	帕	Pa	$ML^{-1}T^{-2}$
临界声速	c_*	米每秒	m/s	LT^{-1}
临界压强	p_*	帕	Pa	$ML^{-1}T^{-2}$
临界密度	ρ_*	千克每立方米	kg/m^3	ML^{-3}
极限速度	v_{max}	米 每 秒	m/s	LT^{-1}

主要参考书目录

1. 富兰凯尔著. 水力学. 童诛春译. 北京:人民教育出版社,1962
2. 乌根秋斯 A著. 水力学和水力机械. 周鹏等译. 北京:机械工业出版社,1956
3. Streeter V L, Benjamin W E. Fluid mechanics. New York: McGRW－Hill Publishing Company Ltd. 1975
4. 考夫曼著 W. 工程流体力学. 上海:上海科学技术出版社,1959
5. 盛敬超编. 工程流体力学. 北京:机械工业出版社,1988
6. 江宏俊编著. 水力学及水力机械. 北京:中国工业出版社,1962
7. 吴望一编著. 流体力学. 北京:北京大学出版社,1982
8. 孔珑主编. 工程流体力学. 北京:水利电力出版社,1992
9. 清华大学工程力学系编. 流体力学基础. 北京:机械工业出版社,1980
10. Daugherty R L, Ingersoll A C. Fluid mechanics. New York: McGRW－Hill Publishing Company Ltd. 1954
11. Prandtl L. Essentials of fluid dynamics. New York:McGRW－Hill Publishing Company Ltd. 1952
12. 上海交通大学流体力学教研室. 工程流体力学. 上海:上海交通大学印刷厂,1979
13. 张也影,王悦民,施祖荫合编. 水力学及水力机械. 上下册, 北京:人民教育出版社,1962

14. 陈卓如主编. 工程流体力学. 北京:高等教育出版社,1992
15. 库科列夫斯基著. 水力学习题集. 北京:高等教育出版社,1958
16. 张也影,王秉哲编著. 流体力学题解. 北京:北京理工大学出版社,1996
17. 汪兴华编. 工程流体力学习题集. 北京:机械工业出版社,1983
18. 于荣宪编. 工程流体力学解题分析. 南京:江苏科学技术出版社,1985
19. 椿东一郎,荒木正夫合著. 水力学解题指导(上). 杨景芳主译. 北京:高等教育出版社,1983
20. 大连工学院水力学教研组编. 水力学解题指导及习题集. 北京:高等教育出版社,1984
21. 全国量和单位标准化技术委员会. 中华人民共和国国家标准 GB3100～3102—93 量和单位. 北京:中国标准出版社,1994

[General Information]
书名=高等学校教材　　流体力学（第二版）
作者=张也影
页数=440
SS号=10201513
DX号=
出版日期=1986年11月第1版
出版社=高等教育出版社